

22  
1974  
307.226

IV.

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

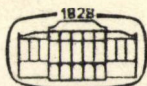
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,  
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR  
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI  
JÁNOSSY LAJOS

XXII. KÖTET

1. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ  
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST 1974



# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klaszszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratból évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus  
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út  
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölgék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.



# MÁSODRENDŰ SZERKEZETI ÁTALAKULÁSOK\*

SASVÁRI LÁSZLÓ

Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszék

I. Bevezetés .....	1
II. Rácsdinamikai instabilitások .....	3
a) Formális összefüggések .....	3
b) Kapcsolat a fononfrekvenciák és a termodinamikai stabilitás között .....	5
c) Az anharmonikus kölcsönhatások szerepe .....	7
III. Landau-elmélet .....	8
IV. Instabilitások a fenomenologikus fonon elméletben .....	10
V. Konkrét átalakulások .....	12
a) Bevezetés .....	12
b) Ferroelektromos perovszkitok .....	13
c) Majdnem ferroelektromos perovszkitok .....	13
d) Egyéb átalakulások .....	13
e) $\text{SrTiO}_3$ , $\text{LaAlO}_3$ , $\text{KMnF}_3$ .....	14

## I. Bevezetés

Először *Anderson és Cochran* [1] vetették föl, hogy bizonyos ferroelektromos fázisátalakulások a rács egy normálmódusának instabilitásából eredhetnek. Két-atomos köbös kristályban az alacsony és nagyfrekvenciás dielektromos állandót ( $\epsilon_0$  és  $\epsilon_\infty$ ) a Lyddane—Sachs—Teller-reláció [2] az optikai frekvenciákkal hozza kapcsolatba:

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty} = \frac{\omega_{\text{LO}}^2}{\omega_{\text{TO}}^2} \quad (1)$$

Itt  $\omega_{\text{LO}}$  a longitudinális,  $\omega_{\text{TO}}$  a transzverzális optikai frekvencia. Másodrendű ferroelektromos átalakulásnál  $\epsilon_0$  divergál egy hőmérsékleten, s így  $\omega_{\text{TO}}$  nulla kell legyen.

Általában akkor beszélünk szerkezeti átalakulásról, ha a kristály szimmetriája egy hőmérsékleten megváltozik. Ez történhet a kristály teljes átrendeződésével, (pl.  $\text{NaCl}$  típusú rácsból  $\text{CsCl}$  típusúba). Ezek az ún. rekonstruktív átalakulások mindenképp elsőrendűek. Egy másik fajta a rend—rendezetlen átalakulás:  $T_c$  fölött az atomok a rendelkezésükre álló két vagy több helyen statisztikusan oszlanak el. Ezeket a helyeket potenciálgát, kis távolság választja el egymástól.  $T_c$  alatt az atomok e helyek egyikébe rendeződnek.

A harmadik esetben, és a továbbiakban csak ezzel foglalkozunk, a kristály szimmetriája úgy változik meg, hogy az egyes atomok eredeti helyükről az elemi cella méretéhez képest kis távolságra eltolódnak. Szűkebb értelemben ezeket fogjuk szer-

\* Érkezett: 1972. nov. 10.



kezeti átalakulásoknak nevezni. (Az angol nyelvű irodalomban: displacive transition.) Ezek egyaránt lehetnek elsőrendű vagy folytonos átalakulások.

A rendparaméter megválasztásában a Landau-elmélet segít (III. rész). Az  $l$ -edik cella  $\lambda$ -ik atomjának elmozdulása fölírható normálkoordináták, azaz meghatározott polarizációjú síkhullámok lineáris kombinációjaként:

$$u_{l\lambda} = \frac{1}{\sqrt{Nm_\lambda}} \sum_{qj} \mathbf{e}(\mathbf{q}j)_\lambda e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_{l\lambda}} Q_{qj}. \quad (2)$$

Természetesen ugyanez az összefüggés sztatikus elmozdulásokra is fölírható. Rendparaméterként egy, a kristály szimmetriáját sértő normálkoordináta sztatikus komponense fog föllépni. A magasabb szimmetriájú fázisban ez nulla, a normálkoordinátának csak dinamikus komponense van, míg az alacsonyabb szimmetriájú fázisban a sztatikus komponense is különbözik nullától. Ilyen értelemben szokás egy normál módus „kondenzációjáról” beszélni.

A folytonos átalakulási pont közelében más (mágneses, folyadék—gőz) fázisátalakulások vizsgálata szerint, a rendszer viselkedését a fluktuációk jelenléte határozza meg [3]. A rendparaméter fluktuációjának amplitúdója divergens. Egy harmonikus oszcillátor fluktuációja

$$\langle Q^2 \rangle \propto \frac{1}{\omega},$$

tehát az átalakulási ponthoz közeledve a normál módus frekvenciája nullához kell tartson, az átalakulás oka rácsdinamikai instabilitás.

Az atomok elmozdulásai erősen csatolódnak a makroszkopikus deformációkhoz. Ezért gyakoriak az ún. közel másodrendű átalakulások. Az ilyen fázisátmenetek elsőrendűek, mivel a rendparaméter ugrásszerűen változik, azonban az átalakulási pont és a stabilitási határ elég közel van ahhoz, hogy a rendszer viselkedését a fluktuációk erősen befolyásolják.

A szerkezeti átalakulások vizsgálatára igény és lehetőség egyaránt a 60-as évek derekán támadt. Ebben az időben már elegendő kísérleti adat állt rendelkezésre annak megállapításához, hogy a különböző, folytonos fázisátalakulásokon átmenő rendszerek az átalakulási hőmérséklet környékén hasonlóan viselkednek. A folyadékoknál és mágneses rendszereknél bevezetett sztatikus skálátörvények [3] sikeresnek bizonyultak a kritikus tartomány leírásában. A mérések tanúsága szerint a különböző rendszerekre vonatkozó kritikus kitevők, amelyek az egyes fizikai mennyiségek hatványviselkedését jellemzik, igen közel vannak egymáshoz. Ez az univerzalitás gondolatát sugallja, azaz, hogy a mérhető mennyiségek viselkedése a kritikus tartományban független az atomi kölcsönhatások konkrét alakjától. A fluktuációk korrelációs hossza ebben a tartományban sokkal nagyobb lesz, mint a részecskék közötti erők hatótávolsága, s így a jelenségeket elsősorban ezek a fluktuációk határozzák meg. Természetes az az igény, hogy az univerzalitás érvényességét a szerkezeti, rend—rend átalakulások esetére is igazolva lássuk. Az eddigi kísérleti eredmények ebből a szempontból biztatóak.

A rácsdinamikai vizsgálatok leghatékonyabb eszközének a neutronszerzés bizonyult. Az infravörös és Raman spektroszkópiával szemben lényegében nem korlátozzák kiválasztási szabályok, s a nagy fluxusú neutron források megépítésével a szükséges intenzitások is rendelkezésre álltak. Neutronszerzéssel nyomon követhetők



a rendszer gerjesztései, s ez lehetőséget ad a dinamikai stabilitás vizsgálatára. Az adott irányba szórt teljes intenzitás pedig a megfelelő hullámszámú szuszeptibilitással arányos, ami a termodinamikai egyensúly stabilitásának jellemző mennyisége.

A jelen összefoglalóban a rácsdinamikai instabilitások általános áttekintése után a Landau-elmélet és a fenomenologikus fononelmélet néhány következményét vizsgáljuk meg. Konkrét alkalmazásként bemutatjuk néhány kristály szerkezeti átalakulását, ezen belül részletesen a  $\text{SrTiO}_3$  kristályét, amely mindezekig legalkalmasabbnak bizonyult a kísérleti vizsgálatokra.

## II. Rácsdinamikai instabilitások

### a) Formális összefüggések

Termodinamikai egyensúlyban a szabadenergia minimális. Az egyensúly stabilitását az biztosítja, hogy a szabadenergia rögzített hőmérséklet mellett többi változójának konvex függvénye. Ezt megfogalmazhatjuk a rendszer sztatikus válaszfüggvényeinek segítségével is.

Legyen a kristály Hamilton-operátora

$$H = H_0 - \sum_{l\lambda\alpha} V_{l\lambda}^{\alpha} R_{l\lambda}^{\alpha}, \quad (3)$$

ahol  $R_{l\lambda}^{\alpha}$  az  $l$ -edik cella  $\lambda$ -ik atomjához húzott vektor  $\alpha$  komponense és  $V_{l\lambda}^{\alpha}$  az atomokat rendező tér. Ez lehet elektromos tér, makroszkopikus feszültség, de nem kell hogy okvetlenül megvalósítható legyen.  $X_{l\lambda}^{\alpha}$ -val jelöljük az atomok egyensúlyi helyét:

$$\langle R_{l\lambda}^{\alpha} \rangle = X_{l\lambda}^{\alpha}, \quad (4)$$

ahol

$$\langle \dots \rangle = \frac{\text{Sp}(e^{-\beta H} \dots)}{\text{Sp}(e^{-\beta H})}.$$

A  $V_{l\lambda}^{\alpha}$  rendező teret megkaphatjuk a kristály  $F(T, X_{l\lambda}^{\alpha})$  szabadenergiájának differenciálásával:

$$V_{l\lambda}^{\alpha} = \frac{\partial F}{\partial X_{l\lambda}^{\alpha}} = \left\langle \frac{\partial H_0}{\partial R_{l\lambda}^{\alpha}} \right\rangle. \quad (5)$$

Ez az egyenlet egyben azt is kifejezi, hogy az atomokra ható átlagos erő nulla. A stabilitás feltétele, hogy a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X_{l\lambda}^{\alpha} \partial X_{l'\lambda'}^{\alpha'}} \quad (6)$$

szimmetrikus mátrix pozitív definit legyen.

Ha a külső tér  $\delta V_{l\lambda}^{\alpha}$ -val megváltozik, (5) szükségképpen továbbra is érvényes. Ha az egyensúlyi helyzetek  $\delta X_{l\lambda}^{\alpha}$ -val változnak meg,

$$\sum_{l'\lambda'} \frac{\partial^2 F}{\partial X_{l\lambda}^{\alpha} \partial X_{l'\lambda'}^{\alpha'}} \cdot \delta X_{l'\lambda'}^{\alpha'} = \delta V_{l\lambda}^{\alpha}. \quad (7)$$



A rendszer sztatikus válasza definíció szerint:

$$\delta X_{l\lambda}^{\alpha} = \sum_{l'\lambda'\alpha'} \chi^T(l\lambda, l'\lambda'\alpha') \delta V_{l'\lambda'}^{\alpha'} \quad (8)$$

A kettő összevetéséből:

$$\chi^T(l\lambda, l'\lambda'\alpha')^{-1} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_{l\lambda}^{\alpha} \partial X_{l'\lambda'}^{\alpha'}} \quad (9)$$

Így a rács termodinamikai stabilitásának feltétele, hogy a  $\chi^T$  mátrix minden sajátértéke pozitív véges szám legyen. Érdemes Fourier-komponensekre áttérni. A rács translációinvarianciája miatt

$$\chi^T(l\lambda, l'\lambda'\alpha') = \frac{1}{N} \sum_l e^{iq(X_{l\lambda} - X_{l'\lambda'})} \chi^T(\mathbf{q}, \lambda\alpha, \lambda'\alpha'). \quad (10)$$

A rendszer akkor éri el a stabilitás határát, ha valamely  $\mathbf{q}_c$  hullámszámnál a  $\chi^T(\mathbf{q}_c)$  mátrix egy sajátértéke divergens lesz. A stabilitási határon áthaladva fázisátalakulás játszódik le.  $\mathbf{q}_c$ -t kritikus hullámszámnak nevezzük, értéke nyilvánvalóan befolyásolja az új fázis szimmetriatulajdonságait. Ha  $\mathbf{q}_c = 0$ , a rács hosszúhullámú perturbációval szemben instabil. Ez gyakran valamilyen makroszkopikus válasz divergenciáját jelenti, pl. a dielektromos állandóét a ferroelektromos átalakulásoknál.

Lineáris válasz közelítésben

$$\chi^T(\mathbf{q}, \lambda\alpha, \lambda'\alpha') = \frac{1}{\sqrt{m_{\lambda} m_{\lambda'}}} (u_{\mathbf{q}\lambda}^{\alpha}, u_{\mathbf{q}\lambda'}^{\alpha'}), \quad (11)$$

ahol  $m_{\lambda}$  a  $\lambda$ -ik atom tömege, és a későbbiek kedvéért bevezettük a következő jelöléseket:

$$(A, B) = \int_0^{\beta} \langle e^{\tau H_0} A e^{-\tau H_0} B^+ \rangle d\tau \quad (12)$$

és

$$u_{\mathbf{q}\lambda}^{\alpha} = \sqrt{\frac{m_{\lambda}}{N}} \sum_l e^{-iqX_{l\lambda}} (R_{l\lambda}^{\alpha} - X_{l\lambda}^{\alpha}). \quad (13)$$

A rács stabilitását más oldalról is megvizsgálhatjuk. A rendszer kis külső, időtől függő perturbációkra adott válasza a rendszer gerjesztéseivel hozható kapcsolatba, a dinamikai stabilitás ezeknek a gerjesztéseknek a stabilitását jelenti. Az instabillá váló kollektív gerjesztést kritikus módusnak nevezzük, vagy „soft mode”-nak (lágy módusnak), mivel a stabilitási határt általában zérus frekvencián éri el.

Legyen a perturbáció

$$H' = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{l\lambda\alpha} V_{l\lambda}^{\alpha}(t) R_{l\lambda}^{\alpha} e^{\varepsilon t} \quad (14)$$

alakú. A külső térben legalacsonyabb rendig a rendszer válasza a következőképpen írható:

$$\delta \langle R_{l\lambda}^{\alpha} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{l'\lambda'\alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \chi^D(l\lambda, l'\lambda'\alpha', t - \tau) V_{l'\lambda'}^{\alpha'}(\tau) e^{\varepsilon \tau}, \quad (15)$$

ahol a dinamikus válaszfüggvény

$$\chi^D(l\lambda, l'\lambda'\alpha', t) = i\Theta(t) \langle [R_{l\lambda}^{\alpha}(t), R_{l'\lambda'}^{\alpha'}(0)] \rangle_0. \quad (16)$$



Itt  $\langle \dots \rangle_0$  az egyensúlyi  $\exp(-\beta H_0)$  sűrűségoperátor szerinti átlagolást jelent. Mint  $\chi^T$  esetében, most is a Fourier-komponenseket érdemes fölírni, az  $u_{\mathbf{q}\lambda}^z$  változók segítségével:

$$\chi^D(\mathbf{q}, \lambda\alpha, \lambda'\alpha', t) = \frac{i\Theta(t)}{\sqrt{m_\lambda m_{\lambda'}}} \langle [u_{\mathbf{q}\lambda}^z(t), u_{-\mathbf{q}\lambda'}^z(0)] \rangle_0, \quad (17)$$

ami előjeltől eltekintve a kitérés—kitérés retardált Green-függvény. A kollektív gerjesztéseket  $\chi^D(t)$  Fourier-transzformáltjának,  $\chi^D(\omega)$ -nak a pólusai adják meg, s ezek mindaddig stabilak, amíg az alsó félsíkon vannak. (Im  $\omega < 0$ ). A dinamikai stabilitás határát akkor érjük el, amikor  $\chi^D(\omega)$  egy pólusa a felső félsíkra vándorol.

Kérdés, hogy a stabilitás két megközelítése ekvivalens-e. Nehezen ellenőrizhető feltételek mellett belátható, hogy ha a rendszer a termodinamikai egyensúly szempontjából eléri a stabilitási határt, legalább egy kollektív gerjesztése is instabillá válik, azáltal, hogy komplex frekvenciája nulla lesz [4]. Ezzel a kérdéssel azonban a továbbiakban nem foglalkozunk.

#### b) Kapcsolat a fononfrekvenciák és a termodinamikai stabilitás között

A következőkben a Mori-féle mozgásegyenletek segítségével összefüggést mutatunk meg a fononfrekvenciák és a sztatikus válasz  $\chi^T$  mátrixának sajátértékei között [5]. A Mori-féle egyenletben egy dinamikai változó időderiváltját egy lassan változó és egy fluktuáló részre bontjuk szét:

$$\frac{dA(t)}{dt} - i\Omega A(t) = R(t), \quad (18)$$

ahol a lassan változó tagban

$$i\Omega = (\dot{A}, A)(A, A)^{-1}. \quad (19)$$

A zárójeles kifejezéseket (12) definiálja. Ezeket az egyenleteket alkalmazzuk most a magok mozgásának leírására. A rács dinamikai változóinak az

$$u_{\mathbf{q}\lambda}^z, \dot{u}_{\mathbf{q}\lambda}^z$$

$6Nn$  db változót választjuk. ( $N$  a cellák,  $n$  a cellabeli atomok száma.) A  $\mathbf{q}$  hullám-szám szerint oszlopvektorba rendezzük őket

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{\mathbf{q}\lambda}^z \\ \dot{u}_{\mathbf{q}\lambda}^z \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Természetesen,  $i\Omega$  most egy mátrix lesz. Olyan dinamikai változókat keresünk, amelyek a fluktuáló rész elhagyása esetén függetlenek. Ezeket az  $i\Omega$  mátrix diagonalizálásával kapjuk meg. Itt csak az eredményeket foglaljuk össze. A diagonalizálás végrehajtását illetően, *K. Tani* eredeti cikkére utalunk [6]. Legyen  $U_{\mathbf{q}}$  az  $(u_{\mathbf{q}\lambda}^z, \dot{u}_{\mathbf{q}\lambda}^z)$  mátrix inverze.  $U_{\mathbf{q}}$  a zárójeles kifejezések (12) definíciója miatt hermitikus, így sajátértékei valóságok, sajátvektor-rendszere ortonormálnak választható.

$$U_{\mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}j) = \omega_{\mathbf{q}j}^2 \mathbf{f}(\mathbf{q}j) \quad (j = 1, 2, \dots, 3n). \quad (20)$$



A termodinamikai egyensúly stabilitása miatt az  $U_q$  mátrix pozitív definit, azaz

$$\omega_{qj}^2 > 0 \quad (21)$$

E sajátértékek és sajátvektorok segítségével előállíthatjuk az  $i\Omega$ -t diagonalizáló új dinamikai változókat. Mivel  $U_q = U_q^*$ , ezek közül csak  $3Nn$  darab független:

$$A_{qj} = \sqrt{\frac{\omega_{qj}}{2}} \sum_{\lambda\alpha} f^*(\mathbf{q}j)_{\lambda\alpha} \left( u_{q\lambda}^z - \frac{1}{i\omega_{qj}} \dot{u}_{q\lambda}^z \right). \quad (22)$$

A további  $3Nn$  változó  $A_{-qj}^+$ -tal egyezik meg. Az inverz összefüggés:

$$u_{q\lambda}^z = \sum_j f(\mathbf{q}j)_{\lambda\alpha} (A_{qj} + A_{-qj}^+) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{qj}}}. \quad (23)$$

Ezek az összefüggések formálisan megegyeznek azokkal, amelyek a harmonikus rács normálkoordinátáit a kitérésekkel kötik össze. Az anharmonicitás miatt azonban az  $\mathbf{f}(\mathbf{q}j)$  polarizációs vektorok és az  $\omega_{qj}$  frekvenciák most függenek a hőmérséklettől. A továbbiakban még egy összefüggésre lesz szükségünk

$$(A_{qj}, A_{q'j'}) = \frac{1}{\omega_{qj}} \delta_{q'q} \delta_{jj'} \quad (24)$$

$$(A_{qj}, A_{q'j'}^+) = 0.$$

A mozgásegyenlet lassan változó része a diagonalizálás után a következő alakú:

$$\frac{dA_{qj}}{dt} - i\omega_{qj} A_{qj} = \tilde{R}_{qj}(t). \quad (25)$$

Ennek alapján  $\omega_{qj}$ -t a fononfrekvenciákkal azonosítjuk.

A termodinamikai stabilitás határához közeledve az  $(u_{q\lambda}^z, u_{q\lambda'}^{z'})$  mátrix egy sajátértéke divergál, azaz valamelyik fonon  $\omega_{qj}$  frekvenciája nullához tart. A rácsrezgések Tani-féle elméletének keretein belül a termodinamikai instabilitásból következik a lágy fononmódus megjelenése. A mozgásegyenlet lassan változó részéhez azonban a fluktuáló rész is adhat járulékot. Közönséges esetekben ezt elhanyagolhatjuk. Ahogy azonban az  $\omega_{qj}$  frekvencia nullához tart, ez a járulék összemérhető lesz  $\omega_{qj}$ -vel, s így az átalakulási pont közvetlen közelében nem hagyhatjuk figyelmen kívül.

A Tani-féle fononelmélet segítségével általánosabb alakban reprodukálhatjuk a Lyddane—Sachs—Teller-relációt [6].

A kitéréseket (23) segítségével kifejezve:

$$(u_{q\lambda}^z, u_{q\lambda'}^{z'}) = \sum_j f(\mathbf{q}j)_{\lambda\alpha} f^*(\mathbf{q}j)_{\lambda'\alpha'} \cdot \frac{1}{\omega_{qj}^2}. \quad (26)$$

Ha valamelyik módus frekvenciája nullához tart, akkor az összegben ez a tag dominál, és

$$\chi^T(\mathbf{q}, \lambda\alpha, \lambda'\alpha') \propto \frac{1}{\omega_{qj}^2} \quad (27)$$



A rács polarizációja legalacsonyabb rendben a kitérések lineáris függvénye:

$$P_q^\alpha = \sum_{\lambda\beta} e_{\lambda}^{\alpha\beta} u_{q\lambda}^\beta / \sqrt{m_\lambda}$$

ahol  $e_{\lambda}^{\alpha\beta}$  az ún. effektív töltés mátrix. (Merev ion közelítésben  $e_{\lambda}^{\alpha\beta} = e_{\lambda} \delta_{\alpha\beta}$ .) A dielektromos szuszceptibilitás

$$\chi_q^{\alpha\beta} = (P_q^\alpha, P_q^\beta)$$

s így, ha a kristály szimmetriája megengedi,

$$\chi_q^{\alpha\beta} \propto \frac{1}{\omega_{qj}^2}. \quad (28)$$

c) Az anharmonikus kölcsönhatások szerepe

Legyen a rács Hamilton-operátora

$$H_0 = \sum_{l\lambda} \frac{p_{l\lambda}^2}{2m_\lambda} + U(\dots \mathbf{R}_{l\lambda} \dots) \quad (29)$$

és tételezzük fel, hogy  $U$  analitikus egy adott szimmetriának megfelelő egyensúlyi konfiguráció körül. A harmonikus részt diagonalizáló  $a_{qj}$  és  $a_{qj}^+$  operátorok segítségével és a

$$B_{qj} = a_{qj} + a_{-qj}^+ \quad (30)$$

jelöléssel  $H_0$  a következő alakú lesz [7]

$$H_0 = \sum_{qj} \omega_{qj} \left( a_{qj}^+ a_{qj} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{q_i j_i} \frac{1}{n!} \Phi(\dots \mathbf{q}_i j_i \dots) B_{q_1 j_1} \dots B_{q_n j_n}. \quad (31)$$

A kitérés—kitérés Green-függvények helyett nyilván vizsgálhatjuk a  $B_{qj}$  normálkoordináták Green-függvényeit. Írjuk föl a

$$G(\mathbf{q}jj', \tau) = -\langle TB_{qj}(\tau) B_{qj'}(0) \rangle \quad (32)$$

hőmérsékleti Green-függvény Dyson-egyenletét:

$$\sum_{j''} [(i\omega_n)^2 - \omega_{qj}^2] \delta_{jj''} - 2\omega_{qj} D(\mathbf{q}jj'', i\omega_n) G(\mathbf{q}jj', i\omega_n) = 2\omega_{qj} \delta_{jj'}, \quad (33)$$

ahol a  $D(\mathbf{q}jj', i\omega_n)$  sajátenergia tartalmazza az anharmonikus potenciálok hatását. Ez az algebrai egyenlet nagymértékben egyszerűsödik, ha a módusok csatolását, azaz a sajátenergia  $jj'$ -ben nemdiagonális elemeit elhanyagoljuk. (Ennek jogosságára nézve l. [8].) Ekkor

$$G(\mathbf{q}jj', i\omega_n) = \frac{2\omega_{qj}}{(i\omega_n)^2 - \omega_{qj}^2 - 2\omega_{qj} D(\mathbf{q}jj, i\omega_n)}. \quad (34)$$

A retardált Green-függvényt a felső félsíkon levő  $i\omega_n$  pontokból való analitikus ki-



terjesztéssel kapjuk. Jelöljük a sajátenergia kiterjesztését  $D(\mathbf{q}jz)$ -vel. Ekkor a gerjesztéseket a

$$z^2 = \omega_{\mathbf{q}j}^2 + 2\omega_{\mathbf{q}j}D(\mathbf{q}jz) \quad (35)$$

egyenlet gyökei adják meg. A dinamikai stabilitás azt kívánja meg, hogy ezek a gyökök az alsó félsíkon legyenek.

Közönséges anyagokban  $\omega_{\mathbf{q}j}^2 > 0$  és a harmonikus frekvencia adja (35) jobb oldalán a lényeges járulékot. A viszonylag kis abszolút értékű sajátenergia a fononok frekvenciáját valamelyest eltolja és élettartamukat végessé teszi. Más anyagoknál egy vagy több  $\omega_{\mathbf{q}j}^2 < 0$ , a rács harmonikus közelítésben instabil, azonban az anharmonicitás elég erős ahhoz, hogy a fonon-pólusokat az alsó félsíkon tartsa.

Egyes anyagoknál érzékeny egyensúly alakul ki. Egy  $T_c$  hőmérséklet fölött az anharmonikus járulékok stabilizálni tudják a rácsot,  $T_c$  alatt azonban erre nem képesek. A megfelelő fonon-pólus a felső félsíkra vándorol, a rács instabil lesz. Sztatikus elmozdulások mennek végbe és az ezekből származó új „erők” fogják stabilizálni a rácsot  $T_c$  alatt.

### III. Landau-elmélet

A fázisátalakulások Landau-elmélete a kristály egy sűrűségfüggvényéből indul ki [9]. Legyen ez például az elektronsűrűség.

Merev ion közelítésben írjuk föl:

$$\varrho_0 = \sum_{l\lambda} \sigma_\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{X}_{l\lambda}), \quad (36)$$

ahol  $\sigma_\lambda$  a  $\lambda$ -ik ion elektroneloszlása.  $\varrho_0$  rendelkezik a kristály összes szimmetriájával. A hőmérséklet kis változásával  $\varrho_0$  is megváltozik. Az elmozdulásokban elsőrendig

$$\Delta\varrho = - \sum_{l\lambda} \nabla\sigma_\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{X}_{l\lambda}) \delta\mathbf{X}_{l\lambda}. \quad (37)$$

Természetesen a  $\delta\mathbf{X}_{l\lambda}$  sztatikus elmozdulásokat is kifejezhetjük normál módusok szerint.

$$\delta\mathbf{X}_{l\lambda} = \frac{1}{\sqrt{Nm_\lambda}} \sum_{\mathbf{q}j} e^{i\mathbf{q}\mathbf{X}_{l\lambda}} \mathbf{e}(\mathbf{q}j)_\lambda Q_{\mathbf{q}j}$$

s így

$$\Delta\varrho = - \sum_{\mathbf{q}j} Q_{\mathbf{q}j} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l\lambda} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{X}_{l\lambda} - \mathbf{r})} \frac{\mathbf{e}(\mathbf{q}j)_\lambda \cdot \nabla\sigma_\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{X}_{l\lambda})}{\sqrt{m_\lambda}} \right\}, \quad (38)$$

$Q_{\mathbf{q}j}$  most a megfelelő normál módus sztatikus komponense.  $\Delta\varrho$ -t olyan függvények szerint fejtettük ki, amelyek  $\varrho_0$  szimmetriacsoportjának irreducibilis ábrázolásai szerint transzformálódnak.

Ha nem történt fázisátalakulás,  $\varrho_0 + \Delta\varrho$  szimmetriacsoportja  $\varrho_0$ -éval egyezik meg. Ekkor csak azok a  $Q_{\mathbf{q}j}$  komponensek különbözhetnek nullától, amelyek a szimmetriacsoportnak lineáris invariánsai. Ezek írják le a hőtágulást. Fázisátalakulás



akkor történik, ha a hőmérsékletváltozás során nem lineáris invariáns, szimmetriát sértő  $Q_{qj}$  komponensek is megjelennek.

A szabad energiát rögzített hőmérsékleten az egyensúlytól való kitérések szerint kifejtjük, a (6), (9) és (20) összefüggések felhasználásával.

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \sum_{qj} \omega_{qj}^2 |Q_{qj}|^2 + \dots \quad (39)$$

[Szigorúan véve,  $Q_{qj}$  most a (20) sajátvektorok szerinti kifejtés együtthatója. A sajátvektorok hőmérsékletfüggésétől azonban eltekinthetünk az átalakulási pont egy környezetében, s így minden normálkoordináta szerinti kifejtés ekvivalens lesz.] Landau föltételezte, hogy szimmetriasértésként egyetlen irreducibilis ábrázolás sajátfüggvényei lépnek fel. Ezt most azzal a föltételezéssel helyettesítjük, hogy egyetlen  $\omega_{qj}$  frekvencia tart nullához. (A normálkoordináták szerinti kifejtésben ugyanis egy irreducibilis ábrázolás többször is előfordulhat.) Eszerint rendparaméterként egy  $\omega_{qj}$  frekvenciához tartozó normál módus sztatikus komponensének amplitúdóját választhatjuk.

$$\eta^2 = \sum |Q_{qj}|^2, \quad (40)$$

ahol az összegzést az  $\omega_{qj}$  frekvenciájú módusokra kell elvégezni. A szabadenergiát a rendparaméter szerint sorbafejtve,  $\eta$  másodrendben szerepel először:

$$F = F_0 + \frac{1}{2} A \eta^2 + \dots \quad (41)$$

A szokásos  $A = a(T - T_c)$  föltételezés esetén, ha a magasabbrendű tagok másodrendű átalakulást engednek meg,  $\eta$  és a  $\chi_\eta$  szuszceptibilitás a következőképpen függ a hőmérséklettől [3]:

$$\begin{aligned} \eta &\propto (T_c - T)^{1/2} & T < T_c \\ \eta &= 0 & T > T_c \\ \chi_\eta &\propto |T - T_c|^{-1}. \end{aligned} \quad (42)$$

A normál módus frekvenciájának hőmérsékletfüggését a Lyddane—Sachs—Teller-reláció segítségével kapjuk meg:

$$\omega_{qj}^2 \propto |T - T_c|. \quad (43)$$

Hogy a rendparamétereknek megfelelő elmozdulásokban az egyes  $Q_{qj}$  koordináták milyen amplitúdóval vesznek részt, azt a szabadenergia sorának magasabbrendű tagjai szabják meg.

Most összefoglaljuk a Landau-elmélet fő következményeit:

a) Az átalakulást egyetlen  $\omega_{qj}^2$  előjelváltozásából származó instabilitás idézi elő. A frekvencia hőmérsékletfüggését (43) adja meg.

b) A szimmetriasértő elmozdulásokat a lágy módus polarizációs vektoraiból építhetjük fel. A kísérletek, mint látni fogjuk, mindkét állítást igazolják.

Bár egyetlen módus lesz instabil, a módusok közötti kölcsönhatások miatt  $\Delta Q$ -ban (és így  $\delta X_{ix}$ -ban is) más irreducibilis ábrázolásokhoz tartozó szimmetria-



sértő elmozdulások is megjelenhetnek. Erre Cochran adott egy egyszerű példát [10]. Legyen a szabadenergia az  $\eta_1$  és  $\eta_2$  paraméterek következő függvénye:

$$F = \frac{1}{2} B_1 \eta_1^2 + \frac{1}{4} C_1 \eta_1^4 + \frac{1}{6} D \eta_1^6 + \frac{1}{2} B_2 \eta_2^2 + H \eta_1^2 \eta_2, \quad (44)$$

ahol  $B_1 \propto (T - T_c)$ , míg a többi állandó a hőmérséklettől független. A szabadenergiát  $\eta_2$  szerint minimalizálva

$$\eta_2 = -\frac{H}{B_2} \eta_1^2.$$

Visszahelyettesítve

$$F = \frac{1}{2} B_1 \eta_1^2 + \frac{1}{4} \left( C_1 - \frac{2H^2}{B_2} \right) \eta_1^4 + \frac{1}{6} D \eta_1^6.$$

Ha  $C_1 > 2H^2/B_2$ , a rendszer másodrendű átalakuláson megy át, miközben

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 = 0 & T > T_c \\ \eta_1 &\propto (T_c - T)^{1/2} & T < T_c \\ \eta_2 &\propto (T_c - T). \end{aligned} \quad (45)$$

Több „rendparaméter” is fölléphet tehát, bár csak egyetlen módus vált instabillá. A szerkezeti átalakulások között bőven találunk ilyen példát.  $\text{SrTiO}_3$ -nál például az elsődleges rendparaméter a  $\mathbf{q} = 2\pi/a(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  hullámszámú instabil módusnak megfelelő elmozdulás, másodlagos rendparaméter pedig a spontán deformáció. Egy érdekesebb példát szolgáltat  $\text{Tb}_2(\text{MoO}_4)_3$ , amelynél a másodlagos rendparaméter a spontán polarizáció.

Külön kell beszélnünk az ún. rugalmassági átalakulásokról [11]. Ez esetben a kristály a homogén deformációkkal szemben instabil, a megfelelő sztatikus válaszfüggvény pedig a rugalmassági állandók mátrixa. A Landau-elmélet szerint az átalakulási pontban a rugalmassági mátrix egy sajátértéke lesz nulla, s a megfelelő rendparaméter egy homogén deformáció. A homogén deformációk szigorúan véve nem normál módusok, azonban az akusztikus módusok a hullámhosszukhoz képest kis tartományon homogén deformációknak tekinthetők. Így a rugalmassági átalakulásokat egy lágy akusztikus módus fogja kísérni, amelynek hangsebessége tart nullához.

#### IV. Instabilitások a fenomenologikus fonon-elméletben

A fenomenologikus fonon-elmélet a magmozgást klasszikusan kezeli. A mozgás potenciálja az elektronok rögzített magkoordináták mellett számolt szabadenergiája [12]. Kis kitérések esetén a potenciál az atomok kitérésének és a cellabeli átlagos elektromos térnek harmonikus függvénye:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l\lambda\alpha \\ l'\lambda'\alpha'}} \Phi_{l\lambda\lambda'}^{\alpha\alpha'} x_{l\lambda}^{\alpha} x_{l'\lambda'}^{\alpha'} + \sum_{\substack{l\lambda\alpha \\ l'\beta}} Z_{l\lambda}^{\alpha\beta} x_{l\lambda}^{\alpha} E_{l'}^{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{l\alpha \\ l'\beta}} \chi_{ll'}^{\alpha\beta} E_l^{\alpha} E_{l'}^{\beta}. \quad (46)$$



Itt  $\Phi_{ll'}^{xx'}$  a rövid hatótávolságú,  $Z_{ll'}^{x\beta}$  az elektromos erőket képviseli,  $\chi_{ll'}^{z\beta}$  pedig a nagyfrekvenciás szuszceptibilitás, amelyhez főleg az elektronok adnak járulékot. A fenomenologikus elmélet elsősorban a  $\mathbf{q}=0$  hullámszámú instabilitások osztályozására alkalmas [13]. Szabad rács esetén a  $\Phi$  potenciál helyett az

$$F = \Phi + \sum_{lx} P_l^x E_l^x$$

szabadenergiát vizsgáljuk.  $P_l^x$  a polarizáció:

$$P_l^x = -\frac{\partial \Phi}{\partial E_l^x}.$$

A szabadenergiát  $P_l^x$  szerint minimalizálva

$$\frac{\partial F}{\partial P_l^x} = E_l^x = 0$$

$F$  akkor minimális, ha az atomok egyensúlyi helyzetükben vannak. Így a visszamaradt

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l\lambda x \\ l'\lambda' x'}} \Phi_{ll'}^{xx'} x_{l\lambda}^x x_{l'\lambda'}^{x'} \quad (47)$$

bilineáris alak pozitív definit kell legyen. Minket a  $\mathbf{q}=0$  hullámszámú instabilitások érdekelnek, elegendő tehát homogén elmozdulásokat tekinteni. Ezek legáltalánosabb alakja

$$x_{l\lambda}^x = \sum_{\beta} u_{\alpha\beta} X_{l\lambda}^{\beta} + u_{\lambda}^x. \quad (48)$$

A kifejezés első tagja a rács homogén deformációjának felel meg, a második tag pedig az elemi cellán belül rendezi át az atomokat. Most olyan eljárást fogunk követni, amely a makroszkopikus állandók levezetésénél általánosan használt [14]. Az

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha})$$

deformációkomponensek és az  $u_{\lambda}^x$  alrács elmozdulások segítségével  $\tilde{F}$  a következő alakra írható:

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \gamma\delta}} S_{\alpha\beta, \gamma\delta} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} - \sum_{\substack{\lambda\alpha \\ \beta\gamma}} C_{\lambda, \beta\gamma}^x u_{\lambda}^x e_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda\alpha \\ \lambda'x'}} C_{\lambda\lambda'}^{xx'} u_{\lambda}^x u_{\lambda'}^{x'}. \quad (49)$$

$S_{\alpha\beta, \gamma\delta}$  a rugalmassági együtthatók szimmetriáival rendelkezik,  $C_{\lambda\lambda'}^{xx'}$  pedig lényegében a  $\mathbf{q}=0$  hullámszámú dinamikus mátrix.

Az alrács elmozdulásokat e mátrix sajátvektorai szerint kifejtve, az utolsó tag diagonális lesz. Végül a deformációs mátrixot hat dimenziós vektorként írjuk föl [2]. Ezek után

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 S_{ij} e_i e_j - \sum_{\sigma=4}^{3n} \sum_{i=1}^6 J_i^{\sigma} e_i v_{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=4}^{3n} \Omega_{\sigma}^2 v_{\sigma}^2. \quad (50)$$

A stabilitás határát akkor ériük el, ha a bilineáris alak determinánsa nulla lesz.



A Gauss-reláció fölhasználásával [12] ez a determináns

$$\left( \prod_{\sigma=4}^{3n} \Omega_{\sigma}^2 \right) \cdot \det \left( S_{ij} - \sum_{\sigma=4}^{3n} \frac{J_i^{\sigma} J_j^{\sigma}}{\Omega_{\sigma}^2} \right). \quad (51)$$

A második tényező a rugalmassági együtthatók  $c_{ij}$  mátrixának determinánsa [14]. A determináns kétféleképpen válhat nullává:

a) a  $c_{ij}$  rugalmassági mátrix egy sajátértéke tart nullához. Ezek az ún. rugalmassági átalakulások. A rendparaméter a megfelelő deformációkomponens.

b) Egy  $\Omega_{\sigma}$  lesz nulla, miközben  $J_i^{\sigma} = 0$ . Ez az ún. optikai átalakulás. A rendparaméter a megfelelő  $v_{\sigma}$  alrács elmozdulás.

Ha  $\Omega_{\sigma} \rightarrow 0$ , de  $J_i^{\sigma} \neq 0$ , akkor a rugalmassági mátrix egy  $c_{ii}$  diagonális eleme  $-\infty$ -hez tart, azaz egy sajátértéke már korábban előjelet váltott. Az alrács elmozdulások renormálják a rugalmas állandókat, és a csökkenő optikai frekvencia rugalmas instabilitásra vezet.

Az  $\Omega_{\sigma}$  frekvenciák (a  $\mathbf{q} = 0$  dinamikus mátrix sajátértékei) nem fonon-frekvenciák, hiszen ezek számításánál figyelembe kell vennünk a  $Z_{ll}^{x\beta}$  effektív töltéseket is. Aubry és Pick [13] azonban bebizonyították, hogy mindig van olyan irány a  $\mathbf{q}$  térben, hogy

$$\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow 0} \omega_{\mathbf{q}j}^2$$

az  $\Omega_{\sigma}^2$  frekvenciák legkisebbikével megegyezik, s így az optikai átmeneteket mindig kíséri lágy módus. Hasonló a helyzet a másodrendű rugalmassági átalakulásoknál is: nullához tart egy meghatározott irányban terjedő hang sebessége.

A fenomenologikus elmélet kapcsolatot tud teremteni az átalakulások jellege és a kiválasztási szabályok között. Például a dielektromos szuszceptibilitás [13]

$$\chi^{z\beta}(\omega) = \chi^{z\beta} + \sum_{\sigma=4}^{3n} \frac{Y_{\alpha}^{\sigma} Y_{\beta}^{\sigma}}{\Omega_{\sigma}^2 - \omega^2}$$

ahol  $Y_{\alpha}^{\sigma}$  az effektív töltés mátrixelemek egy lineáris kombinációja. Ferroelektromos átalakulásoknál  $\chi^{z\beta}(\omega=0)$  divergens. Ez csak úgy lehetséges, ha a lágy módusra nézve a szimmetria nem tiltja az infravörös abszorpciót, azaz

$$Y_{\alpha}^{\sigma} \neq 0.$$

## V. Konkrét átalakulások

### a) Bevezetés

A kísérleti vizsgálatok első célja a rácsdinamikai instabilitások alapvető következményeinek igazolása volt, azaz választ kellett adni a következő kérdésekre:

a) kíséri-e lágy fonon módus a szerkezeti átalakulást?

b) van-e összefüggés a lágy fonon polarizációs vektora és a szimmetriasértő sztatikus elmozdulások között?



- c) a kritikus hőmérséklet közvetlen környékétől eltekintve érvényesül-e a Landau-elmélet által megjósolt

$$\omega^2 \propto |T - T_c|$$

összefüggés?

- d) ferroelektromos anyagoknál, amiknél a szuszceptibilitás jól mérhető, teljesül-e a Lyddane—Sachs—Teller-reláció?

A főleg neutronszórással végzett mérések a fenti kérdésekre pozitív választ adtak. Csak ezután kerülhetett sor a kritikus tartomány vizsgálatára. Ezt a legkönnyebben olyan anyag magashőmérsékleti fázisán lehet elvégezni, amelynek kritikus hullámszáma nem nulla, hiszen ilyenkor a rugalmatlan szórási kísérletek kiértékelését nem zavarja központi Bragg-csúcs. Ilyen anyag a  $\text{SrTiO}_3$  kristály.

A továbbiakban vázlatosan áttekintünk néhány szerkezeti átalakulást, amelynek vizsgálata hozzájárult az alapkérdések tisztázásához. Ezután részletesen tárgyaljuk a jelenleg legjobban ismert  $\text{SrTiO}_3$ , és a hozzá hasonló  $\text{KMnF}_3$  és  $\text{LaAlO}_3$  kristályok fázisátalakulását. Ezek azon a kristályok, amelyekben már megkezdődött a kritikus tartomány vizsgálata is.

#### b) Ferroelektromos perovszkitok

$\text{BaTiO}_3$  [15] ( $T_c = 403^\circ\text{K}$ ),  $\text{KNbO}_3$  [16] ( $T_c = 708^\circ\text{K}$ ) és  $\text{PbTiO}_3$  [17] ( $T_c = 765^\circ\text{K}$ ) az átalakulási pont fölött köbös, alatta tetragonális szerkezetű. Az átalakulás elsőrendű, egy  $\mathbf{q} = 0$  hullámszámú lágy optikai módus kíséri.  $\text{BaTiO}_3$  és  $\text{KNbO}_3$  esetében a módus erősen anizotrop, túlcillapított.  $\text{PbTiO}_3$  sztatikus elmozdulásai és a lágy módus polarizációs vektorai jól egyeznek. A lágy módus frekvenciája a Landau-elméletnek megfelelően változik a hőmérséklettel.

#### c) Majdnem ferroelektromos perovszkitok

$\text{SrTiO}_3$  [18], [19] és  $\text{KTaO}_3$  [20] dielektromos állandója  $50^\circ\text{K}$  fölött Curie—Weiss törvényt követ

$$\epsilon_0 \propto \frac{1}{T - T_c}$$

( $\text{SrTiO}_3$ :  $T_c = 38^\circ\text{K}$ ,  $\text{KTaO}_3$ :  $T_c = 4^\circ\text{K}$ ).  $50^\circ\text{K}$  alatt a dielektromos állandó növekedése lassul és véges értékű  $T = 0^\circ\text{K}$ -on is. A ferroelektromos átalakulás elmarad.  $\epsilon_0$  növekedését egy  $\mathbf{q} = 0$  hullámszámú optikai fonon frekvenciájának csökkenése kíséri. A Lyddane—Sachs—Teller-reláció mindkét anyagnál jól teljesül  $0^\circ\text{K}$  és szobahőmérséklet között. A lágy módus gyengén csillapított és izotrop.

#### d) Egyéb átalakulások

$\text{Tb}_2(\text{MO}_4)_3$  [21]  $160^\circ\text{C}$  fölött tetragonális szerkezetű, az alacsony hőmérsékletű fázis ortorombos és ferroelektromos. Az átalakulás elsőrendű. A spontán polarizáció csak másodlagos rendparaméter, a fázisátalakulást egy  $\mathbf{q} = 2\pi/a$  ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ ) hullámszámú módus instabilitása okozza. Ez felel meg a sztatikus elmozdulásnak is. A frekvencia hőmérsékletfüggése a Landau-elméletnek megfelelő.

$\text{Nb}_3\text{Sn}$  [22] szerkezete  $45^\circ\text{K}$ -on köbösről tetragonálissá változik. Rugalmassági átalakulás, a hangsebesség nullára csökken a  $[1, 1, 0]$  irányban.



Az egyfononos neutronszerzés hatáskeresztmetszetében a fononcsúcsokon kívül egy centrális csúcs jelenik meg, amelynek intenzitása erősen növekszik, ahogy a kritikus hőmérséklethez közeledünk.  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  esetében ezt a csúcsot a kritikus módus termikus fononpárokkal való kölcsönhatása okozhatja [22]. Hasonló jelenséggel találkozottak  $\text{SrTiO}_3$  105 °K-os fázisátalakulásánál is, ott a centrális csúcs szerepére részletesebben kitérünk.

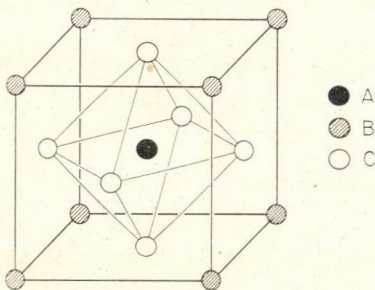
A kvarc kristály [23]  $\text{SiO}_4$  tetraéderekből épül föl. Két változata van:  $T_c = 573^\circ\text{C}$  fölött hexagonális ( $\beta\text{-SiO}_2$ ), alatta trigonális ( $\alpha\text{-SiO}_2$ ). A  $180^\circ$ -os forgási szimmetriát a  $\text{SiO}_4$  tetraéderek elfordulása miatt veszti el. Az elemi cella mérete nem változik, ennek megfelelően az átalakulást egy  $q=0$  hosszuhullámú optikai fonon instabilitása okozza. A módus infravörös abszorpcióban nem aktív, így az  $\alpha\text{-SiO}_2$  nem ferroelektromos. Az átalakulás határozottan elsőrendű, de a rendparaméter hőmérséklet-függése és a nagy fajhőanomália a fluktuációk fokozott szerepére utal [24].

e)  $\text{SrTiO}_3$ ,  $\text{LaAlO}_3$ ,  $\text{KMnF}_3$

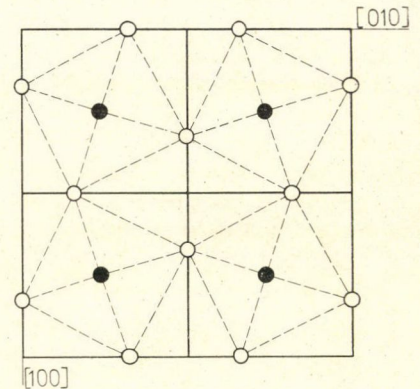
A magas hőmérsékleti fázisban mindhárom vegyület köbös perovszkit szerkezetű. ( $\text{ABO}_3$ , l. 1. ábra.) Az A-típusú atomok egy kocka csúcsain helyezkednek el, ennek középpontjában van a B típusú atom, s a lapközepekre illeszkedik az oxigén atomokból fölépített oktaéder.

$\text{SrTiO}_3$  szerkezete 99–107 °K között tetragonális lesz, tércsoportja  $I4/mcm$ . Az átalakulási hőmérséklet mintánként változó.

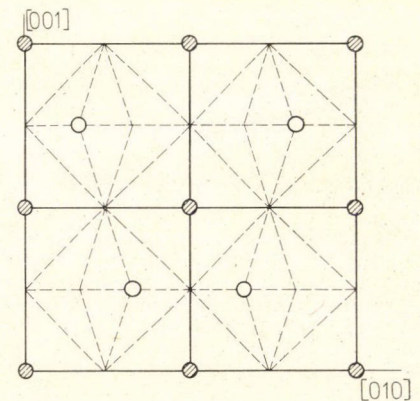
A  $\text{Ti}^{4+}$  helyére tett  $\text{Fe}^{3+}$  ionok anizotrop EPR spektrumában a vonalak eltolódását olyan sztatikus elmozdulásokkal sikerült megmagyarázni, amelyek az oktaédereknek az egyik 4-fogású tengely körüli elfordulásából építhetők föl [25]. Mivel az oxigén atom két oktaéderhez tartozik, a forgástengelyre merőleges síkban a szomszédos cellákban a forgás ellentétes értelmű (l. 2a ábra). A kísérletek szerint ez a helyzet a forgástengellyel párhuzamos irányban is (2b ábra).



1. ábra



2a ábra



2b ábra



A kristály három négyfogású tengely közül választhatja ki az elfordulás tengelyét. A három eset egymás között a  $\Gamma_{25}$  irreducibilis ábrázolás szerint transzformálódik. A sztatikus elmozdulások

$$u_{I\lambda} = u_{\lambda} e^{iq_R X_I}$$

alakba írhatók, ahol

$$q_R = \frac{2\pi}{a} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

a köbös Brillouin-zóna  $[1, 1, 1]$  irányban levő sarka, az ún.  $R$ -pont. Az átalakulási hőmérséklet alatt a kristályban a  $q_R$  hullámszámnak megfelelő ismétlődés is jelen van, azaz az  $R$ -pont is reciprokrács-pont. A rugalmas szórásban megjelenik a neki megfelelő Bragg-reflexió [26].

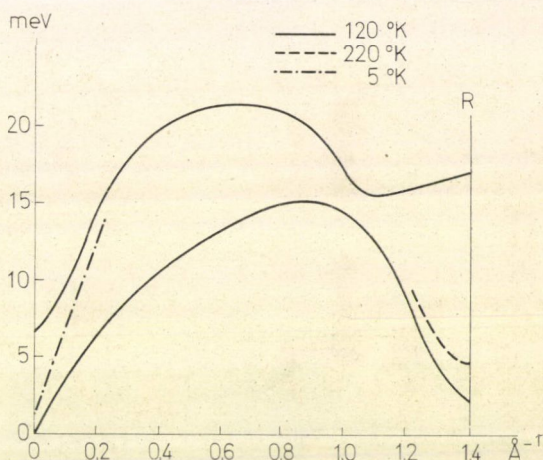
Az elmélet jóslatainak megfelelően az átalakulást egy  $q_R$  hullámszámú lágy módus kíséri. A 3. ábra a két legalacsonyabb frekvenciájú transzverzális fononmódus diszperziós görbéit mutatja az  $[1, 1, 1]$  irányban, az átalakulási hőmérséklet fölött. Az akusztikus ág a Brillouin-zóna határán erősen hőmérséklettől függő, ez a módus okozza a rács instabilitását. A módus háromszorosan degenerált.

A polarizációs vektorokat ez esetben még nem mérték meg, így csak közvetett bizonyítékaink vannak arra, hogy a sztatikus elmozdulásokat a polarizációs vektorok határozzák meg. (Pl. Cowley modellszámításai [19].)

KMnF<sub>3</sub> több átalakuláson is átmegy. 186 °K alatt tetragonális lesz, tércsoportja megegyezik SrTiO<sub>3</sub> tércsoportjával, s az átalakulást itt is a háromszorosan degenerált  $R$ -pontbeli lágy módus kíséri [27]. Ezért ezt az átalakulást SrTiO<sub>3</sub>-éval izomorfnek tekinthetjük, annak ellenére, hogy a Bragg-reflexió hirtelen eltűnése elsőrendű fázisátalakulásra mutat [30]. 91,5 °K hőmérsékleten KMnF<sub>3</sub> monoklin szerkezetű lesz. Ezért az átalakulásért valószínűleg egy  $q_M = 2\pi/a (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  hullámszámú  $M_2$  szimmetriájú instabil fononmódus a felelős. Végül 88 °K-on áthaladva antiferromágneses rend alakul ki.

LaAlO<sub>3</sub> átalakulási hőmérséklete 797 °K. Ez alatt romboéderes, tércsoportja  $R\bar{3}c$ . Sztatikus elmozdulásai szintén az oxigén oktaéderek forgásaiból építhetők fel, de a forgástengely most a kocka testátlója [28]. Az átalakulásért most is az  $R$ -pont  $\Gamma_{25}$  módusa a felelős [29].

A  $\Gamma_{25}$  kritikus módus az átalakulási ponthoz közeledve túlszillapított lesz, s a neutron szórási hatáskeresztmetszet maximuma az  $\omega=0$ -ba tolódik. Ezért a fononfrekvenciák csak a szórt intenzitás profilanalízise segítségével határozhatók meg.



3. ábra



Ha a neutron által leadott impulzust rögzítjük, az egyfonon szórás intenzitásának energia szerinti eloszlását a dinamikus formfaktor adja meg, amely általában a következő alakba írható [30], [31]:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \text{Im} \chi^D(\omega) \quad (52)$$

$$\chi^D(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma(\omega)}. \quad (53)$$

Itt  $\omega_0$  a vizsgált módus Tani-féle frekvenciája,  $\Gamma(\omega)$  frekvenciafüggő csillapítás.

Ha  $kT \gg \hbar\omega_0$  (ez az átalakulási pont környékén jól teljesül) és  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega\Gamma(\omega) = 0$ ,  $S(\mathbf{q}, \omega)$  egyszerű összesszábatlyt elégít ki:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{q}, \omega) d\omega = \frac{kT}{\omega_0^2}, \quad (54)$$

s így az integrált intenzitás

$$I_{\text{int}} \propto \frac{kT}{\omega_0^2}. \quad (55)$$

Ennek figyelembevételével mérték meg a  $\Gamma_{25}$  fonon frekvenciájának hőmérsékletfüggését az átalakulási pont fölött.

Mindhárom kristályban  $\omega_0^2$  a Landau-elméletnek megfelelően változott [26], [27], [29], [30]:

$$\omega_0^2 \propto T - T_0$$

az

$$\epsilon = \frac{T - T_c}{T_c} > 10^{-1}$$

tartományban.  $T_0$  néhány fokkal nagyobb, mint az átalakulási hőmérséklet.

$T_c$  alatt a mérések kevésbé gondosak. Az  $R$ -pont reciprokrácspontra, s a kritikus szórás nehéz leválasztani a rugalmas Bragg-csúcsról. A kritikus módus két ágra szakad, s mindkettő frekvenciája a Landau-elmélet szerint változik [26], [32].

Rendparaméternek az oktaéderek sztatikus elfordulási szögét tekinthetjük. Ezt a szöget  $\text{SrTiO}_3$ -ban és  $\text{LaAlO}_3$ -ban EPR segítségével igen pontosan lehet mérni [33]. A hőmérséklettől való függés szerint két tartományt találtak. A viszonylag széles Landau-tartományban ( $0,3 > |\epsilon| > 0,1$ ) az elfordulás szöge

$$\varphi \propto |\epsilon|^{1/2}$$

szerint változik. Az átalakulási hőmérséklethez közel ( $5 \cdot 10^{-2} > |\epsilon| > 5 \cdot 10^{-3}$ ) a rendparaméter

$$\beta \sim \frac{1}{3}$$

kitevővel tart nullához. (Az illesztett kitevő  $\text{SrTiO}_3$  esetén  $\beta = 0,33 \pm 0,02$ ).



A kritikus tartományon kívüli viselkedésről már az elemi Landau-elmélet is számot tud adni [34]. Legyen  $x, y, z$  az egyes tengelyek körüli elfordulások amplitúdója. A kristály szabadenergiáját sorbafejtjük az elemi elfordulások szerint. A köbös szimmetria figyelembevételével

$$\Delta F = \frac{1}{2} a(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{4} b(x^4 + y^4 + z^4) + \frac{1}{2} c(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2). \quad (56)$$

Mint mindig,

$$a = a'(T - T_c),$$

míg  $b$  és  $c$  a hőmérséklettől független állandók. A legvalószínűbb  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  értékeket  $F$  minimalizálásával kapjuk meg. A fonon frekvenciák pedig (20) szerint az  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  helyen képzett

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \text{stb.} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeivel lesznek egyenlők.  $T > T_c$  esetén

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$$

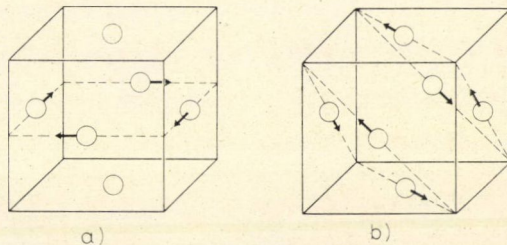
$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = a.$$

Ez a köbös szimmetriának felel meg. A  $T_c$  alatti stabil ( $\omega_i^2 > 0$ ) megoldásokat az alábbi táblázat foglalja össze:

I. $c > b > 0$	$\bar{x} = \bar{y} = 0 \quad \bar{z}^2 = \frac{ a }{b}$	$\omega_1^2 = 2 a $ $\omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{c-b}{b}  a $
II. $c < b$ $-2c < b$	$\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \frac{ a }{b+2c}$	$\omega_1^2 = 2 a $ $\omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{2(b-c)}{b+2c}  a $

Az I. megoldás tetragonális elmozdulásoknak felel meg, azaz  $\text{SrTiO}_3$  és  $\text{KMnF}_3$  átalakulását írja le. (4a ábra.) A II. megoldás esetében az oktaéderek a kocka átlója körül fordulnak el, ez  $\text{LaAlO}_3$ -nak felel meg. A normál módus  $T_c$  alatt két ágra szakad, és mind a frekvenciák, mind a rendparaméter  $|T - T_c|^{1/2}$ -nel arányos. A sztatikus elmozdulás mindkét esetben a szinglett ág polarizációs vektorával arányos.

$\text{SrTiO}_3$ -on végzett gondos rács-állandó mérések [35] arra mutattak, hogy az elmozdulások nem egyedül az oktaéder elfordulásából származnak, hanem egy tetragonális deformáció is föllép: az oktaéder a



a)

b)

4. ábra



forgástengely irányában megnyúlik. Ez a deformáció is szimmetriasértő elmozdulásokat jelent, és a Landau-elméletben mint másodlagos rendparamétert kell figyelembe vennünk. A rendparaméter és a deformációk csatolása a fent kapott képet lényegében nem változtatja meg, s a Landau-elmélet így számot tud adni a spontán deformációról és kevesebb sikerrel a rugalmas állandók anomáliájáról is [36].

Ha a mikroszkopikus elméletben a rendparaméter fluktuációiról is számot akarunk adni, meg kell engednünk az egyes elemi cellákban az oktaéderek tetszőleges elfordulását. Az  $l$ -edik cella oktaéderének elfordulását a  $\varphi_l$  vektorral jellemezzük, amelynek komponensei a 4-fogású tengelyek körüli elemi elfordulások szögeit adják meg. Ez lesz a rendparaméternek megfelelő mikroszkopikus változó. Egy oxigén atom két elemi cellához tartozik s így elmozdulását

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_l - \mathbf{X}_{l'}) \times (\boldsymbol{\varphi}_l - \boldsymbol{\varphi}_{l'}) \quad (57)$$

alakba írhatjuk. Ha minden oktaéder fázisban forog ( $\boldsymbol{\varphi}_l = \boldsymbol{\varphi}_{l'}$ ) az oxigén atomok nem mozdulnak el. Bevezethetjük  $\boldsymbol{\varphi}_l$  Fourier-komponenseit

$$\boldsymbol{\varphi}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{-iq\mathbf{X}_l} \boldsymbol{\varphi}_l. \quad (58)$$

A sztatikus elmozdulásnak csak  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_R$  komponense van.

Az átalakulás jó leírását várhatjuk egy olyan modelltől, amely dinamikai változóként csak a  $\boldsymbol{\varphi}_l$  forgásokat, a lokalizált  $e_{\alpha\beta}(l)$  deformációkomponenseket és a hozzájuk konjugált impulzusokat veszi figyelembe. Feder és Pytte [37] konstruáltak ily módon egy modell-Hamilton-operátort, amit molekuláris tér közelítésben értékelték ki. A modell fázisátalakulása másodrendű és az átalakulási pont környezetében

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\mathbf{q}_R} \rangle^2 &\propto |T - T_c| \\ \omega_{\mathbf{q}_R}^2 &\propto |T - T_c| \end{aligned} \quad (59)$$

annak megfelelően, hogy a molekuláris tér közelítés a Landau-elmélettel ekvivalens. A modell nagyságrendre helyesen ad vissza minden mérési eredményt, annak ellenére, hogy paramétereit a kísérletek túlhatározzák. A  $\mathbf{q}_R$  módus csillapítása csak a deformációkkal való kölcsönhatásból adódik, s kritikus viselkedést nem mutat [38].

SrTiO<sub>3</sub>-on és KMnF<sub>3</sub>-on végzett újabb nagy fölbontású neutronszerzési kísérletek szerint a dinamikus formfaktorban a megszokott, lágy módusnak megfelelő csúcsok mellett egy éles centrális rezonancia jelenik meg  $\omega=0$ -ban, amely uralkodóvá válik, ahogy  $T \rightarrow T_c^+$  [30], [39].

A mért intenzitás eloszlások az átalakulási pont fölött jól adhatók vissza, ha feltételezzük, hogy  $\Gamma(\omega)$ -nak pólusa van a képzetes tengelyen,  $\omega=0$  közelében [30], [31]:

$$\Gamma(\omega) = \frac{ib^2}{\omega + i\gamma} + \sigma. \quad (60)$$

Az erre a  $\Gamma(\omega)$ -ra alapozott elemzés fenomenologikus, mivel mikroszkopikus eredete jelenleg még nem tisztázott. Pillanatnyilag ez az alacsony frekvenciás fononbomlási folyamat a SrTiO<sub>3</sub>-tal kapcsolatos elméleti erőfeszítések fő célpontja.



$\Gamma(\omega)$  (60) alakja mellett  $\chi^D(\omega)$ -nak három pólusa van, ez elegendő is a három púpú intenzitáseloszláshoz. A  $\gamma^2 \ll b^2$ ,  $\gamma\sigma \ll b^2$  feltételek mellett  $\chi^D(\omega)$  pólusait közelítőleg a következő egyenlet határozza meg [31]:

$$\left( \omega + i\gamma \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} \right) \left[ \omega^2 + i \left( \sigma + \frac{\gamma b^2}{\omega_\infty^2} \right) \omega - \omega_\infty^2 \right] = 0. \quad (61)$$

Itt  $\omega_\infty^2 = \omega_0^2 + b^2$ . Két pólus a képzetes tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el, ezek a lágy módusoknak felelnek meg. A harmadik pólus a képzetes tengelyen van, ő felelős a centrális rezonanciáért. Az  $\omega_0$  Tani-féle frekvenciát esetünkben a következő kifejezés adja meg:

$$\omega_0^2 = [\Theta(\varphi_{q_R}^z, \varphi_{q_R}^z)]^{-1} = \chi^T(\mathbf{q}_R, \alpha, \alpha)^{-1} \quad (62)$$

ahol  $\Theta$  az oktaéderek tehetetlenségi nyomatéka. (Az elmozdulásokat a normálkoordinátákkal kapcsolódó (2) összefüggésben szerepel a  $\sqrt{m_\lambda}$  szorzó. Az elfordulások tehetetlenségét nyilván az oktaéderek tehetetlenségi nyomatéka jellemzi, innen a  $\Theta$  tényező [31].)

$kT \gg \hbar\omega_0$  mellett a centrális csúcs járuléka az integrált intenzitásban

$$I_c \propto kT \frac{b^2}{\omega_\infty^2 \omega_0^2},$$

míg a lágy módusé

$$I_s \propto kT \frac{1}{\omega_\infty^2}.$$

A centrális rezonancia léte önmagában nem kritikus jelenség. Azonban az átalakulási ponthoz közeledve  $\omega_0^2 \rightarrow 0$ , s így a centrális rezonancia súlya egyre nő.  $I_s$  mindig korlátos marad ( $\omega_\infty^2 \rightarrow b^2$ ), az integrált intenzitás divergenciája a centrális csúcsban jelentkezik. Az 5. ábrán berajzoltuk  $\chi^D(\omega)$  pólusainak mozgásirányát is. Az instabilitást ebben a fenomenologikus modellben az okozza, hogy a képzetes tengelyen levő

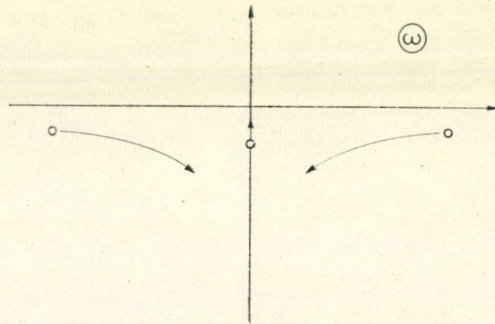
$$\omega_1 = -i\gamma \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}$$

pólus a felső félsíkra vándorol.

A fenti fenomenologikus formfaktor kielégítően sikerült illeszteni a  $\text{SrTiO}_3$ -on mért intenzitáseloszlásokhoz [30]. Minket most elsősorban  $\omega_0^2$  hőmérsékletfüggése érdekel, hiszen ez a rendparaméter sztatikus szuszceptibilitásával arányos. Az  $\epsilon > 0,1$  tartományban  $\omega_0^2$  a hőmérséklet lineáris függvénye, a korábbi mérésekkel összhangban. Az átalakulási ponthoz tovább közeledve

$$\omega_0^2 \propto \epsilon^?$$

hatványviselkedést várunk. A neutron szórási kísérletekben egyelőre nem érhető el



5. ábra



olyan fölbontás, ami  $\gamma$  pontos meghatározását lehetővé tenné. Csak körülhatárolni lehet: az  $1,3 \cdot 10^{-3} < \epsilon < 10^{-1}$  tartományban

$$1,5 < \gamma < 2,5,$$

ami határozottan nagyobb, mint a Landau-elmélet által jósolt  $\gamma=1$  kitevő.

A fázisátalakulás dinamikájának további vizsgálatát teszi lehetővé, hogy a  $\text{Fe}^{3+} - \text{V}_0$  centrum ( $\text{Fe}^{3+}$  a  $\text{Ti}^{4+}$  ion helyén, s mellette egy oxigén hiányhely) EPR spektruma igen érzékeny  $\varphi_i$  lokális fluktuációira [40]. A  $\Delta H$  vonalszélesség a  $\chi^T(\mathbf{q}, \alpha\alpha)$  sztatikus szuszeptibilitással hozható kapcsolatba, amelynek Ornstein—Zernike típusú alakot föltételezünk:

$$\chi^T(\mathbf{q}, \alpha\alpha) = \frac{\chi_0}{[k^2 - (1 - \Delta)k_x^2 + \kappa^2]^{1+\eta/2}} \quad (63)$$

$\mathbf{k} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_R$ , és  $\kappa$  a korrelációs hossz inverze,  $\kappa = \kappa_0 \epsilon^\nu$ . A forgástengellyel párhuzamos irányban sokkal gyengébb a korreláció az elfordulások között, mint a rá merőleges síkban. Ezt fejezi ki a  $-(1 - \Delta)k_x^2$  anizotropia tag. A szuszeptibilitás (63) alakjával [41]

$$\Delta H \propto (\kappa^{-(1-2\eta)/\sqrt{\Delta}}) \arctg \left( \frac{\pi \sqrt{\Delta}}{\kappa a} \right)$$

Az EPR mérések szerint [40]:

$$\nu = 0,63 \pm 0,07$$

$$\Delta = 0,017 \pm 0,010$$

$$\eta = 0 \quad \text{a mérési hibán belül.}$$

$\Delta$ -ra egynél jóval kisebb érték adódott. Eszerint a forgástengelyre merőleges irányban a korreláció kb. 60-szor erősebb mint a tengellyel párhuzamosan.

Schwabl [41] az akusztikus fonon-oktaéder forgás csatolást figyelembe véve, megbecsülte a longitudinális ultrahang csillapításának kritikus viselkedését. A [100] irányra vonatkozóan

$$\alpha(\omega) \propto \omega^n \epsilon^{-q},$$

ahol  $q = \nu(2 - \eta)$  és  $n=2$ .  $\nu$  és  $q$  EPR-rel mért értékeivel

$$q = 1,26 \pm 0,14.$$

A csillapítás mérések most az elmélet próbájául szolgálhatnak. A kísérletek [42] a  $3 \cdot 10^{-2} > |\epsilon| > 9 \cdot 10^{-3}$  tartományban a következő kitevőket szolgáltatják:

$$n = 1,9 \pm 0,15$$

$$q = 1,25 \pm 0,1$$

az elméleti eredményekkel teljes összhangban.

A kritikus exponensek eddig mért értékei ( $\beta \sim \frac{1}{3}$ ,  $\nu \sim \frac{2}{3}$ ,  $\eta \sim 0$ ,  $\gamma > 1,5$ ) jól egyeznek azzal, amit az univerzalitás alapján várunk [3].



Az eddigi elméleti és kísérleti vizsgálatok főleg a  $T > T_c$  tartományra szorítkoztak. A neutron szórásnál elérhető fölbontás nem elegendő ahhoz, hogy az átalakulási pont alatt a kritikus szórás le lehessen választani a megjelenő Bragg-csúcsról. Több eredményt várhatunk a jobb fölbontású rugalmatlan röntgen-szórástól, Raman-szórástól és a lokális fluktuációkra is érzékeny EPR vizsgálatoktól. Elméleti szempontból az bonyolítja a problémát  $T_c$  alatt, hogy figyelembe kell venni az energiasűrűség és a rendparaméter fluktuációinak csatolódását is. Igen szoros hasonlóság van az antiferromágnesek és  $\text{SrTiO}_3$  között. A mágnesezettségnek most a  $\Phi_i$  elfordulásvektorok felelnek meg, amelyek várható értéke a rendezett fázisban cellánként előjelet vált. Remélhetjük, hogy az antiferromágnesek analógiájára a  $|\mathbf{q} - \mathbf{q}_R| \ll \pi$  tartományban végzett hidrodinamikai elemzés az átalakulás dinamikájának jobb megértéséhez fog vezetni.

## IRODALOM

1. P. W. Anderson, Proceedings of the Conference on the Physics of Dielectrics, Academy of Sciences, Moscow, 1958. p. 290.  
W. Cochran, Phys. Rev. Letts., 3, 412, 1959.
2. M. Born, K. Huang, Dynamical Theory of Crystal Lattices, Oxford Press, 1954.
3. L. P. Kadanoff et al., Revs. Mod. Phys., 39, 395, 1967.
4. T. Schneider, G. Srinivasan, C. P. Enz, Phys. Rev., A5, 1528, 1972.
5. H. Mori, Progr. Theor. Phys., 34, 399, 1965.
6. K. Tani, J. Phys. Soc. Jap., 29, 594, 1970.
7. L. J. Sham, Phys. Rev., 139, A 1189, 1965.
8. A. A. Maradudin, A. E. Fein, Phys. Rev., 128, 2589, 1962;  
R. A. Cowley, Phil. Mag., 11, 673, 1965.
9. C. Haas, Phys. Rev., 140, A 863, 1965.  
W. Cochran, A. Zia, Phys. Stat. Solidi, 25, 273, 1968.
10. W. Cochran, International School of Physics "Enrico Fermi" 1971.
11. N. Boccara, Ann. Phys., 47, 40, 1968.
12. R. M. Pick, Adv. Phys., 19, 269, 1970.  
R. M. Pick, M. H. Cohen, R. M. Martin, Phys. Rev. B1, 910, 1970.
13. S. Aubry, R. Pick, Journal de Physique, 32, 657, 1971.
14. W. Ludwig, Recent Developments in Lattice Theory, Springer Tracts in Modern Physics, 43.
15. Y. Yamada, G. Shirane, A. Linz, Phys. Rev., 177, 848, 1969.  
G. Shirane, J. D. Axe, J. Harada, A. Linz, Phys. Rev. B2, 3651, 1970.  
J. Harada, J. D. Axe, G. Shirane, Phys. Rev. B4, 155, 1971.
16. A. C. Nunes, J. D. Axe, G. Shirane, preprint, BNL 15 604
17. G. Shirane, J. D. Axe, J. Harada, J. P. Remeika, Phys. Rev. B2, 155, 1970.
18. Y. Yamada, G. Shirane, J. Phys. Soc. Jap., 26, 396, 1969.
19. R. Cowley, Phys. Rev., 134, A, 981, 1964.
20. G. Shirane, R. Nathans, V. J. Minkiewicz, Phys. Rev., 157, 396, 1967.  
J. D. Axe, J. Harada, G. Shirane, Phys. Rev., B3, 1227, 1970.
21. J. D. Axe, G. Shirane, B. Dorner, Phys. Rev. Letts., 26, 519, 1971.
22. G. Shirane, J. D. Axe, Phys. Rev. Letts., 27, 1803, 4971.
23. J. D. Axe, G. Shirane, Phys. Rev. B1, 342, 1970.
24. U. T. Höchli, J. F. Scott, Phys. Rev. Letts., 26, 1627, 1971.
25. H. Unoki, T. Sakudo, J. Phys. Soc. Jap., 23, 546, 1967.
26. G. Shirane, Y. Yamada, Phys. Rev., 177, 858, 1969.
27. V. J. Minkiewicz, G. Shirane, J. Phys. Soc. Jap., 26, 674, 1969.  
V. J. Minkiewicz, Y. Fujii, Y. Yamada, J. Phys. Soc. Jap., 28, 443, 1970.  
K. Gesi, J. D. Axe, G. Shirane, A. Linz, Phys. Rev., B5, 1933, 1972.
28. K. A. Müller, W. Berlinger, J. C. Slonczewski, Phys. Rev. Letts., 25, 734, 1970.
29. J. D. Axe, G. Shirane, K. A. Müller, Phys. Rev., 183, 820, 1969.
30. S. M. Shapiro, J. D. Axe, G. Shirane, T. Riste, preprint, BNL 16 964
31. F. Schwabl, Z. Physik. 254, 57, 1972.



32. *J. F. Scott*, *Phys. Rev.*, **183**, 823, 1969.
33. *K. A. Müller, W. Berlinger*, *Phys. Rev. Letts.*, **26**, 13, 1971.
34. *H. Thomas, K. A. Müller*, *Phys. Rev. Letts.*, **21**, 1256, 1968.
35. *B. Alefeld*, *Z. Physik*, **222**, 155, 1969.
36. *J. C. Slonczewski, H. Thomas*, *Phys. Rev.*, **B1**, 3599, 1970.
37. *E. Pytte, J. Feder*, *Phys. Rev.*, **187**, 1077, 1969.  
*Phys. Rev.*, **B1**, 4803, 1970.
38. *E. Pytte*, *Phys. Rev.*, **B1**, 924, 1970.
39. *T. Riste, E. J. Samuelsen, K. Otnes, J. Feder*, *Solid State Commun.*, **9**, 1455, 1971.
40. *Th. von Waldkirch, K. A. Müller, W. Berlinger, H. Thomas*, *Phys. Rev. Letts.*, **28**, 503, 1972.
41. *F. Schwabl*, *Phys. Rev. Letts.*, **28**, 500, 1972.
42. *B. Berre, K. Fossheim, K. A. Müller*, *Phys. Rev. Letts.*, **23**, 589, 1969.



# GRAVITÁCIÓ ÉS MAKROSZKOPIKUS TESTEK KVANTUMMECHANIKÁJA\*

KÁROLYHÁZY FRIGYES

Elméleti Fizikai Intézet, ELTE Budapest

## TARTALOMJEGYZÉK

I. Bevezetés .....	23
II. Kvantummechanika .....	27
1. A viták hevessege .....	27
2. Méréselmélet .....	28
III. Téridő és kvantummechanika .....	33
1. Az abszolút tér .....	33
2. A téridő szerkezetének határozatlansága .....	35
3. A hullámfüggvény propagációja .....	39
4. Szétfolyás és redukció .....	42
IV. Makroszkopikus testek mozgása .....	50
1. Brown-mozgás és koherencia .....	50
2. A súlypont maximális szórása .....	54
3. Anomális Brown-mozgás .....	61
V. Termikus zaj és a szuperpozíció szétesése .....	64
1. Szubmakroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciója .....	64
2. Koordinátaválasztás és cellabeosztás .....	68
3. A hullámfüggvény viselkedése .....	71
4. A szuperpozíció szétesése .....	75
5. Diskusszió .....	80
VI. Befejezés .....	83

## I. Bevezetés

1. A kvantummechanika ismeretelméleti nehézségeivel kapcsolatos viták az elmélet megszületése óta egy pillanatra sem csitultak el, sőt az utolsó tíz évben reneszánszukat élik.

Szélsőséges fogalmazással a pólusokat a következő két álláspont képviseli.

a) Az elmélet *rossz*. (Logikailag hibás vagy hiányos).

b) Az elmélet kifogástalan.

A vita így meddő, eldöntésére nincs gyakorlati kritérium. Egyik álláspont sem ösztönöz kritikus kísérletekre. b) nyilván nem, de a) sem. Ha az elmélet *alapvetően* hiányos, akkor minden új koncepció *alapvetően*, tehát már az elemi mikrojelenségek szintjén eltérő és kísérletileg rögtön ellenőrizhető következtetésekre kell, hogy vezessen. Márpedig a mikrojelenségek világában a kvantummechanika kitűnő eredményekre vezet.

\* Doktori értekezés, 1972.



2. A rendelkezésünkre álló tapasztalati anyag elfogulatlan analízise azt mutatja, hogy a mikroobjektumok „élete” mechanikai vonatkozásban gazdagabb, mint a makroobjektumoké. Egy mikrorészecske tud úgy mozogni, mint egy puskagolyó, de tud másképpen is. A puskagolyó nem tud úgy mozogni, mint egy foton a Michelson-féle interferométerben. Ez rögtön fölveti, mint empirikus problémát: *hol a határ, illetve hol és hogyan történik az átmenet mikro- és makroobjektumok között?*

Ilyen kérdésfeltevés mellett természetesenek tűnik, hogy hiábavaló egyrészt durva hibát keresni a mikroobjektumok kvantummechanikájában, másrészt logikai oldalról ostromolni a „koppenhágai iskolát”, amely bevallva vagy nem bevallva *olyan jelenségekre korlátozódik*, amelyekben egy vitathatatlanul mikroobjektum egy vitathatatlanul makroobjektumhoz kapcsolódik. Mégis, az átmeneti tartomány vizsgálatának szükségességét csak kevesen hangoztatják. Ennek oka a következő. Az „átmeneti” rendszerek szükségképpen sok szabadsági fokúak. Ilyen rendszerekre a hullámfüggvény egzakt kiszámítása általában reménytelen. Ami lehetséges, az vagy

a) a modellszerűen pontos számolás olyan speciális esetekben, amikor a sok szabadsági fok ellenére ezek közül az egyik vagy egy alkalmas kombinációjuk, ki van tüntetve és lényegében szeparálható a többitől (kvázirészek, szupravezetés, lézerhatás stb.), vagy

b) statisztikus eredmények leszámaztatása, mikor a szabadsági fokok nem függetlenek. A kvantumos, illetve klasszikus viselkedés között disztinkváló esetleges mérésekről viszont általában feltételezik, hogy azok a hullámfüggvény alkalmas komponensekre bontása mellett a komponensek közötti fázisviszonyok ellenőrzésével kapcsolatosak, tehát a hullámfüggvény pontos ismeretéhez kötődnek.

Mármost az a) esetben a mérések a kvantummechanikát igazolják, az összetett rendszerekről leválasztható szabadsági fokok ugyanúgy viselkednek, mint az elemi mikrorendszerek primitív szabadsági fokai. A b) esetben viszont a disztinkcióra nem látszik remény, hiszen a hullámfüggvényt sem kiszámítani, sem reprodukálni nem tudjuk. Mint a III. fejezetben kifejtjük, figyelemreméltó történeti analógia áll fenn a Newton-féle abszolút tér körüli vitákkal. Ott is sokáig váratott magára az a felismerés, hogy az ismeretelméleti tisztázódás elsősorban bizonyos kritikus (az akkori idők mérési pontosságát meghaladó) megfigyelési adatoktól várható. Az átmeneti tartományra vonatkozó megfontolások elvi jelentőségét elsősorban Ludwig hangsúlyozta [1].

3. A kvantummechanikának egy másik megoldatlan rejtélye is van: a gravitáció és a kvantumelmélet kapcsolata. A gravitáció vetélytárs nélkül álló elmélete az általános relativitáselmélet. Fogalmi apparátusának legfontosabb eleme a tér-időkontinuum; a gravitáció jelensége abban áll, hogy a tömegek ezt görbületté teszik. A kontinuum „pontjai” makroszkopikus testek klasszikus mozgásai által generált „koincidenciák” matematikai absztrakciói. *Az élesen meghatározott helyzetű és mozgásállapotú anyagi pont fogalma azonban a kvantummechanikában nem megengedett absztrakció, s ugyanakkor egy határozatlan helyzetű tömeg téridőt görbítő hatása is határozatlan.*

Itt is hiányzik az empirikus ösztönző arra, hogy a görbült téridő fogalmába kvantummechanikai aspektust erőltessünk bele. A mikroobjektumok gravitációs hatásai mérhetetlenül kicsik. Azok a testek, amelyek gravitációs hatásának kimutatására remény van, éppúgy a vitathatatlanul makroszkopikus, tehát gyakorlatilag klasszikusan mozgó objektumok közé tartoznak, mint a kvantummechanikai mérés-elmélet „műszermutatói”.



Elképzelhető, hogy a gravitációs kölcsönhatás következetes tekintetbe vétele egyszer komoly szerephez jut az elemi mikroobjektumok leírásánál [2—3], jelenleg azonban az ilyen irányú törekvések, akárcsak a „rejtett paraméter” elméletek, kényszerűen túl sokat markolnak. Túláságosan készen kellene, hogy kipattanjanak szerzőjük agyából ahhoz, hogy ne kerüljenek az elemi mikroobjektumok világára vonatkozó kiterjedt tapasztalati anyaggal ellentmondásba.

Van olyan nézet is, hogy a gravitáció és a kvantumelmélet összebékítéséhez egyáltalán nincs szükség új koncepciókra. A metrikus tenzor szerepét is játszó  $g_{ik}$  gravitációs potenciálokhoz éppenúgy operátorokat kell rendelni, mint a kvantumelektrodinamikában az  $E, H$  térerősségekhez s azután a térelmélet szokásos módszereit kell alkalmazni [4—7]. A lineáris közelítés (kozmológiai méretekben nyilvánvalóan nem alkalmazható) esetétől eltekintve az áthidalhatatlan matematikai nehézségek miatt tényleges elméletről nem lehet beszélni; a lineáris közelítés megfigyelhető kvantumeffektusokat nem jósol meg. A továbbiakban a gravitáció kvantálásával nem foglalkozunk.

Míthogy ilyen módon a gravitációs kölcsönhatás mintegy titokzatosan kívülmaradt a kvantummechanika körén, az irodalomban többször felmerült a gyanú [8—9], hogy a kvantumviselkedés → klasszikus viselkedés átmenetért a gravitáció a felelős. A  $\hbar$  Planck-állandóból, a  $c$  fénysebességből és a  $k$  gravitációs konstansból összekombinálható tömegdimenziójú mennyiség értéke azonban  $\sim 10^{-5}$  g, márpedig egy összetett rendszer pontos kvantummechanikai kezelhetősége régen elvész, mielőtt a tömege ekkorára növekednék, ezért konkrét javaslat ezekből az észrevételekből sem született.

4. Meggyőződésünk, hogy a két felidézett ismeretelméleti nehézséget konkrét *közös oknak* kell tulajdonítani: annak, hogy az elméletben a megengedhetően túlmenő mértékű idealizáció, nevezetesen a *pontosan meghatározott szerkezetű* téridő fogalma kap helyet.

Az ortodox kvantumelméletben egy „magárahagyott” puskagolyó azért akar mindenáron úgy viselkedni, mint pl. egy elektron, mert a nagy pozíciószórást képviselő hullámfüggvény különböző részei között a fázis éppúgy meghatározott, mint az elektron esetében. Kismértékben „elkent” szerkezetű téridőben a távoli komponensek között a fázis elmosódik s ez alkalmat ad arra, hogy a komponensek „együttélése”, koherenciája megszűnjék.

Mivel a téridőn a fázis periódusainak sűrűsége az  $M$  tömeggel nő, világos, hogy minél nagyobb a tömeg, annál érzékenyebb a szerkezeti bizonytalanságra. Elegendő nagy  $M$ -nél az várható, hogy a koherens hullámfüggvény már a „klasszikus” világvonalat imitálja. A mikrorészek hullámfüggvényének periódushossza olyan „nagy”, hogy a komponensek nagymértékű szeparációja (nagy pozíció bizonytalanság) mellett sem érződik az elmosódás hatása: a pontos téridőszerkezet megengedett idealizációnak, a koherencia pedig korlátatlannak tűnik.

A teljesen „éles” szerkezetű téridő eszerint némileg a fenomenologikus termodinamika fogalmaival állítható párhuzamba. Fellazítása egyfelől alkalmat ad a mikroszkopikus és makroszkopikus közötti objektív disztinkcióra, ugyanakkor ellentmondásmentessé teheti a gravitáció geometriai értelmezését. Mivel a nagy tömegek megengedett helyzetbizonytalansága, illetve a nagy helyzetbizonytalanságot kifejleszteni képes mikrorészek tömege kicsi, a geometriának az a határozatlansága, amely a gravitáló testek kvantummechanikai mozgásából fakad, beleolvad a négydimenziós pontkontinuum fogalmához tapadó pontatlanságba.



5. Az előző szakaszban körvonalazott programot maradéktalanul végrehajtani csupán egy a mainál lényegesen átfogóbb elmélet birtokában lehet majd. Bizonyos kvantitatív következtetések azonban talán már ma is levonhatók. Legegyszerűbben egy példa világítja meg, hogy mire gondolunk. A hidrogénatomban keringő elektron klasszikus energiája  $E = p^2/2m - \frac{e^2}{r}$ , a szokásos jelöléssel. Heisenbergnek a részecske-, illetve hullámkép egymást kölcsönösen korlátozó szerepére vonatkozó analízise annakidején történetileg ugyan nyomonkövette a hullám- vagy matrixmechanika megszületését, formailag azonban az utóbbinál sokkal kevesebbet mond. Mégis, ha  $E$ -ben  $p$  helyére  $\sim \hbar/r$ -et írunk és  $r$ -et úgy választjuk meg, hogy  $E$  minimális legyen, akkor mint jól ismeretes, csaknem pontosan megkapjuk az alapállapot adatait. Tanulság: ha csupán bizonyos fogalmak alkalmazhatóságára vonatkozó korlátok birtokában vagyunk is, ebből a negatívumból új, kvantitatív eredmények remélhetők lényegében a régi elmélet keretein belül, ha ti. ezeket a kereteket mintegy a „legkisebb önkény” elve alapján csak annyira feszítjük szét, hogy a korlátoknak eleget tegyünk.

Ennek az értekezésnek az a célja, hogy a téridőgeometria és a kvantummechanika fogalmainak egymást korlátozó szerepéből egyrészt a téridő szerkezet pontosságára, másrészt a hullámfüggvény koherenciatulajdonságaira kvantitatív határokat vezessen le és olyan konkrét kísérleteket javasoljon, amelyekkel a mikroszkopikus—makroszkopikus átmenet megragadható, más szóval amelyek eredményeiben a jelenlegi elmélettől eltérés várható.

6. A következő fejezetben a bennünket érdeklő szempontból végigelemezzük a kvantummechanikának a méréselmélethez kapcsolódó ismeretelméleti nehézségeit.

A harmadik fejezetben olyan formalizmust építünk ki, amely egyfelől visszautkrözi a téridő szerkezetnek „kötelező”, a téridő pontjait kitéző makroszkopikus koincidenciák kvantummechanikai „elkentségéből” fakadó bizonytalanságát, másrészt előírja a hullámmplitúdó propagációjának törvényét a határozatlan szerkezetű téridőn.

A negyedik fejezetben az így kiépített formalizmust a makroszkopikus testek mozgásának problémájára alkalmazzuk. Az ortodox kvantummechanikában ennek a tárgyaláshoz nem elég a Schrödinger-egyenlet általános megoldását ismerni, az utóbbit részben a kezdő állapotra vonatkozó ad hoc, az alapos kritikát ki nem álló feltevésekkel, részben a hullámfüggvény értelmezésére vonatkozó pontatlan utalással kell kiegészíteni. A téridőszerkezet határozatlanságának tekintetbe vétele után a hullámfüggvény számított és a makroszkopikus testek megfigyelt viselkedése között első közelítésben teljessé válik az összhang. Pontosabban, az általunk adott formalizmus, a téridőszerkezet kismérvű elmosódottságával összhangban, a makroszkopikus testek mozgásában parányi anomáliát jósol meg, amelyet normális körülmények között egyéb zavaró hatások nyilvánvalóan elfednek, de amelynek kimutatása, ha csakugyan létezik, kellő gondossággal a technika jelenlegi szintjén lehetségesnek látszik.

Az ötödik fejezetben egy kiválasztott konkrét példa kapcsán a mikroszkopikus folyamatok makroszkopikus szintig való felerősítésének problémájával, más szóval a mikroszisztemekre vonatkozó mérések elméletével foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy az új formalizmusban feloldódnak a II. fejezetben taglalt ismeretelméleti nehézségek, a mérés lezajlása bármilyen sok szabadsági fokú rendszer viselkedésével közös ala-



pon tárgyalható. Az ortodox elméletben sok gondot okozó, makroszkopikusan különböző állapotok szuperpozícióját képviselő hullámfüggvények kifejlődését a hullámamplitúdó propagációjának módosított törvénye megakadályozza. Ez a fejezet a formalizmus logikai teljessége szempontjából fontos, új kísérleti eredményeket nem jósol meg.

## II. Kvantummechanika

### 1. A viták hevesége

F. J. Dyson szerint [10] a tudomány forradalmian új koncepciói rendszerint nem a szó megszokott értelmében aratnak diadalt a régi eszmék felett. A régi védelmezői — meggyőzetlenül — kihálnak, az új generáció pedig már az újat megszokva nő fel. Dyson becslése szerint a kvantummechanika fogalmi eszközei kb. 50 év alatt válnak természetessé.

A kvantummechanika ismeretelméleti alapjaival kapcsolatos vitákat azonban éppen az új generáció fizikusai keltették életre nagyjából tíz évvel ezelőtt. A viták hevesége azóta csak növekszik. 1967-ben az idevágó publikációk száma ötszáz fölé emelkedett, több híres nyáriiskolai kurzus, legutóbb 1970-ben az egyik varennai, választotta témául a kvantummechanika megalapozását. Ezért J. M. Jauch [11] szavaival: „Az a tény, hogy ezek a polémiák... több, mint negyven éve folytatódnak, sőt éppen az utóbbi években szaporodnak és hevesebbé válnak, talán elég bizonyíték arra, hogy a kvantummechanika még mindig tartalmaz megoldatlan rejtélyt, Bohr és a „koppenhágai iskola” mélyreható munkássága ellenére.”

A nézeteltérések permanenciája azonban azt is bizonyítja, hogy eddig még nem sikerült megnyugtatóan rámutatni: mi nem kielégítő a jelen formalizmusban. Ezzel összefüggésben még két szakaszt szeretnénk idézni Jauchnak ugyanebből az összefoglaló tanulmányából. Az egyik: „Talán meglehetősen különös, de a kvantummechanikai formalizmus kielégítőbb értelmezésére vonatkozó javaslatok közül egy sem volt képes arra, hogy megfigyelhető következményeket jósoljon meg...”. A másik: „Jelenleg nem ismeretes olyan tény, amely a kvantummechanika következtetéseinek ellentmond. Jogos tehát a kérdés: miért ez a nagy törődés az elmélet megalapozásával? A válasz valószínűleg az, hogy a kvantummechanika a fizika ismeretelméletében olyan forradalmat okozott, amelyet még ma sem tudunk minden folyományával együtt méltányolni... Olyan megszokott fogalmak, mint fizikai rendszer, állapot, annak leírása térben és időben, fejlődése, kauzalitás és determinizmus, mind kérdőjelet kaptak vagy új értelmet nyertek. Mindenekelőtt, mint azt különösen Einstein hangsúlyozta, az „objektív realitás” fogalma, az egész klasszikus fizika sarkköve az, amit az új fizika gyakorlatilag eltörölt.”

Úgy véljük, e két idézett szövegrész között szervezesebb a kapcsolat annál, amit a szerzőjük feltételezett. A vitához nagyrészt azért keverednek túlzott mértékben ideológiai felhangok, mert a kiindulópont nem a kísérleti döntés lehetőségének kiérszakovására való törekvés.

Ez a körülmény egyik mentségül szolgálhat azért, hogy az újabb irodalomban megjelent kontribúciók tárgyról részletekbe menő ismertetést nem adunk. (A másik mentség: ez nem is volna lehetséges. Kimerítő irodalomjegyzék pl. *Wigner Jenő* viszonylag újkeletű cikkében [12], vagy B. S. DeWitt dolgozatában [13] található.) Csupán az egyes irányzatokról adunk a következő pontban rövid, kritikai összefog-



lalást, részben azért, hogy saját mondanivalónk konzisztens lehessen, részben azért, hogy az utóbbiban tartalmazott új körvonalazódjék. (Aki a nézőpontok polarizáltságáról élményszerű képet kíván kapni, olvassa el egymás után először azokat a lelkes sorokat, amelyekkel *J. A. Wheeler* kommentálja [14] az ún. *H. Everett*-féle metateorémát [15], majd azt a fanyar megjegyzést, amelyet *Wigner Jenő* tesz ugyanerre [12].)

## 2. Mérés elmélet

1. A vizsgálni kívánt  $R$  rendszer állapotát egy  $\varphi$  állapotvektor írja le. A lehetséges állapotvektorok Hilbert-teret alkotnak. A rendszer dinamikai mennyiségeihez hermitikus operátorok tartoznak, amelyek az állapotvektorok Hilbert-terében hatnak. Valamely  $A$  mennyiségnek a  $\varphi$  állapotban csak akkor tulajdoníthatunk határozott értéket, ha  $\varphi$  éppen az  $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$  egyenletnek eleget tevő  $\varphi_k$  sajátvektorok egyikével egyezik meg. Általában  $\varphi = \sum_k c_k \varphi_k$ ; ha  $A$ -t megmérjük,  $\varphi$  ugrásszerűen valamelyik  $\varphi_k$ -ba megy át,  $|c_k|^2$  valószínűséggel. A mérőeszközzel meg nem zavart rendszer  $\varphi$ -je determinisztikusan, a Schrödinger-egyenlet szerint változik.

Az így vázolt axiomatikus megalapozás számos technikai nehézséget vet fel\*, amelyekkel nem kívánunk foglalkozni.

Az alapvető elvi probléma  $\varphi$  kétféle változása.

2. Az ebben rejlő idegenszerűség inspirálja mindenekelőtt a kvantummechanikával legradikálisabban szembehelyezkedő nézetet:

$A$   $\varphi$  által szolgáltatott leírás nem teljes.

$\varphi$  ugrása = ismereteink ugrása.

A feltételezett teljes leírás igénye nyilvánul meg az ún. rejtett paraméterek után való kutatásban. (Vö. pl. [16–19].) A továbbiakban rejtett-paraméter elméletekkel nem foglalkozunk. A valószínűségi amplitudók interferenciájának tapasztalati ténye ugyanis azt bizonyítja, hogy a  $\varphi$ -vel történő leírás a mikrorendszerek esetében nem kevesebbet, hanem többet mond, mint a klasszikus.

Konkrét példaként a szokásos két-rés interferométerben a diafragma mögött, de még az átfedés előtt a

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \quad (2.2.1)$$

„kettéosztott” elektronhullámfüggvény mást fejez ki, mint azt, hogy  $|c_1|^2$ , illetve  $|c_2|^2$  valószínűséggel  $\varphi_1$ , illetve  $\varphi_2$  írja le a valódi helyzetet.

3. Kézenfekvő próbálkozás a magárahagyott, illetve az  $M$  mérőeszközzel megzavart  $R$  rendszer viselkedésében mutatkozó különbséget azzal feloldani, hogy  $M$ -et is a rendszerhez csatoljuk, más szóval az  $R' = R + M$  együttes rendszert vizsgáljuk.

Legyen pl.  $M$  éppen a  $\varphi_k$  sajátfüggvényekkel rendelkező  $A$  mennyiség mérésére szolgáló eszköz. A mérési folyamat legegyszerűbb leírása a következő. Az  $M$  és  $R$  kölcsönhatását megelőző pillanatban  $R'$  hullámfüggvénye

$$\Psi = \varphi \cdot \Phi = \left( \sum_k c_k \varphi_k \right) \cdot \Phi \quad (2.2.2)$$

\* Ilyen pl. az egyes operátorok értelmezési tartományának kérdése, vagy az a probléma, hogy minden hermitikus operátor fizikai mennyiség-e, stb.



ahol  $\Phi$  csupán  $M$  szabadsági fokaitól függ. A kölcsönhatás lezajlása után  $R'$  állapotfüggvénye

$$\Psi' = \sum_k c_k \varphi_k \Phi_k \quad (2.2.3)$$

lesz, ahol  $\Phi_k$   $M$ -nek éppen a  $\lambda_k$  „mutatóálláshoz” tartozó állapotát írja le. ( $M$  éppen akkor jó mérőeszköz, ha  $M$  és  $R$  kölcsönhatása a (2.2.2)  $\rightarrow$  (2.2.3) átmenetre vezet.)

Ez azonban azt jelenti, hogy  $M$  hozzácsatolása  $R$ -hez a hullámfüggvény két-féle változásának kérdését nem oldja meg. (2.2.3) nem árulja el, hogy a mérés után melyik  $\varphi_i$ -nek kell realitást tulajdonítani.

Végeredményben nem is várható más, hiszen  $R'$  (ellentétben  $R$ -rel) a „magára hagyott” viselkedést mutatja, azaz  $\Psi$  determinisztikusan változik, míg  $R$  és  $M$  kölcsönhatásának tényleges kimenetele stochasztikus.

4. Már ez is vita tárgya, miben kell a tények ilyen állása mellett ismeretelméleti nehézséget látni. A lényeg, ha nem tévedünk, egy különleges ellentét, amelyet két alakban is megfogalmazunk.

## ELLENTÉT

E)

Első megfogalmazás.

- A) Mikroszkopikus rendszerekre a kvantummechanika kitűnő eredményeket ad. Következtetés: Kell, hogy a kvantummechanika kiterjeszthető legyen a makroszkopikus régiók felé, hiszen

makroszkopikus = sok mikroszkopikus.

- B) A kvantummechanikai formalizmust kiterjeszteni egy „teljes” jelenségre ugyanolyan lehetetlenség, mint az, hogy egy kígyó saját magát teljesen lenyelje. Az állapotfüggvény fogalma ugyanis további, az állapotfüggvénnyel jellemzett rendszeren kívüli agensekre való hivatkozást rejt magában.

Második megfogalmazás.

- A) Ha a  $\varphi$  hullámfüggvény egyszerű mikrorendszerre, pl. egyetlen elektronra vonatkozik, akkor

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \approx \{|c_1|^2, \varphi_1; |c_2|^2, \varphi_2\} \quad (2.2.4)$$

ahol természetesen a jobb oldal a  $\varphi_1$ , illetve  $\varphi_2$  állapotok  $|c_1|^2$ , illetve  $|c_2|^2$  súllyal vett keverékét jelöli,  $\approx$  jelentése pedig „nem ekvivalens”.

- B) Ha  $\psi = \sum_i c_i \varphi_i \Phi_i$  részben makroszkopikus rendszere vonatkozik és a különböző  $\Phi_i$ -k makroszkopikusan különböző állapotoknak felelnek meg, akkor

$$\sum_i c_i \varphi_i \Phi_i \approx \{|c_1|^2, \varphi_1 \Phi_1; |c_2|^2, \varphi_2 \Phi_2; \dots\} \quad (2.2.5)$$

E) jelentőségét lebecsülni oktalanság. Az ellentmondás valóban éles. Ez tükröződik a vele szemben elfoglalt szélsőséges álláspontokban. A négy legjellegzetesebbet a következő nevekkel illelhetjük:

- ortodox
- Everett-féle
- koppenhágai
- Ludwig-féle.



Az első három álláspont „passzív”-nak minősíthető, amennyiben E)-t további tapasztalati tények segítségével nélkül kívánja feloldani. Röviden így jellemezhetjük őket.

a) Ortodox nézet. Mikro- és makrorendszer között alapvető különbség nincs. A hullámfüggvény redukciója akkor következik be, mikor a (2.2.3) típusú korrelációk láncolatában a megfigyelő tudatáig érkezünk.  $R$  és  $M$  példájánál maradva, amíg  $R$  és  $M$  kölcsönhatásának „eredményét” nem vesszük tudomásul,  $R'$  a (2.2.3) „tisztá” állapotban marad, amely a  $\{|c_i|^2, \varphi_i \Phi_i\}$  keveréktől különbözik.

b) Everett-féle nézet. A hullámfüggvény redukciója egyáltalán nem következik be soha. A megfigyelő(k) tudata is része a szuperpozíciónak, makroszkopikusan különböző állapotokkal a megfelelő tudattartalmak állnak egyértelmű korrelációban, éppen úgy, ahogy a (2.2.3) állapotban az  $A$  operátor egyes  $\varphi_k$  sajátfüggvényei a megfelelő  $\Phi_k$  mutatóállással vannak összekapcsolva.

E két nézet már filozófiai okokból is (de, mint látni fogjuk, nem elsősorban filozófiai okokból) elfogadhatatlan a jelen szerző számára. Megemlítésüket mégis fontosnak tartjuk, mert véleményünk szerint létezésük azt bizonyítja, hogy a harmadik, ún. koppenhágai interpretáció sem kielégítő.

c) Koppenhágai interpretáció.  $\varphi$  és  $\psi$  különbségében ismeretelméleti nehézséget látni felesleges. Mindig  $\psi$ -t kell szem előtt tartani, a mikroszkopikus folyamat leírásába kezdettől fogva be kell vonni azokat a makroszkopikus részeket, amelyekkel a jelenség során a mikrorendszer kölcsönhatásba lép,  $\varphi$  önmagában nem interpretációkész. A (2.2.3) típusú  $\psi'$ -t viszont *sohasem* „igazi” szuperpozícióként kell felfogni,  $\psi'$  mindig statisztikusan értelmezendő, ti. úgy, hogy ekvivalens a  $\{|c_i|^2, \varphi_i \Phi_i\}$  keverékkel. A tudatnak szerepe nincs.

Míg tehát az ortodox nézet azzal kívánja feloldani az E) ellentétet, hogy a mindenkor külső ágensnek a tudatot nevezi ki, addig a koppenhágai interpretáció „tabunak nyilvánítja” a makroszkopikus szintig fel nem erősített mikrofolyamatokat. A koppenhágai iskola érvelése kettős: egyfelől arra mutat rá, hogy a kvantumjelenségekhez egy bizonyos oszthatatlanság tapad, másfelől arra, hogy minden fizikai vizsgálat végső soron szükségképpen makroszkopikus adatokat vet össze.

Némi kiélezettséggel azt mondhatjuk, hogy a koppenhágai értelmezés szerint nem a makroszkopikus testek állnak atomokból, hanem az atomok állnak makroszkopikus testekből.

5. Ludwig nevével fémjeleztük azt a d) felfogást, amely E)-ben megoldásra váró fizikai problémát lát. Eszerint E) második megfogalmazása egyenes felhívás az átmeneti régió vizsgálatára: valami olyasmit kell tisztázni, hogy milyen bonyolultságú  $R$  rendszereknél és milyen típusú szétágazásoknál változik  $c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$  jelentése tiszta állapotból keverékké.

Ezt a programot legegyszerűbben az alábbi gondolatmenet érzékelteti.

## GONDOLATMENET

G)

1. Legyen, mint a 3. szakaszban,  $R$  mikrorendszer,  $M$  makroszkopikus mérőeszköz. Az  $R' = R + M$  együttes rendszer  $\psi$  hullámfüggvényét az  $R$  és  $M$  kölcsönhatását megelőző pillanatban a 2.2.2 alakban vettük fel. Ez is szuperpozíció, akár csak a mérés utáni  $\psi'$ , hiszen

$$\psi = \varphi \cdot \Phi = \sum_k (c_k \varphi_k \cdot \Phi) \quad (2.2.6)$$



alakba írható.  $\psi$  mégis szigorúan tiszta állapotnak tekintendő, mert a 2.2.6 szuperpozíció tagjai csupán mikroszkopikusan különböznek.

2. Végezzünk most  $R$ -en  $A$ -ra vonatkozó mérést két lépésben, egy  $R$  és  $M$  közé iktatott  $M'$  „szubmakroszkopikus” rendszer segítségével. Akkor, vázlatosan, a

$$\psi = \varphi \cdot \Phi' \cdot \Phi = \left( \sum_k c_k \varphi_k \right) \Phi' \cdot \Phi = \sum_k (c_k \varphi_k \Phi' \cdot \Phi) \quad (2.2.7)$$

kezdőállapot először  $R$  és  $M'$  kölcsönhatása során a

$$\psi' = \left( \sum_k c_k \varphi_k \Phi'_k \right) \cdot \Phi = \sum_k (c_k \varphi_k \Phi'_k \Phi) \quad (2.2.8)$$

állapotba, másodszor  $M'$  és  $M$  kölcsönhatása alatt a

$$\psi'' = \sum_k c_k \varphi_k \Phi'_k \Phi_k \quad (2.2.9)$$

állapotba megy át. Az utolsó szuperpozíció biztosan keverékként értelmezendő, mert a különböző  $\Phi_k$ -k makroszkopikusan különböző állapotoknak felelnek meg. (2.2.7) még biztosan tiszta állapot. Kérdés: milyen bonyolultságú  $M'$ -nél tekintendő már (2.2.8) is keveréknek?

A G) gondolatmenet azonban csak érzékelteti a feladatot, elfogadható megfogalmazásnak tekinteni nem lehet. Akár  $R$ , akár  $M'$  vagy  $R+M'$  önálló hullámfüggvényéről s így annak koherenciatulajdonságairól beszélni csak addig lehet amíg  $\psi$  szorzat. Amennyiben  $R$  vitathatatlanul mikroszkopikus, pl. egyetlen elektron, akkor  $\psi$  számottevő ideig jó közelítéssel  $\varphi \cdot \Phi$  alakú maradhat. Összetettebb  $R$  vagy  $M'$  rendszerek azonban, mint azt újabban különösen Zeh [20] hangsúlyozza, a környezetükkel szüntelen kölcsönhatásban állanak, ha másképpen nem, a hő-sugárzásukon keresztül, így a G)-ben szereplő  $R+M'$  hullámfüggvénye egyszerűen nem létezik. Ezzel a zavarbaejtő ténnyel összhangban olyan programot, amely

„A hullámfüggvény különböző komponensei között fennálló koherencia fokozatos megszűnése növekvő bonyolultságú rendszerek esetén”

cím alá vonható, általános formában tudomásunk szerint eddig senkinek sem sikerült megfogalmaznia\*.

6. Tekintsünk most el egy pillanatra a mikroszkopikus korrelációkban rejlő nehézségektől és próbáljuk *általánosítható* formában körülírni, hogy milyen előre lépést jelentene az elmélet formalizmusában, ha sikerülne a G)-ben vázolt kérdést megválaszolni és valamilyen  $M'$  „kritikus” szubmakroszkopikus rendszerre rámutatni, amelyre nézve (2.2.8) már keverékkel ekvivalens.

Mindenekelőtt idézzük fel E)-t, és pedig a következő alakban.

A') Ha  $\varphi$  mikroszkopikus  $R$ -re vonatkozik, akkor

$\varphi$  *határozottan* fejez ki valami *határozatlan*at.

(Azaz: A fizikai mennyiségeknek, amelyen pl. az elektron helye, az értéke határozatlan, ugyanakkor azonban  $\varphi$  „szorosan” ráillik a valóságra, a tiszta állapotot keverékkel pótolni nem lehet.)

\* Az a körülmény, hogy realiztikus esetben a totális  $\psi$ -ből nem sikerül használható tartalmat kiolvasni valamilyen  $M'$  szubmakroszkopikus részrendszerre vonatkozólag, látszólag igazolja a koppenhágai álláspontot, hogy ti. csupán a teljes  $\psi$  interpretációkész. De csupán látszólag. Az elkerülhetetlen mikroszkopikus korrelációk következtében az is homályban marad, hogy mit tekinthetünk teljes  $\psi$ -nek.



$B')$  Ha  $\psi$  makroszkopikus  $R'$ -re vonatkozik, akkor

$\psi$  (általában) *határozatlanul* fejez ki valami *határozottat*.

(Azaz: A makroszkopikus mennyiségeknek, amilyen pl. egy mutató állása, az értéke határozott, ugyanakkor  $\psi$  általában nem illik rá szorosan a valóságra.)

Égészítsük ki  $B')$ -t az alábbi észrevétellel.

A (2.2.2) alatt felírt  $\psi$ , úgy tűnik, szorosan ráillik a valóságra (mert hiszen határozott mutatóállásnak felel meg) s ugyanez mondható a (2.2.3) szuperpozíció megfelelő (esetenként más-más) tagjáról a redukciót követő pillanatban. A további történések számára természetesen a mindenkori redukció által kiválasztott komponens válik kezdőállapottá. A  $\psi$  hullámfüggvény és az aktuális fizikai helyzet illeszkedése mintegy lüktet.

$M'$  ismerete, más szóval a koherencia szubmakroszkopikus megszűnése mármost azt involválja, hogy a hullámfüggvény redukcióját már előbb végre kell hajtani, mielőtt a totális rendszer Schrödinger-egyenletének engedelmeskedő hullámfüggvény makroszkopikusan különböző állapotoknak megfelelő komponenseket tartalmazó szuperpozícióvá fejlődik. Konkrétan pl. a (2.2.7) kezdőállapotból a (2.2.9) állapot egyáltalán nem alakul ki. Már a (2.2.8) szuperpozíció az egyik, mondjuk  $\varphi_i \Phi'_i \Phi$  tagjára redukálódik egy aktuális folyamatban, s ebből (ugyanebben a konkrét folyamatban) — újra a Schrödinger-egyenletet követve a  $\varphi_i \Phi'_i \Phi_i$  állapot fejlődik ki\*.

A G) gondolatmenet sikeres érvényesítése tehát azt jelenti, hogy a hullámfüggvény időbeli változásában a Schrödinger-egyenletnek engedelmeskedő szakaszok és a redukciók változásának üteme, vagy ami ugyanezt jelenti, a  $\psi$  és az aktuális fizikai helyzet közötti illeszkedés lüktetésének üteme meggyorsul, ugyanakkor azonban ennek a lüktetésnek az „amplitúdója” lecsökken, a sűrűn következő redukciók nem engedik meg makroszkopikusan határozatlan  $\psi$  kifejlődését.

Ezek után megfogalmazhatjuk a G)-ben rejlő, az eljövendő teljesebb elméletre vonatkozó sugalmazást az  $M'$ -ra, illetve a  $\psi$  totális hullámfüggvény szeparálhatóságára vonatkozó hivatkozás nélkül. Alapvető követelésünk az, hogy az új formalizmus tükrözze a mikroszkopikus viselkedés és makroszkopikus viselkedés közötti objektív különbséget, ami a jelen formalizmusban mint az  $A')$ ,  $B')$  ellentét nyilvánul meg. A jövő elméletétől azt várjuk, hogy

a) a teljes rendszer hullámfüggvénye minden pillanatban szorosan illeszkedik az aktuális fizikai helyzethez. Bizonyos mennyiségeknek a totális  $\psi$  által képviselt szórása állandóan és minden körülmények között kicsi, éppen ezek lesznek a makroszkopikus mennyiségek.

b)  $\psi$  időbeli változása két folyamatosan, egymással párhuzamosan érvényesülő elemből, egy determinisztikus és egy stochasztikus elemből tevődik össze. Elegedően rövid időszakaszokra  $\psi$  változása jó közelítéssel determinisztikus, annál jobb közelítéssel, minél kisebb a rendszer. Pontosabban az egyszerű, azaz csupán viszonylag kisszámú mikroszkopikus szabadsági fokot involváló korrelációk huzamos ideig determinisztikusan fejlődhetnek, a bonyolulttá váló korrelációk állandóan, folyamatosan kihálnak.

7. Nyilvánvaló, hogy ez a program túlmegy a „Méréselmélet” keretein, sőt sikeres végrehajtása éppen azt demonstrálná, hogy a méréseknek semmilyen kitűn-

\* Az olvasó észreveheti, hogy ezekben a vázlatos fejtegetésekben többnyire elhanyagoljuk a hullámfüggvénynek azt a változását, amely nem  $R$ ,  $M'$  vagy  $M$  kölcsönhatásából származik.



tetett szerepe nincs az összetett rendszerek kvantummechanikájában. Körvonalazásáig legegyszerűbben mégis a választott úton juthattunk el.

Úgy tűnhetik, hogy a hullámterjedésben párhuzamosan megnyilvánuló determinisztikus és stochasztikus elem koncepciója a jelenlegi formalizmustól reménytelenül távol áll. A következő fejezetekben azt kívánjuk megmutatni, hogy ez nem így van.

### III. Téridő és kvantummechanika

#### 1. Az abszolút tér

1. A mikroszkopikus és makroszkopikus között az ebben a dolgozatban javasolt objektív megkülönböztetés egyik pillére az az álláspont, hogy a téridő nem abszolút, azaz tulajdonságai nem függetlenek az anyagtól. Ennek a Mach-féle elv néven is emlegetett követelménynek a pontos tartalma vita tárgya [21–22], ezért indokolt az alábbi rövid áttekintés.

A tér Newtonnál kettős szerepben jelenik meg.

a) Mint az anyagtól független színpad. (Minden folyamat a térben zajlik, de nem befolyásolja a teret.)

b) Mint dinamikai oka a testek tehetetlenségének. A tér a newtoni szemléletben az időtől is független, euklideszi szerkezetű.

„A teljesen magukra hagyott testek egyenesvonalú, egyenletes mozgást végeznek.” Ha ez a kijelentés a  $K(x, y, z)$  derékszögű koordináta-rendszerben helyes, akkor biztosan nem teljesül egy olyan  $K'(x', y', z')$  derékszögű koordináta-rendszerben, amelyet  $K$ -val egyszerűség kedvéért mondjuk az

$$x' = x - at^2, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (3.1)$$

vagy megfordítva, az

$$x = x' - a't'^2, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (a' = -a) \quad (3.2)$$

transzformáció köt össze. Az előbbi kijelentésben tehát nem annyira a tehetetlenségi törvény alakját, mint inkább az ún. inerciarendszereket kiválasztó elvet kell látni, az inerciarendszerek ti. éppen azok, amelyekben a tehetetlenség törvénye a fenti legegyszerűbb formában érvényes.

Tegyük fel, hogy  $K$  inerciarendszer. Miért nem az  $K'$ ? Azért mert gyorsul. Mihez képest?  $K$ -hoz képest. De hiszen  $K$  is gyorsul  $K'$ -höz képest, ugyanolyan módon. A fenti képletekben a vesszős és vesszőtlen mennyiségek szimmetrikusan szerepelnek. Miért nem  $K'$  az inerciarendszer, a másik pedig nem az? Newton szerint  $K$ -t az tünteti ki, hogy az *abszolút térhez képest* nyugszik, illetve nem gyorsul. Az ilyen fajta magyarázat, mint arra elsősorban E. Mach rámutatott, valójában az ok nemismerését jelenti, minthogy az abszolút tér semmilyen más megnyilvánulásával nem párosul.

Mach meggyőződése az volt, hogy maga a tér nem lehet fizikai folyamatok oka. Szerinte a tehetetlenség forrását az univerzum távoli tömegei szolgáltatják; az inerciarendszerek olyan rendszerek, amelyekben az univerzum tömege egészében (átlagosan) nyugszik, illetve nem gyorsul. Meg is kísérte a mechanika törvényeiből az abszolút teret kiküszöbölni, próbálkozása azonban nem járt sikerrel.



Könnyű átlátni, hogy a tehetetlenség kialakításában a közeli tömegek nem játszanak számottevő szerepet. Az univerzum távoli tömegeivel viszont nem lehet kísérletezni. Részen talán ezért, részben pedig nyilván azért, mert a Nap és néhány alkalmasan választott állócsillag gyakorlatilag kielégítő inerciarendszert definiált, kritikus kísérleteket (pl. tömeganisotropia után való kutatást) a kortársak közül senki nem szorgalmazott. Elvi homályban maradt pl. az a kérdés, hogy vége-e a csillagvilág valamilyen globális, kismértékű forgást, vagy az, hogy létezik-e egyáltalán az egész univerzumra kiterjedő inerciarendszer. Megkockáztathatjuk a megjegyzést: Machnál az inerciarendszer fenomenologikus fogalom.

2. A tehetetlenség „okának” felderítéséhez a „termékeny konfliktus” teljesen váratlan oldalról merült fel: a *Michelson kísérlet* alakjában. A speciális relativitáselmélet legfontosabb felismerése az, hogy a természet folyamatainak nincs két független medre, tér és idő az egységes, négydimenziós téridőbe olvad össze, amelynek eseménypontjai között fizikai eszközökkel  $ds^2$  négyestávolságot definiálhatunk. Az inerciarendszerek azok a koordináta-rendszerek, amelyekben  $ds^2$  a legegyszerűbb,  $ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2$  alakot ölti. Mihelyt a tér és idő egységét felismertük, a határozott tehetetlenségi mozgásokban egyszerűen a téridő geometriai tartalmának megnyilvánulását kell látnunk. Mach programja eredeti értelmében teljesen értelmét veszti: távoli tömegek nélkül is világos, hogy négydimenziós egyenes és görbe között különbség van. Az inerciális (=legegyszerűbb) mozgások kitüntetettsége éppoly kevésbé szorul külön magyarázatra, mint ahogy Mach idejében a kifeszített zsinór kitüntetettsége (az egyéb térgörbékhez képest) sem idézte fel a távoli tömegeket. (Talán nem haszontalan a legutóbbi momentumot egy önálló példával kihangsúlyozni, a háromdimenziós térre szorítkozva. Egy szabadon lebegő folyadékcsapp felszíne a felületi feszültség következtében minimumértéket vesz fel. Egy derékszögű  $k(x, y, z)$  koordináta-rendszerben a csepp felületének egyenlete

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k^2.$$

Ha mondjuk az  $x' = x - at^2$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  transzformációval új  $k'$  rendszerre térünk át, abban a „felszíntörvény” alakja elbonyolódik, noha az  $x \leftrightarrow x'$  transzformációs képletekben a vesszős és vesszőtlen mennyiségek szimmetrikusan szerepelnek.  $k$ -t igenis a tér tünteti ki  $k'$ -vel szemben: csupán  $k$  simul a tér szerkezetéhez. Valóban, két szomszédos pont távolságnégyzetét csupán  $k$ -ban adja meg  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ , a kifeszített zsinór egyenlete csupán  $k$ -ban  $ax + by + cz + d = 0$  alakú, stb. Mármint ugyanúgy: olyan (négydimenziós)  $K$  rendszerben, amelyben  $ds^2$  alakja kanonikus, az erőmentes mozgások képe egyenes.)

3. A téridő fogalmának megszületésével az inerciális mozgások léte megszűnt rejtély lenni, identifikálásuk még az maradt, az inerciális és gravitációs erők szétválaszthatatlansága miatt. A következő lépést az általános relativitáselmélet tette meg: a gravitációs erőt, minthogy lokálisan kimutathatatlan, száműzte, a pusztán gravitáció hatására végbemenő mozgást a tehetetlenségi mozgással azonosította. Az egész téridőre kiterjedő inerciarendszer fogalma értelmét veszítette, a lokális inerciarendszerek kiválasztása viszont gépiesen egyszerű lett. Világos tartalommal teltek meg az olyan kérdések, mint pl. hogy az univerzum távoli tömegei mutatnak-e forgást a Naprendszerhez rögzített lokális inerciarendszerhez képest s elméletileg ismerjük az — igenlő — választ arra a kérdésre, hogy forognak-e egymáshoz képest a Naprendszer különböző bolygóihoz rögzített lokális inerciarendszerek [23–24].



Az 1915 és 1925 közötti rövid időszakasz a fizikatörténet legkülönlegesebb dualizmusának korszaka. A gravitáció távolhatás és közelhatás egyszerre: két égitest mindennemű anyagi csatorna nélkül hat egymásra, a gravitáció megértéséhez az üres téridő fogalmán nem kell túlmenni. Ugyanakkor az anyag visszahat a jelenségek színpadára, a téridőt görbültté teszi az Einstein-féle differenciálegyenletek, azaz közelhatás formájában.

Ebben az időszakban a téridő nem fenomenologikus fogalom, sőt Einstein annyira „first principle”-nek érezte, hogy az egész anyagfogalmat alája akarta rendelni.

4. A kvantummechanika kialakulása új fejezetet nyitott az anyag és téridő viszonyának történetében, a Mach-féle elv körüli viták azonban nem záródtak le.

Mint azt reméljük, sikerült megvilágítani, az a Mach-féle javaslat, hogy a távoli tömegek a geometriai viszonyoktól függetlenül beleavatkoznak a dinamikai törvényekbe, a tér és idő különélése idején született. A gondolat azonban túlságosan csábító, s tovább élve egy sor precíziós mérésre adott ösztönzést. Ezek elsősorban a tehetetlen tömeg anizotrópiáját (mint a környező asztronómiai tömegeloszlás egyenetlenségének esetleges következményét), [25] továbbá a földi gravitációs gyorsulás esetleges függését a Föld távoli csillagokhoz viszonyított sebességétől [26] igyekeztek kimutatni, pozitív eredmény nélkül.

Mindezek a törekvések, röviden szólva, a pusztán a Riemann-geometria apparátusát magában foglaló görbült téridő koncepcióját újra csak fenomenologikus fogalomnak minősítik. Bár *Mach* gondolataihoz nyúlnak vissza, rugójuk nyilvánvalóan nagyrészt az a körülmény, hogy a gravitáció szigorú geometriai értelmezése és a kvantummechanika összeegyeztethetetlen. A kísérletek negatív eredménye azonban arról győz meg, hogy a görbült téridő *nagyon jó* fenomenologikus fogalom, radikális elmélyítésének még nincs itt az ideje.

## 2. A téridő szerkezetének határozatlansága

1. A téridőszerkezet kimérésének pontosságát az alkalmazott eszközök kvantummechanikai viselkedése korlátozza. A kérdéskörnek szétágazó irodalma van. *H. Salecker* és *Wigner Jenő* idevágó vizsgálatainak [27–28], amelyekre a továbbiakban támaszkodunk, a háttérben az a kérdés állt, hogy vajon elvileg lehetséges-e egyedülálló mikrorészecskéknél a téridő görbületére gyakorolt hatását kimutatni. Ezért ők mikroszkopikus órák (a szükséges fényjelekkel) elvi sajátosságait vizsgálták a téridőbeli távolságok kimérésével kapcsolatban. A görbületmérés négyestávolságmérésre vezethető vissza, s a négyestávolságok közül is elegendő az időtartamokat vizsgálni, mivel a térszerű távolságok mérése fényjelek segítségével időmérésre vezethető vissza. Eredményül azt kapták, hogy minél hosszabb időtartamot és minél nagyobb pontossággal kívánunk mérni, annál nagyobb kell, hogy legyen az óra tömege. A nagy tömegre lényegében két okból van szükség. Egyrészt azért, hogy a leolvasással kapcsolatos fotonok ne térítsék le az órát a mérni kívánt világvonalról, másrészt azért, hogy az óra pozíciójának kvantummechanikai szórása ne növekedjék túlságosan gyorsan. A leolvasás nehézségeire már *Schrödinger* felhívta a figyelmet [29], de *Salecker* és *Wigner* megmutatta, hogy a második követelmény erősebb megszorítást jelent. Ezek a szerzők részletesen foglalkoztak az óra elvileg elképzelhető szerkezetével, nem érintették azonban azt a kérdést, hogy az



„alkatrészek” tömegének és méretének arányára nézve kell-e valamilyen megszorítással élnünk.

2. Nyilvánvaló, hogy a kvantummechanika koncepciói önmagukban elegendenek az elemirészekre vonatkozó ismereteink rendezéséhez. De ellentmondásról sem tudunk a részecskefizika tényei és a kvantummechanika elvei között. A neutron-diffrakciós anyagvizsgálatok azt bizonyítják, hogy a hullámfüggvény koherenciáját nem csökkenti perdöntő módon az, hogy a vizsgált részecske erős kölcsönhatásban is részt vesz. Minthogy a súlyos testek pozícióbizonytalansága a tapasztalat szerint elenyésző s ugyanakkor a gravitációs kölcsönhatás az, amit a téridő szerkezetére vezetünk vissza, indokolt dolog fizikai tartalmat tulajdonítani annak a nemtriviális körülménynek, hogy az Einstein-féle gravitációelmélet és a kvantummechanika koncepciói egymást kölcsönösen korlátozzák, teljesen függetlenül az elemirészfizika tényeitől.

Konkréten, a továbbiakban feltesszük, hogy az időmérésben résztvevő tömegeket csupán a saját gravitációs hatásukkal kapcsolatos pontatlanság korlátozza.

3. Tekintsük a téridő egy olyan (tömegektől távoli) tartományát, amelyről okunk van feltenni, hogy görbületlen és vizsgáljuk meg, milyen pontossággal tudjuk megvalósítani, egy parányi óra segítségével ténylegesen kitűzni, mondjuk egy felépítendő inerciarendszer  $x^0$  időtengelyének valamely  $s = cT$  hosszúságú darabját. Az óra tömegpontok rendszere, amely megkülönböztethető konstellációkra képes. A részleteket átgondolni lidércnyomás, a vázlatos áttekintés egyszerű. A gondolatmenet két részből áll, az első részben a téridő szerkezetét „kritika nélkül” egyértelműen és pontosan adottnak (és pedig Minkowski-félének) tekintjük.

a) Legyen a „mutató” tömege  $M$ , helybizonytalansága egy adott időpillanatban (átlagosan a  $T$  idő alatt)  $\Delta\xi$ , sebessége átlagosan  $v$ . Akkor nyilván  $\tau = \frac{\Delta\xi}{v}$  időnek kell eltelnie, amíg a mutató új, az előbbtől biztosan különböző állapotba kerül.  $\Delta s = c\tau$  tehát  $s$  pontatlansága. Ez egyúttal a mutató maximális megengedett  $l$  mérete is: a mutatót terelő erők  $\tau$  idő alatt érnek el eredményt, az ennyi idő alatt még fénysebességgel sem elérhető tömegeket nem lehet a mutatóhoz számítani.

A mutató energiabizonytalansága  $\approx v \cdot \Delta p = v \frac{\hbar}{\Delta\xi} = \frac{c\hbar}{\Delta s}$ , az ehhez tartozó tömegbizonytalanság  $\Delta M = \frac{\hbar}{c\Delta s}$ .

b) A mutató tömege az óra környezetében megváltoztatja a téridő szerkezetét. Ha az órától távol mért időtartam (fényjelekkel továbbítva)  $cT$ -nek bizonyul, akkor az óra helyén a valódi  $s$  időtartam  $s \approx \left(1 - \frac{2m}{r}\right) cT$ , ahol  $m = \frac{G}{c^2} M$  és  $r \approx l$ .  $G$  a gravitációs állandó.  $M$  bizonytalansága tehát  $s$ -ben

$$\Delta s' \approx \left(\frac{G}{c^2} \Delta M\right) \cdot \frac{1}{l} \cdot cT = \frac{G\hbar}{c^3 \Delta s^2} \cdot s$$

bizonytalanságot okoz. Az optimális eredményt nyilván akkor kapjuk, amikor



$\Delta s' \approx \Delta s$ . Ekkor  $\Delta s^3 \approx \frac{G\hbar}{c^3} \cdot s$ , azaz

$$\Delta s^2 \approx \alpha^{4/3} \cdot s^{2/3}, \quad (3.2.1)$$

ahol  $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar G}{c_3}}$ .

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az „óra” szerkezetével egyáltalán nem törődünk, s csupán az egész óra súlypontjának kvantummechanikai szétfolyását vizsgáljuk. A súlypont hullámfüggvénye annál szűkebb világsövet jelöl ki a tér-időn, minél nagyobb az óra tömege. A tömeg azonban biztosan nem lehet akkora, hogy a hozzá tartozó Schwartzschild-féle rádiusz az óra méreténél nagyobb legyen.

(3.2.1) azt sugallja, hogy az egyértelmű téridőszerkezet meg nem engedett idealizáció, ezt a szerkezetet nem szabad pontosabban specifikálni, minthogy (3.2.1)-gyel összeférjen. (3.2.1) nem valamiféle komplementaritást, hanem abszolút korlátot fejez ki. Fontossága abban rejlik, hogy — parányi mértékben — *olyankor is befolyásolja a téridőbeli hosszúság fogalmát, amikor az nagy* a részecskefizikában releváns ( $10^{-13}$ — $10^{-22}$  cm) dimenziókhoz képest. Amikor  $s$  maga ezekhez a kritikus méretekhez közeledik, (3.2.1)-nek nem tulajdonítunk értelmet.

Ha  $s$  elegendő nagy, a téridő nem tekinthető Minkowski-félének. De minél nagyobb  $s$ , annál kisebb a fenti megfontolásban szereplő hullámfüggvények periódushossza. Az óra geodetikus vonalon mozog, (3.2.1) érvényben marad. Valamennyi kvantummechanikai következtetésünk leszámaztatásához elegendő (bár nem szükséges) olyan téridőtartományra szorítkozni, amely anyagmentes és — a (3.2.1) pontatlanságtól eltekintve — görbületlen.

4. Abból a célból, hogy a (3.2.1) bizonytalanságot beépítsük a téridő fogalmába, heurisztikusan, mintegy a „legkisebb önkény elve” alapján, a következőképpen járunk el. Az egyetlen, anyagmentes, görbületlen  $S$  pontsokaságot  $S$ -től kismértékben eltérő, egy  $\beta$  paramétertől függő anyagmentes  $S_\beta$  pontsokaságok  $\{S_\beta\}$  halmazával pótoljuk. A fizikai téridőt  $\{S_\beta\}$  reprezentálja.  $S$  maga, alkalmasan választott koordináta-rendszerben a metrikus tenzor

$$g_{ik} = \delta_{ik}, \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1, \quad \delta_{\infty} = 1, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{ha} \quad i \neq k \quad (3.2.2)$$

Minkowski-féle értékeivel jellemezhető,  $\{S_\beta\}$ -hoz ennek megfelelően a metrikus tenzorok egy  $\{(g_{ik})_\beta\}$  halmaza tartozik, ahol

$$(g_{ik})_\beta = \delta_{ik} + (\gamma_{ik})_\beta, \quad \square(\gamma_{ik})_\beta = 0 \quad (3.2.3)$$

és a  $(\gamma_{ik})_\beta$  függvények nagyon kicsinyek. (3.2.2) második egyenlete az anyagmenteséget fejezi ki, a koordinátavonalak megválasztásával kapcsolatos (a geometriai szerkezettől független, tehát zavaró) önkényt a  $\partial(\gamma_{ik})_\beta / \partial x^k = 0$  harmonikus feltételek kiírásával ( $\gamma_{ik}^k = \gamma_{ik}^k - \delta_{ik}^k \gamma_{ik}^k$ ) küszöböljük ki. A fizikai téridőnek ebben a matematikai modelljében a pont fogalma változatlan marad, amennyiben egyetlen  $x^i$  koordinátanégyes reprezentálja. Az  $x^i(t)$  görbe  $A$  és  $B$  pontok közötti szakaszának „hosszához” azonban az

$$s \rightarrow \{S_\beta\} = \left\{ \int_A^B \left[ (g_{ik})_\beta \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^k}{dt} \right]^{1/2} dt \right\} \quad (3.2.4)$$

halmazt rendeljük.



A továbbiakban a fizikai téridő  $\{S_\beta\}$  modelljét arra fogjuk felhasználni, hogy a szerkezeti bizonytalanságot a hullámfüggvény propagációjánál tekintetbe vegyük. Nem kívánunk olyan esetekkel foglalkozni, amelyekben makroszkopikus testek egymáshoz képest a fényvel összemérhető sebességgel mozognak. Ezért feltesszük, hogy az  $s$  koordinátarendszer olyan, hogy benne valamennyi test *lassan* mozog. Csupán az időtengellyel majdnem párhuzamos világvonalak explicit vizsgálatára lesz tehát szükségünk. Figyelemreméltó, hogy a  $(\gamma_{ik})_\beta$  halmaz megválasztható úgy, hogy *minden* ilyen típusú  $A, B$  pontpárra a köztük húzott egyenesnek az  $\{s_\beta\}$  halmaz által definiált átlagos  $\bar{s}$  hosszára és  $e$  hosszúság  $\Delta s^2$  szórásnégyzetére a (3.2.1) összefüggés teljesüljön.

Bevezetjük a  $(\gamma_{00})_\beta = \gamma_\beta$  jelölést. Kiválasztunk a téridőn egy a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű,  $L$  élhosszúságú hiperkockát és ebben Fourier-sorba fejtjük  $\gamma_\beta$ -t:

$$\gamma_\beta(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k (c_k e^{i(kx - \omega t)} + c_k^* e^{-i(kx - \omega t)}). \quad (3.2.5)$$

Itt  $v = L^3$ ,  $k = \frac{2\pi}{L} n$  ( $n_x, n_y, n_z$  egész),  $\omega = ck$  és a  $\beta$  paramétert a  $c_k$  (komplex) együtthatók összességével azonosítjuk. A  $\{\gamma_\beta\}$  halmaz úgy áll elő, hogy a  $c_k$  együtthatókat egymástól függetlenül variáljuk. Feltesszük, hogy minden egyes  $c_k$  átlaga zérus,  $\bar{c}_k = 0$ .  $|\bar{c}_k|^2$  értékét úgy írjuk elő, hogy (3.2.1) teljesüljön. (3.2.4)-ben az  $A = (x, ct_1)$ ,  $B = (x, ct_2)$  választással  $\bar{s} = c(t_2 - t_1)$  és

$$\Delta s_\beta = \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} \gamma_\beta dt, \quad \overline{\Delta s^2} = \frac{c^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{|\bar{c}_k|^2}{\omega^2} (2 - e^{iks} - e^{-iks}) \quad (3.2.6)$$

adódik. Próbálkozzunk most a

$$|\bar{c}_k|^2 = A \cdot k^r \quad (3.2.7)$$

előírással. (3.2.6)-ból azt kapjuk, hogy

$$\overline{\Delta s^2} = \frac{A}{2\pi^2} \cdot \alpha_1 \cdot s^{-r-1}, \quad (3.2.8)$$

ahol  $\alpha_1 = \int_0^\infty du u^r (1 - \cos u)$ . Láthatjuk, hogy (3.2.1) teljesül az

$$r = -\frac{5}{3} \quad \text{és} \quad A \approx \frac{2\pi^2}{\alpha_1} \alpha^{4/3} \quad (3.2.9)$$

választás mellett. A  $\{\beta\} = \{\dots, c_k, \dots\}$  halmazban  $c_k$  eloszlásfüggvényének közelebbi alakjára nem lesz szükségünk.

Nagy  $k$  értékekre  $|\bar{c}_k|^2$ -nek csupán olyankor jut szerep a (3.2.1) kialakításában, amikor  $s$  kicsi. Ilyenkor (3.2.1)-nek nem tulajdonítunk fizikai jelentést. A megfelelő nagy ( $k > 10^{13} \text{ cm}^{-1}$ ) értékekre (3.2.7)-et a  $c_k = 0$  előírással pótoljuk. Ennek a „levágásnak” a részletei egyáltalán nem fontosak, látni fogjuk, hogy csak  $\gamma$  hosszuhullámú komponensei lépnek aktívan fel a számításokban.



### 3. A hullámfüggvény propagációja

1. Első lépésként azt vizsgáljuk, hogyan propagál a hullámmáplítúdó egy-egy rögzített  $S_\beta$ -n. Bár a végső célunk egy nemrelativisztikus sokrészecske egyenlet, önkénymentesen akkor járunk el, ha a görbült  $S_\beta$  kontinuumokon a relativisztikus hullámegyenletek görbült téridőre vonatkozó általánosításából indulunk ki. Egyetlen részecske általánosan relativisztikus hullámegyenletének elméletét H. Tetrode [30], H. Weyl [31], E. Schrödinger [32] és V. Bargmann [33] dolgozták ki. Spinnélküli részecske  $\varphi(x)$  hullámfüggvénye az

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi - \mu^2 \varphi = 0 \quad (3.2.10)$$

általánosított Klein—Gordon-egyenletnek engedelmeskedik. Ha a spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\varphi(x)$  spinorrá válik és (3.2.10) helyére az általánosított

$$\gamma^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k \right) \varphi = \mu \varphi \quad (3.2.11)$$

Dirac-egyenlet lép, amelyben  $\gamma^k$  és  $\Gamma_k$  koordinátafüggő  $4 \times 4$ -es mátrixok, melyek között a metrikus tenzor létesít kapcsolatot.  $\varphi(x)$  általános értelmezése egyik esetben sem problémamentes. Ha azonban a részecske lassú és a metrikus tenzor eltérés a Minkowski-féle értéktől kicsi, akkor mind (3.2.10)-ből, mind (3.2.11)-ből (iteráció után) az egyszerű

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \gamma_\beta(x, t) \cdot mc^2 \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (3.2.12)$$

egyenletre jutunk [34].  $m$  a részecske tömege és  $\psi$  az  $\exp \left[ -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right]$  tényező le-  
választásával áll elő  $\varphi$ -ből.

A (3.2.12) egyenlet már közvetlenül értelmezhető és általánosítható sok részecske esetére, pl. a következő alakban:

$$\left( \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + \sum_i m_i c^2 \gamma_\beta(x_i, t) + V(x_i) \right) \Psi_\beta(x_i, t) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\beta(x_i, t), \quad (3.2.13)$$

ahol  $m_i$  az  $i$ -ik rész tömegét,  $V(x_i)$  a teljes potenciális energiát jelenti.  $V$  pontos alakjából csak annyit használunk ki, hogy a részecskék közötti kölcsönhatást közvetítő erőterhez tartozó tehetetlen tömeg  $\sum_i m_i$  mellett elhanyagolható. Ha pl. egy nem túl sűrű gázra gondolunk, a potenciális energiát  $V = \sum_{i \neq k} V_{ik}(x_i, x_k)$  alakban vehetjük fel,  $m_i$  és  $x_i$  az egyes atomok tömege és koordinátája. Ha egy szilárd anyagszemcsét, vagy egy fényképlemezt vizsgálunk, az  $i$  index elektronokra és atommagokra vonatkozhatik. Fotonok vagy néhány relativisztikus sebességű atomi részecske bevonása a formalizmusba nem okoz nehézséget, mert járulékluk a  $(\gamma_{ik})$ -t tartalmazó tagokhoz elenyésző, egyszerűség kedvéért azonban a (3.2.13) egyenletnél maradunk, a spineket is elhanyagoljuk.



2. Ahogy a fizikai téridőt a teljes  $\{S_\beta\}$  halmaz reprezentálja, a  $t=0$  időpillanatban megadott  $\bar{\psi}(x_i, 0) = \Phi(x_i)$  kezdőállapotfüggvényhez tartozó,  $t$  időpontbeli fizikai állapotfüggvénynek a teljes  $\{\psi_\beta(x_i, t)\}$  függvényhalmazt fogjuk — bizonyos megszorításokkal — megfeleltetni, ahol  $\psi_\beta(x_i, t)$  a (3.2.13) egyenlet  $\psi_\beta(x_i, 0) = \Phi(x_i)$  kezdőfeltételhez tartozó megoldása. Jelölje  $q$  összefoglalóan az  $x_i$  koordinátákat és legyen  $\psi_0(q, t)$  (3.2.13)-nak a  $V'_\beta(q, t) = \sum_i m_i c^2 \gamma_\beta(x_i, t) = 0$ , azaz valamennyi  $c_k = 0$  esethez tartozó megoldása. Gyors orientáció érdekében tegyük fel egy pillanatra, hogy el nem tűnő  $V'_\beta(q, t)$  esetében (3.2.13) megoldása egyszerűen

$$\psi_\beta(q, t) = \exp(i\Phi_\beta(q, t)) \cdot \psi_0(q, t) \quad (3.2.14)$$

alakú, ahol

$$\Phi_\beta = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t V'_\beta(q, t') dt'. \quad (3.2.14a)$$

(3.2.5)-re tekintve rögtön látjuk a következőket. a) Ha a konfigurációs tér  $q = q_1$  pontját rögzítjük és  $\beta$ -t, azaz a  $c_k$  együtthatók sorozatát a már előírt módon variáljuk,  $\Phi_\beta(q_1, t)$  zérus körül ingadozik. b) Ha egy  $q_1, q_2$  pontpárra nézve vizsgáljuk  $\Phi_\beta^{(1)} = \Phi_\beta(q_1, t)$  és  $\Phi_\beta^{(2)} = \Phi_\beta(q_2, t)$  változását, akkor  $q_2 \rightarrow q_1$  esetén  $\Phi_\beta^{(2)} \approx \Phi_\beta^{(1)}$  minden  $\beta$ -ra, de ha  $q_2$  és  $q_1$  távolsága a konfigurációs térben nagy, akkor  $\Phi_\beta^{(2)}$  és  $\Phi_\beta^{(1)}$  egymáshoz képest rendszertelenül változnak. Amennyiben  $\psi_0(q, t)$  történetesen  $\psi^{(1)}(q) + \psi^{(2)}(q)$  alakú, ahol  $\psi^{(1)}(q)$  és  $\psi^{(2)}(q)$  külön-külön Dirac-féle  $\delta$  függvény jellegű, éspedig az egymástól távoli  $q_1$ , ill.  $q_2$  körül különbözik zérustól, akkor

$$\psi_\beta(q, t) \approx e^{i\Phi_\beta^{(1)}} \cdot \psi^{(1)} + e^{i\Phi_\beta^{(2)}} \psi^{(2)} \quad (3.2.15)$$

Amíg  $\psi_0(q, t)$  egyetlen koherens hullámfüggvény, addig kellőképpen masszív rendszer és elegendő nagy  $t$  esetén a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz már nem tekinthető egyetlen koherens állapot reprezentánsának. A

$$\varrho = \bar{\varrho}_\beta = |\psi_\beta(q, t) \times \psi_\beta(q, t)| \quad (3.2.16)$$

egyenlettel definiált sűrűségmátrix  $\overline{\exp(i\Phi_\beta^{(1)}) \cdot \exp(-i\Phi_\beta^{(2)})} \approx 0$  esetén a

$$\left[ P_1; \frac{\psi^{(1)}}{\langle \psi^{(1)} | \psi^{(1)} \rangle^{1/2}}, P_2; \frac{\psi^{(2)}}{\langle \psi^{(2)} | \psi^{(2)} \rangle^{1/2}} \right]$$

keverék sűrűségmátrixával egyezik meg, ahol  $P_i = \langle \psi^{(i)} | \psi^{(i)} \rangle$ . A felülvonás természetesen  $\beta$ -ra való átlagolást jelent. A fenti leegyszerűsített példa lényegében egyértelműen sugallja a hullámfüggvény „fizikai propagációjának” a törvényét a fizikai téridőn: amíg a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz egyetlen sugárhoz tartozik, addig a „fizikai Schrödinger-egyenletet” (a különböző  $S_\beta$ -khoz tartozó Schrödinger-egyenletek halmazát) követi; mielőtt  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  odáig fejlődik, hogy több sugarat reprezentál, a megfelelő  $P_i$  súllyal stochasztikus redukciót kell rajta végrehajtani.

3. A tényleges  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz a (3.2.14) képlettel megadottnál bonyolultabb. A továbbiak alapja mégis, az az egyszerű bizonyítása ellenére igen fontos tétel, amit (3.2.15), illetve (3.2.16) kapcsolata sugalmaz.



Tétel. Legyen adva normált függvények egy  $\{\psi_\beta\}$  halmaza a  $H$  Hilbert-térben. Tegyük fel, hogy létezik  $H$  egy  $M = \sum_i H_i$  felbontása alterek direktösszegére a következő tulajdonsággal. Ha tetszőleges  $\beta$ -ra

$$\psi_\beta = \sum_i \sqrt{P_i} \cdot \psi_\beta^i$$

ahol

$$\psi_\beta^i \in H_i \quad \text{és} \quad \langle \psi_\beta^i | \psi_\beta^i \rangle = 1 \quad (3.2.17)$$

és teljesülnek a következő feltételek

$$1) \text{ A } P_i \text{ nem negatív szám nem függ } \beta\text{-tól} \quad (3.2.18a)$$

$$2) \overline{|\psi_\beta^i\rangle\langle\psi_\beta^k|} = 0, \text{ ha } i \neq k \quad (3.2.18b)$$

3) Minden  $H_i$  irreducibilis, azaz nem bontható tovább úgy alterekre, hogy a  $\{\psi_\beta^i\}$  függvényhalmazra a fenti tulajdonságok fennálljanak, (3.2.18c) akkor a  $H = \sum_i H_i$  felbontás a sorrendtől (és az üres,  $P_i=0$ -val jellemzett alterek direkt összegének felbontásától) eltekintve egyértelmű.

Az egyszerű, de hosszadalmas bizonyítás helyett inkább illusztráljuk a tételt néhány modelljellegű példán. Legyen  $H$  kétdimenziós és legyenek  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$ , illetve

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{és} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{ortonormált bázisvektorok. Vizsgáljuk}$$

a  $\{\psi_\beta\} = \{a\varphi_1 + b\varphi_2\}$  függvényhalmazt, ahol

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (3.2.19)$$

a  $\beta$  indexet az  $a, b$  értékpárral azonosítjuk, s a halmaz definícióját azzal tesszük teljessé, hogy az  $a, b$  változópár számára valamilyen (3.2.19)-nek eleget tevő eloszlás-függvényt írunk elő.  $\psi_\beta$  természetesen

$$\psi_\beta = a'u_1 + b'u_2 = \frac{a+b}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{a-b}{\sqrt{2}}u_2$$

alakba is írható. Ha (3.2.19) mellé nem kötjük ki azt is, hogy  $|a|$  és  $|b|$  állandó, hanem megengedjük, hogy a fázisok mellett az amplitúdó is „teljesen” rendszertelenül változzék (pl. úgy, hogy  $|\bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 = \frac{1}{2}$ ,  $\overline{ab^*} = \overline{ba^*} = 0$  legyen), akkor  $\overline{a\varphi_1}\langle b\varphi_2| = 0$

és  $\overline{a'u_1}\langle b'u_2| = 0$  egyaránt igaz,

$$\overline{|\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta|} = \frac{1}{2}|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \frac{1}{2}|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| = \frac{1}{2}|u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}|u_2\rangle\langle u_2|$$

alakban írható  $H$  kétféle felbontása (egydimenziós) alterekre egyenrangú [de (3.2.18) egyikben sem teljesül]. Ha azonban egy olyan függvényhalmazt vizsgálunk, amelynek elemeire a  $\psi_\beta = a\varphi_1 + b\varphi_2$  felbontásban mondjuk  $|a|=|b|=\frac{1}{2}$  és csupán  $a$  és  $b$  fázisa változik külön-külön rendszertelenül, akkor erre nézve  $H$  olyan felbontása, amely a (3.2.18) követelménynek eleget tesz, egyértelművé válik. (3.2.18)-nak csak a  $\varphi_\beta = a\varphi_1 + b\varphi_2$  felbontás felel meg, pl.  $\psi_\beta = a'u_1 + b'u_2$  már nem.



A  $\{\psi_\beta\}$  halmazzal természetesen az  $\{s_\beta\}$  kontinuumhalmazon kifejlődő  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmazt kívánjuk szimulálni, s az állapotér felbontásával a „hullámfüggvény redukcióját” előkészíteni. A fentiekből esetleg arra lehetne gondolni, hogy a redukció előkészítő lépése a  $\varrho = |\overline{\psi_\beta} \times \psi_\beta|$  sűrűségmátrix” diagonalizálása s a (3.2.18) kikötés szerepe csupán annyi, hogy szükség esetén a diagonalizálást egyértelművé tegye. Nem erről van azonban szó, mint azt a következő példa mutatja. Legyen

$$\psi_\beta = A \cdot e^{i\Phi_1} \varphi_1 + B e^{i\Phi_2} \varphi_2 \quad (3.2.20)$$

ahol  $A$  és  $B$  rögzített érték ( $|A|^2 + |B|^2 = 1$ ),  $\beta = (\Phi_1, \Phi_2)$ ,  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  eloszlásfüggvénye pedig legyen olyan, hogy  $\Phi_1 - \Phi_2$  zérus körül ingadozik, de nem olyan nagy amplitúdóval, hogy  $e^{i\Phi_1} \cdot e^{-i\Phi_2} \approx 0$  teljesüljön. Legyen pl.

$$\overline{e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)}} = \eta \quad (0 < \eta < 1).$$

Akkor

$$\varrho = |\overline{\psi_\beta} \times \psi_\beta| = \begin{pmatrix} |A|^2 & AB^* \eta \\ A^* B \eta & |B|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.21)$$

a  $\varphi_1, \varphi_2$  bázisvektorokra vonatkoztatva.  $\varrho$  természetesen  $\eta$  minden értékére diagonalizálható, és pedig egyértelműen. A sajátfüggvények azonban általában a  $\varphi_1, \varphi_2$ ,  $A\varphi_1 + B\varphi_2$  függvények egyikéhez sem hasonlítanak, ugyanakkor a (3.2.20) halmazra nézve a (3.2.18) feltételek  $H$  semmilyen felbontása mellett nem teljesülnek:  $H$  irreducibilis. Kivételt csak a két szélső eset képez, amikor ti.  $\eta = 1$ , illetve  $\eta \approx 0$ . A fizikai hullámfüggvény propagációjának szimulálása szempontjából  $\eta = 1$  felel meg a  $t = 0$  kezdőpillanatnak. Ekkor  $\Phi_1 = \Phi_2$ , a  $\{\psi_\beta\}$  halmaz egyetlen sugarat definiál,  $H$ -nak a (3.2.18) feltételeknek megfelelő felbontásában az egyik alteret éppen  $A\varphi_1 + B\varphi_2$  „feszíti ki”, ( $P_1 = 1$ ) az erre merőleges alterhez tartozó  $P_2$  pedig zérus.  $\eta$  csökkenése  $t$  növekedténél felel meg: a „hullámfüggvény” határozatlanná válik, koherenciája romlik.  $H$  azonban irreducibilis, ezért „fizikai jelentést” továbbra is a határozatlan hullámfüggvénynek tulajdonítunk inkább, mint  $\varrho = |\overline{\psi_\beta} \times \psi_\beta|$  sajátvektorainak. Mikor  $\eta$  zérus közelébe csökken,  $H$  újra reducibilissé válik.

#### 4. Szétfolyás és redukció

1. A (3.2.18) tétel közvetlen alkalmazásának elsősorban nem az az akadálya, hogy a (3.2.13) egyenletek megoldása nem (3.2.14) alakú, hanem az, hogy — még ha a (3.2.14) közelítő megoldásokat használjuk is —  $\psi_0(q, t)$  általában *nem olyan* alakú, hogy  $|\psi_0|^2$  a konfigurációs tér két egymástól távoli pontjának környezetében különbözik zérustól. A fizikai hullámfüggvény propagációjának leírásához ezért a konfigurációs teret először *cellákra* kell osztanunk. Röviden, a cellabeosztás szerepe a következő lesz. Olyan állapotfüggvénnyel indulunk, amely csupán egyetlen cellán belül különbözik számottevően zérustól. Amikor a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  „fizikai hullámfüggvény” már annyira szétfolyt, hogy a szomszédos cellákra is kiterjed, stochasztikus redukciót hajtunk végre, a megfelelő valószínűséggel, újra egyetlen cellára.

A cellák térfogatát pontosan az a követelmény fogja megszabni, hogy az egyes cellákat (a koordinátareprezentációban egy-egy cellára korlátozódó hullámfüggvények halmazát) éppen a (3.2.17) — (18)-ban szereplő irreducibilis  $H_i$  alterekkel lehessen köze-



lítőleg azonosítani. A reális  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmazra a (3.2.18) feltételek mindenképpen csak közelítőleg teljesülhetnek, a teljesülés mértékének azonban „éles” maximuma van egy bizonyos cellanagyságnál.

A későbbiekben felírjuk  $\psi_\beta(q, t)$  gyakorlatilag pontos alakját. Ennek és a (3.2.14)—(3.2.15) közelítésnek eltérése, mint látni fogjuk, a konfigurációs tér egy-egy kiragadott pontjában jelentős lehet, a cellanagyságra vonatkozó következtetéseket azonban nem befolyásolja, hogy a pontos  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmazt, vagy a (3.2.14)—(3.2.15) közelítést vizsgáljuk. Ezért egyelőre az utóbbinál maradunk. (3.2.14)—(15)-re hivatkozva a cellanagyság így is jellemezhető: amíg  $t$  olyan kicsi, hogy  $\psi_\beta(q, t)$  még nem „folyt ki” számottevően a kezdőcellából, addig a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz inkább egyetlen sugarat ábrázol, mint egynél többet, ha azonban  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  már egynél több cellára terjed ki, akkor ennek a fordítottja igaz.

Míg a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz vizsgálata a cellanagyságot lényegében megszabja, a (3.2.18) feltételek *közelítő teljesülésével* szoros összefüggésben a cellák közép-pontjának megválasztása, másszóval a beosztás pontos elhelyezkedése a konfigurációs térben, mint általában pl. a statisztikus mechanika fázisterében is, önkényes, a (3.2.18) feltételek teljesíthetőségének mértékét nem befolyásolja. Esetünkben ennek a ténynek fontos szerep jut: lényegében önkénymentessé teszi annak a kritikus  $t_2$  időtartamnak a nagyságát, amely alatt a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz szétfolyása már „számottevőnek” tekinthető. A szétfolyást akkor fogjuk számottevőnek (s a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmazt redukcióra érettnak) tekinteni, ha  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  súlyát (vetületének normáját) az egyes cellákban már nem befolyásolja jelentősen a cellabeosztásnak a két szomszédos cella központja közötti távolság felével való eltolás. Nyilvánvaló, hogy  $t_1$  nagyságrendben az az idő, amely alatt a konfigurációs tér azon tartományának, amelyben  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  zérustól különbözik, lineáris mérete („átmérője”) megduplázódik. Félreértések elkerülésére hangsúlyozzuk, hogy akár a cellaátmérő, akár a  $t_1$  szétfolyási idő meghatározása kb. ugyanolyan mértékben önkényes lesz, mint pl. egy haranggörbe szélességének a definíciója. A hangsúly azonban azon van, hogy az ilyen módon egyetlen „szétfolyás—redukció” ciklus alatt a hullámfüggvény propagációjában kényszerűségből generált bizonytalanság nem haladja meg azt a bizonytalanságot, ami a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  „fizikai hullámfüggvényben” ugyanezen idő alatt spontán (a  $\{v'_\beta(q, t')\}$  zavarótag hatására) keletkezik.

2. (3.2.14) és (14a) tanúsága szerint  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  viselkedésének kulcsát a  $\Phi_\beta(q, t)$  fázisok halmaza tartalmazza. Technikai szempontból ennek az értekezésnek a fő feladata éppen  $\{\Phi_\beta\}$  analízise volt. Összefoglaljuk ennek az analízisnek általános eredményeit, amelyek kisebb, a konkrét rendszertől függő módosításoktól eltekintve tetszőleges rendszerre érvényesek.

Legyen  $q_1$  és  $q_2$  a konfigurációs tér két pontja. Egy pillanatra ejtsük el a  $\psi_\beta(q, 0)$ -ra vonatkozó azon megszorítást, hogy az csak egyetlen (az alábbiakban meghatározandó nagyságú) cellában különbözik zérustól. A (3.2.15a) egyenlettel definiált  $\Phi_\beta(q, t)$  a  $t=0$  pillanatban  $\beta$ -tól függetlenül minden  $q$ -ra zérus és így zérus  $|\Phi_\beta(q, 0)|^2$  halmazátlaga is:  $|\Phi_\beta(q, 0)|^2=0$ . Növekvő  $t$ -vel  $|\Phi_\beta(q, t)|^2$  eléggé bonyolult módon, esetleges gyors oszcillációktól eltekintve folyamatosan növekszik. Bennünket azonban az érdekel, hogy a fázis változása  $\beta$ -val a  $q_1$ , ill.  $q_2$  pontban egymáshoz képest mennyire rendszertelen, más szóval a  $\Phi_\beta(q_1, t) - \Phi_\beta(q_2, t)$  fáziskülönbség eloszlás-függvényére vagyunk kíváncsiak.



Feltehetjük, hogy a  $q_1$  és  $q_2$  pontok között a távolság fogalmát már valamilyen alkalmas módon definiáltuk. Ha  $q$  — mint eddig egyszerűség kedvéért feltettük — az  $x_i$  koordináták összességét szimbolizálja, akkor ez a távolság egyszerűen  $(\sum_i |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^2)^{1/2}$ , az alkalmazások során azonban az  $x_i$ -k megfelelő kombinációit fogjuk új változókként bevezetni. Ez esetben  $q$  az új koordináták terében szimbolizál egy pontot s a távolság kifejezését az új koordinátákból kell képezni.

Jelölje a  $q_1$  és  $q_2$  pontok távolságát „ $a$ ”.

$$\Delta\Phi_\beta = \Phi_\beta(q_1, t) - \Phi_\beta(q_2, t)$$

az összes benne szereplő változótól bonyolultan függ, a relatív fázis

$$\Delta^2(a, t) = |\overline{\Phi_\beta(q_1, t)} - \overline{\Phi_\beta(q_2, t)}|^2$$

szórásnégyzete azonban már csupán „ $a$ ” és  $t$  — jellegzetes — függvénye. (Természetesen  $\overline{\Phi_\beta(q_1, t)} - \overline{\Phi_\beta(q_2, t)} = 0$ .)

Rögzített „ $a$ ”-ra  $\Delta^2(a, t)$  először — igen rövid ideig — gyorsan növekszik  $t$ -vel, utána gyakorlatilag állandóvá válik s egy

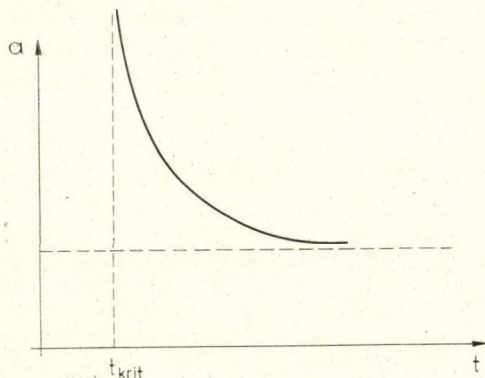
$$\Delta^2(a) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta^2(a, t)$$

határértékhez tart aszimptotikusan.

Tegyük fel, hogy — a továbbiakban irreálisztikusnak, fizikailag megvalósíthatatlannak minősített módon — a  $t=0$  pillanatban egy a konfigurációs térben nem korlátozott, igen nagy térfogatra kiterjedő  $\psi_\beta(q, 0)$  függvénnyel „indítjuk” a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  fizikai állapotfüggvényt. Nyilvánvaló, hogy  $t$  idő múlva a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  hullámfüggvény koherenciája megszűntnek tekinthető minden olyan  $q_1, q_2$  pontpár között, amelyre nézve  $\Delta^2(a, t) \gg \pi^2$ , hiszen ilyen pontpárra nézve a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  által képviselt relatív fázis teljesen bizonytalan. Egy-egy olyan kis „ $a$ ” lineáris méretű tartományon belül, amelyre  $\Delta^2(a, t) \ll \pi^2$ ,  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  egyetlen sugár. Egy közelítőleg koherens tartomány maximális lineáris méretét a

$$\Delta^2(a, t) \approx \pi^2 \quad (3.4.1)$$

egyenlet definiálja. (3.4.1)-nek egy  $t_{\text{krit}}$  értéktől felfelé van megoldása. Az összefüggő  $(a, t)$  értékeket az 1. ábrán a kihúzott görbe mutatja.



1. ábra

Ha tetszőleges  $t > t_{\text{krit}}$  időpontban a konfigurációs teret a görbéről leolvasott „ $a$ ” sugarú cellákra osztjuk, a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz megfelelő vetületei a (3.2.18) feltételek jó közelítéssel kielégülnek. Ha azonban  $t$  a görbe alsó aszimptotikus szarához tartozó  $t$  értéktartomány és  $t_{\text{krit}}$  közé esik, ennek a (nagyátmérőjű) cellabeosztásnak nincs fizikai jelentősége. A redukált hullámfüggvény koherenciája rohamosan tovább romlana, a  $t$  pillanatban koherens tartomány kisebb, külön-külön koherens résztartományokra bomlana fel.



A fizikailag reális  $2R$  cellaátmérőt a

$$\Delta^2(2R) \approx \pi^2 \quad (3.4.2)$$

egyenlet definiálja.

Az előbbiekkal összhangban könnyű átlátni, hogy ennél lényegesen kiterjedtebb hullámfüggvény egyáltalán nem valósulhat meg, ezért kezdőállapotként sem alkalmazható. Ha ugyanis a feltételezett kezdőállapot-függvény a konfigurációs tér  $4R$  vagy ennél nagyobb átmérőjű tartományára terjed ki, a (3.2.13) egyenlet alapján bekövetkező további szétfolyás mindig sokkal lassúbb folyamat, mint a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  halmaz külön-külön koherens, egymással azonban inkoherens részekre való felbomlása, ezért nagykiterjedésű, koherens fizikai állapotfüggvény létrejöttéhez nincs idő.

A (3.2.4) egyenlettel definiált cellaátmérő fizikai jelentőségét az adja, hogy az ekkora tartományra koncentrált állapotfüggvény viszonylag hosszú ideig koherens marad. De facto, a közelítő koherencia tetszőleges ideig fennmaradna, ha a  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  fizikai hullámfüggvény a (3.2.13) egyenleteket követve a cellából ki nem folyna, pontosabban szét nem folyna. Szétfolyás azonban mindig fellép, s ezzel párhuzamosan a koherencia romlani kezd,  $\{\psi_\beta(q, t)\}$ -t azonban a fizikai állapot elfogadható reprezentánsának tekintjük egészen addig, amíg (3.2.13)-at követve  $\{\psi_\beta(q, t)\}$  annyira szét nem folyik, hogy átmérőjét  $\approx 4R$ -nek kell tekinteni.

3. Amikor — mondjuk a  $t=t_2$  időpillanatban — ez bekövetkezett, redukciót hajtunk végre.  $\psi_\beta(q, t_2)$ -nek az ezt előkészítő (3.2.17) típusú felbontására a legegyszerűbbnek látszó utasítás a következő:

$$\psi_\beta^i(q, t_2) = N_i \pi_i(q) \cdot \psi_\beta(q, t_2), \quad \pi_i(q) = \begin{cases} 1 & \text{ha } q \in C_i \\ 0 & \text{ha } q \notin C_i, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

ahol  $C_i$  az  $i$ -ik cellát jelenti, az  $N_i$  normálási tényezőt pedig úgy választjuk, hogy  $\langle \psi_\beta^i | \psi_\beta^i \rangle = 1$  legyen. Eszerint  $\psi_\beta^i(q, t_2)$  egyszerűen  $\psi_\beta(q, t_2)$ -nek az  $i$ -ik cellára való normált projekciója lenne. (3.2.18a) így pontosan kielégül, (3.2.14) felhasználásával

$$P_i = \langle \pi_i \psi_\beta | \pi_i \psi_\beta \rangle = \langle \pi_i \psi_0 | \pi_i \psi_0 \rangle,$$

valóban független  $\beta$ -tól. A cellahatároknál fellépő éles „levágás” miatt azonban (3.2.18b) és így a sztochasztikus redukciónak mintegy létalapját képező

$$\varrho \equiv |\psi_\beta(q, t_2)\rangle \langle \psi_\beta(q, t_2)| = \sum_i P_i \varrho_i \equiv \sum_i P_i |\psi_\beta^i(q, t_2)\rangle \langle \psi_\beta^i(q, t_2)| \quad (3.4.4)$$

egyenlőség csak rosszul teljesül. Ez nem is csoda, ha meggondoljuk, hogy a konfigurációs tér koordinátáihoz képest *komplementer*, némileg szimbolikusan  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$  típusú mennyiségek  $\{\psi_\beta(q, t_2)\}$  által képviselt valószínűségi eloszlását a  $\{\psi_\beta(q, t_2)\} \rightarrow$  valamelyik  $\{\psi_\beta^i(q, t_2)\}$  redukció az éles levágással drasztikusan megváltoztatná, minthogy  $\psi_\beta(q, t_2)$  a cellahatárokon nem zérus.

Éppen ezért  $\psi_\beta(q, t_2)$  közelítőleg (3.2.17) típusú felbontása céljából  $\psi_\beta^i(q, t_2)$ -t a következőképpen definiáljuk:

$$\psi_\beta^i(q, t_2) = N_i f_i(q) \cdot \psi_\beta(q, t_2), \quad N_i = \langle f_i(q) \psi_\beta(q, t_2) | f_i(q) \psi_\beta(q, t_2) \rangle^{-1/2} \quad (3.4.5)$$

ahol  $f_i(q)$  az  $i$ -ik cella fölé boruló (valós, pozitív) haranggörbe jellegű függvény, amelynek normája megegyezik a (3.4.3)-ban szereplő  $\pi_i(q)$  normájával, más szóval



a cella  $\tau$  térfogatával. Ha  $q_i$  az  $i$ -ik cella középpontja és  $|q - q_i|$  a  $q$  pont távolsága a cella középpontjától, akkor a legegyszerűbb választás

$$f_i(q) = C \exp(-|q - q_i|^2/2R^2), \quad \langle f_i | f_i \rangle = \tau \quad (3.4.6)$$

ahol  $2R$  a legkisebb előforduló távolság két cellaközéppont között, azaz a (3.4.2) egyenlet gyöke.

(3.4.5) elfogadásával a  $\langle \psi_\beta^i | \psi_\beta^k \rangle = 0$ , ha  $i \neq k$  és  $\psi_\beta = \sum_i \sqrt{P_i} \psi_\beta^i$  egyenlőségek is,

amelyek pedig a (3.4.3) választással pontosan fennálltak, csupán közelítőleg teljesülnek. Ugyanakkor azonban (3.4.4) is jó közelítéssé válik. A (3.4.3) definíció mellett, ha  $q_1$  és  $q_2$  egymáshoz közeli, de egy cellahatár két különböző oldalán elhelyezkedő pontok, akkor (3.4.4) bal oldalának koordinátareprezentációban megadott  $\varrho(q_1, q_2)$  mátrixeleme kb.  $|\Psi_0(q, t_2)|^2$ -tel egyenlő, ahol  $q \approx q_1, q_2$ , míg a jobboldalon ugyanezen mátrixelem zérus. A (3.4.5) választással azonban (3.4.4) ilyenkor is kielégül, azzal összefüggésben, hogy  $\sum_i f_i^2(q) \approx 1$ . Ezt a tényt érdemes másképpen is kifejezni.

Szemmel látható, hogy a (3.4.6)-tal definiált  $f_i(q)$  faktor az  $i$ -ik cella térségében a koordinátákhoz képest komplementer,  $\frac{\partial}{\partial q}$  típusú mennyiségek  $\psi_0(q, t_2)$  által kép-

viselt szórását nagyságrendben  $\sim \frac{1}{R}$ -rel növeli. Nagyságrendben ugyanekkora értékkel növekszik azonban ez a szórás már azáltal is, hogy  $\psi_0(q, t_2)$  helyére a  $\{\psi_\beta(q, t_2)\}$  halmaz kerül, hiszen (3.4.2) tanúsága szerint a  $\Phi_\beta$  fázis is egységnyi nagyságrendű (véletlenszerű) változást szenved, ha a  $q$  pontot  $\approx R$  távolsággal arrébb mozdítjuk.

A redukció maga abban áll, hogy a  $t_2$  időpillanatban új,

$$P_i = \langle f_i \psi_\beta(q, t_2) | f_i \psi_\beta(q, t_2) \rangle = \langle f_i \psi_0(q, t_2) | f_i \psi_0(q, t_2) \rangle$$

valószínűséggel a  $C_i$  cellára koncentrált hullámfüggvényt írunk elő, mint kezdő-állapotfüggvényt a (3.2.13) egyenletek számára s ezzel új szétfolyás—redukció ciklus veszi kezdetét. Mi legyen a  $C_i$  cellára vonatkozó új kezdőállapot? Válasz: a  $\{\psi_\beta^i(q, t_2)\}$  halmaz elemeiből alkotott bármilyen lineárkombináció lehetne új kezdőállapot, sőt bármely olyan állapotfüggvény, amelynek fizikai tartalma összhangban van a

$$\varrho_i \equiv |\psi_\beta^i(q, t_2)\rangle \langle \psi_\beta^i(q, t_2)|$$

„redukált” sűrűségmátrixszal. Hogy itt az összhang szó jelentése világos legyen, azt kell tisztáznunk, hogy milyen fizikai tartalmat tulajdonítunk a  $\{\psi_\beta^i(q, t_2)\}$  halmaznak. Mint a 3. pont végén már utaltunk rá, a  $\varrho_i$ -t diagonalizáló (a  $\{\psi_\beta^i\}$  halmaz minden elemétől általában jelentősen eltérő) állapotfüggvényeket érdektelennek minősítjük, a  $\{\psi_\beta^i(q, t_2)\}$  halmazt *egyetlen*, bizonyos mértékig határozatlan fizikai állapotfüggvény matematikai modelljének tekintjük. Az *ortodox kvantummechanika* szerint egy hullámfüggvénynek tulajdonított fizikai tartalom éppen azon részének tulajdonítunk továbbra is hagyományos jelentést, amely rész nem érzékeny arra, hogy a  $\{\psi_\beta^i(q, t_1)\}$  halmaz melyik elemét vizsgáljuk. (3.2.14) és (3.2.15) tanúsága szerint a viszonylag kisszámú mikroszkopikus szabadsági fokot szeparálhatóan tartalmazó hullámfüggvények esetében a hullámfüggvény ezen szabadsági fokokra vonatkozó tartalma mindig független  $\beta$ -tól, a nagyon összetett korrelációk azonban



elmosódnak. Az új kezdőállapottal szemben támasztott igény ezek után kvalitatíve világos, és világos az is, hogy *nem szükséges* a  $t_2$  pillanatban a (3.2.13) egyenletben minden  $S_\beta$  kontinuumra ugyanazt a kezdőállapotot előírni: a legegyszerűbb eljárás minden  $S_\beta$ -n lényegében az ugyanezen  $\beta$ -hoz tartozó  $\psi_\beta^i(q, t_2)$ -t új kezdőfüggvénynek minősíteni.

Így természetesen annak a szükségessége is elesik, hogy a  $t=0$  pillanatban, amely végeredményben ugyanolyan cikluskezdő pillanat, mint  $t_2$ , az összes  $S_\beta$ -ra vonatkozólag közös kezdőállapottal induljunk. Valóban, a  $t=0$  pillanatban azonos elemekből álló  $\{\psi_\beta(q, 0)\}$  halmaz az egész koncepciónkkal ellentétes, megengedhetetlenül gazdag információtartalmú fizikai hullámfüggvényt reprezentálna.

4. Ez az aszimmetria a szétfolyás—redukció ciklus eleje és vége között eltűnik, ha egy-egy

$$t_{(k)} < t < t_{(k+1)} = t_{(k)} + t_2$$

szétfolyási szakasz alatt (az amúgy is durva közelítést jelentő) (3.2.14) és (3.2.15) helyett (3.2.13) megoldásaként a gyakorlatilag pontos

$$\psi_\beta(x_i, t) = \psi_0(x_i - \varepsilon_\beta(x_i, t)t) \exp(i\Phi_\beta(x_i, t)) \cdot \exp(i\tilde{\Phi}_\beta(x_i, t)) \quad (3.4.7)$$

alakot használjuk. A jelölések magyarázatát nyomban megadjuk. Egyszerűség kedvéért minden mennyiséget a problémában szereplő atomi részecskék közönséges koordinátáival kifejezett függvényként képzelünk el.

$\psi_0(x_i, t)$  nem más, mint a (3.2.13) egyenlet  $\beta \equiv (\dots, c_k, \dots) = 0$  választáshoz tartozó, az induló cellának megfelelő kezdőfeltételt kielégítő megoldása. Ha a megelőző,  $t_{(k-1)} < t < t_{(k)}$  expanzíós szakasz legvégén a  $\beta=0$ -hoz tartozó megoldást  $\psi_0(x_i, t_{(k)}-0)$  jelöli és ha feltesszük, hogy a  $(t_{(k-1)}, t_{(k)})$  szakasz végén éppen az  $l$ -ik cellára történik a redukció, akkor

$$\psi_0(x_i, t_{(k)}+0) = N_l f_l \cdot \psi_0(x_i, t_{(k)}-0), \quad (3.4.8)$$

ahol  $N_l$  és  $f_l$  jelentését (3.4.5) és (3.4.6) kapcsán már megismertük.

$\varepsilon_\beta(x, t)$  annak az oszcillációnak a pillanatnyi kitérése, amelyet egy az  $x$  pont környezetében tartózkodó  $m$  tömegpont az  $mc^2\gamma_\beta(x, t)$  zavaró potenciál hatására végez, a klasszikus mozgásegyenletnek engedelmessé. A legegyszerűbb módja annak, hogy  $\varepsilon_\beta(x, t)$ -nek szabatos jelentést adjunk, a következő. Legyen

$$\tilde{\gamma}_\beta(x, t') = \gamma_\beta(x, t') e^{-\mu(t-t')} \quad (3.4.9)$$

más szóval kapcsoljuk be *adiabatikusan* a zavaró potenciált, és pedig legyen

$$\text{néhányszor } \mu \approx t_2^{-1}. \quad (3.4.10)$$

Akkor  $\varepsilon_\beta(x, t) = \xi_\beta(x, t)$ , ahol

$$m\ddot{\xi}_\beta(x, t') = -\text{grad}(mc^2 \tilde{\gamma}_\beta(x, t'), \xi_\beta(-\infty) = \dot{\xi}_\beta(-\infty)) = 0. \quad (3.4.11)$$

A (3.4.11)-nek eleget tevő  $\xi_\beta(x, t')$ -t szerint differenciálva definiálható a  $\dot{\xi}_\beta(x, t')$  oszcillációs sebesség. Ennek birtokában

$$\tilde{\Phi}_\beta(x_i, t) = -\frac{1}{\hbar} \sum_i \frac{1}{2} m_i \int_{-\infty}^t \dot{\xi}_\beta^2(x_i, t') dt'. \quad (3.4.12)$$



Végezetül

$$\begin{aligned}\Phi_\beta(x_i, t) &= -\frac{1}{\hbar} \sum_i m_i c^2 \int_{-\infty}^t \tilde{\gamma}_\beta(x_i, t') \approx \\ &\approx -\frac{1}{\hbar} \sum_i m_i c^2 \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} \left( \frac{c_k}{-i\omega} e^{i(kx - \omega t)} + \frac{c_k^*}{i\omega} e^{-i(kx - \omega t)} \right),\end{aligned}\quad (3.4.13)$$

ahol a második egyenlőség felírásánál felhasználtuk (3.2.5)-öt és az integrálás elvégzése után  $\mu$  helyére zérust írtunk.

Hasonlítsuk össze a (3.4.7), (3.4.13) megoldást a (3.2.14), (3.2.15) megoldással. A fő különbségek a következők.

a) A cikluskezdő  $t_{(k)} + 0$  pillanatban a  $\Phi_\beta(x_i, t_{(k)} + 0)$  fázisfüggvény nem zérus, hanem ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a ciklus végén. A fizikai hullámfüggvény koherenciája tehát a ciklus kezdetén sem jobb, mint — egyetlen cellára kiterjedő tartományban — a ciklus végén.

$\Phi_\beta$  új alakja mellett a cellaátmérő definíciója egyszerűen

$$\Delta^2(a) \equiv |\Phi_\beta(q_1, t) - \Phi_\beta(q_2, t)|^2 = \pi^2, \quad |q_1 - q_2| = a, \quad (3.4.14)$$

lesz, ahol újra kifejezésre juttattuk, hogy az alkalmazásokban az  $x_i$ -k alkalmas kombinációt használjuk koordinátáknak s a  $q_1, q_2$  pontok távolságát  $a$ -val jelöltük. A (3.4.13) fázis minden időpillanatban olyan tulajdonságokkal bír, mint (3.2.15) az 1. ábráról leolvasható  $t \gg t_{\text{krit}}$  értékekre. Ezért (3.4.14) a korábbi (3.4.2)-vel azonos eredményre vezet.

b) A  $\psi_\beta(x_i, t)$  állapotfüggvényekből a fázistényezők leválasztása után megmaradó  $\psi_0(x_i - \varepsilon_\beta(x_i, t))$  függvények sem egyenlők. A részletes analízis azonban azt mutatja, hogy — a konkrét rendszerhez szabott —  $q$  koordinátákra áttérve az  $(\dots, x_i, \dots)$ , illetve  $(\dots, x_i - \varepsilon_\beta(x_i, t), \dots)$ -nek megfelelő  $q_1$ , ill.  $q_2$  között a távolság mindig sokkal kisebb, mint a (3.4.14) cellaátmérő, más szóval a  $\{\psi_0(x_i - \varepsilon_\beta(x_i, t))\}$  halmaz elemeinek vetülete az egyes cellákra  $\beta$ -tól független. A (3.2.18) feltételek teljesülésének mértékét egy-egy expanziós ciklus végén tehát  $\varepsilon_\beta(x_i, t)$  fellépte a megoldásokban nem befolyásolja.

c) A (3.4.12) jobb oldalán  $\xi_\beta(x_i, t')$  maga apró, bonyolult oszcillációt végez  $t'$ -vel. Négyzetének integrálja azonban, bár  $\beta$ -ra érzékeny,  $x_i$ -től alig függ. Valamennyi megvizsgált esetben vagy egyáltalán a teljes összeg, vagy annak koordinátafüggése elhanyagolhatónak bizonyult. Egy koordinátáktól független, csupán  $\beta$ -tól függő fázistényező fellépte az egy sugár  $\rightarrow$  több sugár átmenetet nem befolyásolja.

Látjuk tehát, hogy a szétfolyás—redukció ciklus működése szempontjából ekvivalens a közelítő s a pontos megoldás.

Az utóbbira nincs is más okból szükség, mint hogy kiderüljön: a fizikai hullámfüggvény (3.2.18) által kormányzott propagációjának elképzelését  $V'_\beta = \sum_i m_i c^2 \gamma_\beta(x_i, t)$  zavaró potenciál pontos tekintetbevétele nem teszi tarthatatlanná. Azért, hogy  $V'_\beta$  hatása elsősorban egy a helytől és  $\beta$ -tól szeszélyesen függő fázistényező fellépésében nyilvánul meg, a  $\gamma$ -ban szereplő tagok gyors időbeli oszcillációja a felelős.

Meg kell jegyeznünk, hogy a (3.4.7)—(3.4.12) egyenletek csupán a  $\tilde{V}_\beta(x_i, t) = -\sum_i m_i F(t) \cdot x_i$  speciális esetben szolgáltatnak valóban egzakt megoldást ( $\Phi_\beta(x_i, t)$



megfelelő, könnyen megadható módosításával), más szóval olyan zavaró erőter esetén, amely pillanatról pillanatra változik ugyan, de minden pillanatban homogén. A tényleges  $V'_\beta$  ennél bonyolultabb. Egyrészt azonban  $\gamma_\beta(x, t)$ -nek mindig a nagy-hullámhosszú, az egyes atomok által egy szétfolyási ciklus alatt befutott térségekben homogén erőteret képviselő komponensei jutnak szóhoz, másrészt az a  $t_2$  időtartam, amelyen belül (3.4.7) jó közelítés kell, hogy maradjon, nagyon rövid. A következő fejezetben sorra kerülő legfontosabb alkalmazás, az egyetlen makroszkopikus szemcse mozgásának esetében a (3.4.7)–(3.4.13) megoldás a  $V'_\beta$ -t perturbációként felfogva abban másodrendileg helyes és a hiba — megnyugtató eredménnyel — megbecsülhető. A szerző elképzelhetetlennek tartja, hogy az általános esetben az egzakt megoldás és a (3.4.7) eltérése a (3.2.18) tétel közelítő alkalmazását megakadályozza.

Megjegyezzük továbbá, hogy (3.4.7) egyszerű struktúrájában (tényezőkre bonthatóságában) döntő szerepe van éppen annak, hogy a cikluskezdő  $t_{(k)} + 0$  pillanatban a  $\psi_\beta(x_i, t_{(k)} + 0)$  kezdőfüggvények nem egyenlők, hanem  $V'_\beta$  adiabatikus bekapcsolásához simulva különböznek. Mint már említettük, a  $t_{(k)} + 0$  pillanatban egyenlő elemekből álló  $\{\psi_\beta\}$  halmaz amúgy sem illeszkedik az egész koncepcióhoz. Mindazonáltal, a (3.4.7)-tel egyenrangúan pontos megoldás ilyen kezdőfeltételekkel is megadható.  $\psi_\beta(x_i, t)$  (3.4.7) típusú tagok összege (integrálja) lesz, a különböző  $\beta$ -hoz tartozó megoldások egyenlősége az 1. ábráról leolvasható  $t_{\text{krit}}$  idő után megszűnik s a (3.2.18)-nak megfelelő felbontás változatlanul  $t_2$  idő múlva válik lehetőséggé.

Végezetül, a félreértés elkerülésére, leszögezzük a következőket. Rögzített  $\beta$  mellett (3.4.11) megoldása explicite felírható, akárcsak  $\Phi_\beta(x_i, t)$ -nek a (3.4.13)-ban megadott alakja. Így a  $\{\psi_\beta(x_i, t)\}$  halmazt a  $\beta=0$  választásához tartozó  $\psi_0(x_i, t)$  „normál” megoldáshoz képest valóban ismerjük. A  $\psi_0(x_i, t)$  függvényt azonban természetesen általában nem tudjuk kiszámítani.  $\psi_0(x_i, t)$  bennünket érdeklő tulajdonságaira — elsősorban az adott cellából kétszeres tartományra való szétfolyásához szükséges  $t_2$  idő nagyságára — a statisztikus fizika szokásos módszereivel következtethetünk.

A fizikai hullámfüggvény tehát egyfajta „araszoló mozgással” bolyong a konfigurációs térben. Egy cellából expandál kb. kétszeres átmérőjű tartományra, majd sztochasztikusan redukálódik újra egyetlen cellára.

A hullámfüggvény egésze szempontjából az expanzió a (közelítőleg) determinisztikus és folytonos szakasz, a redukció véletlenszerű és diszkontinuus.

Tartósan szeparálható kisszámú mikroszkopikus szabadsági fok jelenléte esetén azonban a szeparáció fennállása alatt ezek a szabadsági fokok (a hullámfüggvény ezekre vonatkozó tartalma) a teljes hullámfüggvény araszoló mozgását egyáltalán nem érzik meg. A konfigurációs térben ugyanis két olyan pont, amely csupán a szóban forgó szabadsági fokok koordinátaiban különbözik (a szóban forgó fizikai tartalom szempontjából csak ezeknek van jelentősége) mindig „szomszédos” (a cellaátmérőhöz viszonyítva).

Mihelyt azonban egy mikroszkopikus szabadsági fokot valamilyen makroszkopikus mérőeszközhöz csatolunk, a szeparáció megszűnik.

A sorozatos redukciók során a hullámfüggvény olyan komponensei között, amelyek a mikroszkopikus szabadsági fokmérőeszköz kölcsönhatás következményének makroszkopikus szintig való felerősítése folyamatában különböző makroszkopikus végállapotokba torkolló ágakat képviselnek, a koherencia hamarosan kihál. Ez azonban, mint az V. fejezetben látni fogjuk, már a szóban forgó ágak



fejlődésének korai stádiumában bekövetkezik, és pedig fokozatosan, több expanzio-redukció alatt. A fizikai hullámfüggvény propagációjának az ebben a fejezetben megadott matematikai modelljére tehát joggal mondható, hogy a propagáció determinisztikus és sztochasztikus oldalát párhuzamosan („kvázিয়েidejűleg”) juttatja kifejezésre.

#### IV. Makroszkopikus testek mozgása

##### 1. Brown-mozgás és koherencia

1. A legtöbb kvantummechanikai tankönyv hallgatólagosan felteszi, hogy az Ehrenfest-tételeken keresztül a kvantummechanika egyértelműen visszaadja a makroszkopikus tömegpontok *klasszikus* mozgását. Óvatosabb szerzők hangsúlyozzák [8, 35], hogy megfelelő kezdőfeltételekre is szükség van. Pl. egy szabad tömegpont állapotfüggvénye a kezdőpillanatban olyan kell hogy legyen, hogy klasszikus mozgásállapotot lehessen hozzá asszociálni. A legegyszerűbb választás egy minimális bizonytalanságú hullámcsomag, amelyet magyarázatra nem szoruló jelöléssel  $x_0, p_0, \Delta x$  és  $\Delta p$  jellemez, s ahol a félszélességek a  $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$  relációnak tesznek eleget.

Ahhoz, hogy a hullámcsomag viselkedése a klasszikus mozgást imitálja, az is szükséges, hogy a csomag ne folyjék szét túlságosan gyorsan. A kétszeres szélességre való szétfolyáshoz szükséges  $t_2$  idő

$$t_2 \approx \frac{M \cdot \Delta x^2}{\hbar}, \quad (4.1.1)$$

ahol  $M$  a test tömege. Ésszerű feltenni, hogy egyszeri méréssel a test helyzetét lehetetlen pontosabban megállapítani, mint két szomszédos atom távolsága a szilárd testekben. Ha a kezdeti helybizonytalanságot  $10^{-8}$  cm-nek vesszük és mondjuk egy kb. 1 g-os sörétszemre gondolunk, akkor zavartalan mozgásállapotban  $\Delta x$  évezredekken keresztül nagyjából ugyanakkora maradna. Úgy tűnhetik, hogy a klasszikus mozgás valóban csupán kezdőfeltétel kérdése. Erről azonban szó sincs.

Makroszkopikus test tartósan izolált mozgása gyakorlatilag megvalósíthatatlan idealizáció. Ha az elvi alapokra való hivatkozással mégis beszélünk róla, akkor viszont nem zárhatjuk ki a  $10^{-8}$  cm-nél sok nagyságrenddel kisebb kezdeti súlypontbizonytalanság lehetőségét sem. A fenti példában  $\Delta x \approx 10^{-13}$  cm mellett  $t_2$  már csupán egyetlen másodperc! Mint nyomban látni fogjuk, a sörétszem esetében  $\Delta x$  második értéke „természetesebb”, mint az első. Még a szabad részecske idealizált koncepciója mellett is további magyarázatra szorul tehát a mozgás és az állapotfüggvény kapcsolata.

2. Realisztikusabbá válik a probléma, ha pl. valamely zárt edényben levő gázra s a gázban lebegő szemcsére gondolunk. Egyszerűség kedvéért az edény legyen a súlytalanság állapotában. A szemcse és az atomok belső szabadsági fokait, valamint a fal szabadsági fokait hanyagoljuk el. A  $\Psi(x_i, x, t)$  hullámfüggvény az atomok  $x_i$  koordinátáitól és a szemcse súlypontjának  $x$  koordinátájától függ. A Schrödinger-egyenletet természetesen csak elvben tudjuk megoldani, senki nem kételkedik azonban abban, hogy  $x$ -nek a  $\Psi(x_i, x, t)$  által képviselt bizonytalansága a Brown-mozgás klasszikus elméletéből [36—37] adódó szórásnál nem kisebb. Konkrétan: még ha



olyan  $\Psi(x_i, x, 0)$  kezdőállapottal indultunk is, amely „egy a szemcsén éppen végrehajtott megfigyelés eredményét” tükrözi, tehát viszonylag éles  $x$ -nek és  $\dot{x}$ -nak felel meg,  $\Delta x$  belátható (a szemcse nagyságától függő) időn belül az edény méretével fog megegyezni.

Ekkor a időtartamokon keresztül tehát a hullámfüggvény semmiképpen nem imitálja a klasszikus mozgást. Hacsak a tudat explicit szerepét hangoztató álláspontot el nem fogadjuk, a szemcsének minden pillanatban viszonylag határozott pozíciót kell tulajdonítanunk, külső „megfigyelés” híján is. Zeh [20] szavaival élve, a szemcse helyzete a gázban folyamatosan, automatikusan „megméri”. Vajon mekkora egy találmány kiragadott pillanatban a tényleges pozícióbizonytalanság? A szokásos formalizmus nem ad támpontot. A koppenhágai iskola szellemében azt gondolhatnánk, hogy az aktuális pozícióbizonytalanság értéke irreleváns, ha feltesszük, hogy a gyakorlatilag legjobb helymérés hibájánál kisebb. Valójában azonban az aktuális  $\Delta x^0$ -nek fontos szerepe lehet. Idézzük fel egy pillanatra, hogy a koppenhágai iskola szerint mi a kvantummechanika feladata. A kezdőpillanatnak kinevezett időpontban az aktuális fizikai helyzetnek legjobban megfelelő  $\Psi(x_i, x, 0)$  kezdőállapottal kell a Schrödinger-egyenletet indítani, s ha  $\Psi(x_i, x, t)$  már makroszkopikusan különböző állapotokat leíró komponensekre bontható, az eredményt statisztikusan kell értelmezni. Esetünkben ez körülbelül annyit jelent, hogy a  $\Psi(x_i, x, 0)$  által képviselt  $\Delta x$ -nek éppen a szemcse tényleges pozícióbizonytalanságával kell megegyeznie, továbbá  $\Psi(x_i, x, t)$  statisztikus értelmezésének, más szóval redukciójának egy olyan  $t \approx t_2$  pillanatban kell bekövetkeznie, amikor már  $\Psi(x_i, x, t)$  több, külön-külön  $\Delta x^0$  szélességű komponensre bontható, röviden annyi idő múlva, amennyi alatt  $\Psi$ -nek az  $x$  szempontjából képviselt szélessége megkétszereződik.  $t_2$  természetesen most nem számítható (4.1.1)-ből, hiszen a szemcse nem szabad, a gázatomok részéről rendszertelen lökések érik. A lényeg azonban éppen az, hogy  $\Psi$ ,  $x$ -ben létrejövő kiszélesedéséhez a gázatomok hatása mellett az az inherens, kvantummechanikai sebességbizonytalanság is hozzájárul, amellyel a szemcse a Heisenberg-relációk értelmében rendelkezik. Ha  $\Delta x^0$  elegendő kicsi, az utóbbi hatás a gázatomok hatását felül is múlhatja,  $\Delta x^0$  tényleges értéke tehát éppen akkor érdekes, ha nagyon kicsiny.

(A probléma fontosságára való tekintettel talán nem felesleges itt a következő triviális megjegyzés. A Brown-mozgás klasszikus elméletében, mint a klasszikus statisztikában általában, egy-egy konkrét esetben a szemcse mozgását elvben determinisztikusnak tekintjük, amikor a szemcse pozíciójáról és sebességéről, mint valószínűségi változóról beszélünk, a konkrét esetek egy sokaságára gondolunk. Ezzel szemben a kvantummechanikai tárgyalásnál már egyetlen  $\Psi(x_i, x, 0)$  kezdőállapot olyan mértékű bizonytalanságot képvisel az atomok eljövendő viselkedésében, hogy  $x$  szétfolyását már egyetlen  $\Psi(x_i, x, t)$  is tükrözi.)

Kolloid vagy annál kisebb részecskék esetében a Brown-mozgás klasszikus elméletéből számított eredmények és a megfigyelési adatok összhangban vannak [38]. Ebből két dologra következtethetünk, éspedig arra, hogy  $\Psi$   $x$ -ben való kiszélesedési ütemének ilyen szemcséknél

a) az atomi ütközésekből származó része ugyanakkora, mint amit a klasszikus statisztika alapján várhatunk,

b) a szemcsére vonatkozó Heisenberg-relációval kapcsolatos része elhanyagolható. a) nem meglepő, b) a további eredmények fényében válik természetessé.



Lényegesen nagyobb méretű szemcsék esetében tudomásunk szerint részletekre is kiterjedő kísérleti eredmények nem állanak rendelkezésre. A Brown-mozgás amplitúdója ilyenkor rendkívül kicsi, egyéb zavaró (pl. a gáz áramlásából vagy külső rezgésekből adódó) tényezők hatása viszont megnövekszik. A  $\Delta x^0$  kicsiny voltából fakadó esetleges kvantumeffektusok irányában elméleti vizsgálatokat nem végeztek.

A következő pontban a III. fejezet módszerét egy *szabadon mozgó* szemcse esetére alkalmazva meghatározzuk a súlypont legnagyobb lehetséges szórását. Minthogy a gázatomok bevonása a totális hullámfüggvény koherenciája szempontjából összehasonlítható pontok távolságát a konfigurációs térben legfeljebb növeli, az így kapott  $\Delta x^0$  a gázzal körülvett szemcse pozícióbizonytalanságára is felső korlát. (Sőt ezen túlmenőleg könnyen belátható, hogy a megengedett pozícióbizonytalanság a szabad és a gázzal körülvett szemcsére megegyezik, ami azzal függ össze, hogy a szemcsével „pillanatnyilag” kölcsönható gázatomok együttes tömege és így a  $V'_\beta$  (lásd (3.2.14a)) zavaró potenciálban játszott szerepe elhanyagolható. Látni fogjuk, hogy éppen a sörétszem névvel illelhető szemcsetartományban a Brown-mozgás klasszikus elméletének eredményeitől eltérés várható. Így ennek az értekezésnek az alap gondolata kísérletileg ellenőrizhetővé válik.

A Brown-mozgás anomáliája valószínűleg az egyetlen gyakorlatilag reményteljes kísérleti lehetőség a fizikai hullámfüggvény propagációjáról kialakított képünk igazolására. Félreértés elkerülésére azonban már itt leszögezzük, hogy felfogásunk szerint a szemcse súlypontjának pozíciójában számottevő bizonytalanság kifejlődését egyrészt a téridőszerkezet határozatlansága, másrészt a szemcse viszonylag nagy tömege akadályozza meg, nem pedig a (mikroszkopikus) szabadsági fokok nagy száma. (Az utóbbinak csak közvetett szerepe van itt: sok atom nélkül nincs nagy tömeg.) Éppen ezért az előző fejezetben vázolt formalizmus ellenőrzésének közvetlen módja szabad szemcsék megfigyelése lenne. Mielőtt azonban a szabad szemcsének a határozatlan téridőn végbemenő mozgását és a kísérleti ellenőrzés nehézségeit megvizsgálánk, még néhány megjegyzést fűzünk a gázban lebegő szemcse és a „konvencionális” kvantummechanika viszonyához.

3. Az első megjegyzés a koherencia fogalmával kapcsolatos, minthogy azt a gázban mozgó szemcsével összefüggésben kétféleképpen is használhatjuk. Ebben az értekezésben általában mindig a teljes hullámfüggvény koherenciájáról van szó. Koherensnek tekintjük a hullámfüggvényt, ha az közvetlenül megfelel a fizikai realitásnak, inkohereusnak, ha már „redukcióra érett”, amikor is a túlélésre aspiráló komponensek között a relatív fázisnak nincs jelentősége. Beszélhetünk azonban egy (egészében ilyen értelemben koherens) hullámfüggvény különböző részei között koherenciáról a kiragadott  $x$  változó szempontjából is. Ezt tesszük például olyankor, amikor az  $x$  változóban interferenciaképet kívánunk kialakítani. Ilyen értelemben a hullámfüggvénynek nyilván csak olyan részei koherensek, amelyek a többi változó (= a gázatomok) szempontjából lényegileg azonos konfigurációt fejeznek ki. „ $x$  koherens szórása” ekkor annak az  $x$  tartománynak a  $\Delta x^k$  szélessége, amelyen belül  $\Psi(x_i, x, t)$  rögzített  $x_i$  koordináták mellett különbözik zérustól. Minthogy egy tipikus  $x_i$  konfiguráció esetén a szemcse közvetlen szomszédságában is előfordulnak gázatomok, a szemcsét azonban gyakorlatilag átjárhatatlannak tekinthetjük a gázatomok számára, a  $\Delta x^k$  koherenciaszélesség igen kicsi.

A szemcse impulzusbizonytalanságát a  $(p - \bar{p})^2$  operátor várható értékének gyöke adja meg. A várható érték a különböző  $x_i$  konfigurációk szempontjából



egyszerű átlagolást jelent, ezért nyilvánvaló, hogy a szemcse sebességének bizonytalansága az átlagos  $\Delta x^k$ -ból számított

$$\Delta v^k \approx \frac{\hbar}{M \Delta x^k}, \quad (4.1.2)$$

értéknél nem lehet kisebb.

$\Delta x^k$  értékét pontosan kiszámítani nagyon nehéz lenne, nagyságrendi becslést azonban könnyen adhatunk, ha  $\Psi(x_i, x, t)$ -re vonatkozólag a következő plauzibilis feltevéssel élünk. Rögzített  $x$  mellett az egyes atomok eloszlási valószínűsége egymástól független (a gáz nem túl sűrű) és nagyjából egyenletes, kivéve a szemcse felületén egy  $\lambda$  vastagságú réteget, amelyben fokozatosan zérusra csökken. (Az adszorbeált atomokat átmenetileg a szemcséhez tartozónak gondolhatjuk.)  $\lambda$  nagyságrendje nyilván  $10^{-8}$  cm. (A van der Waals-erők hatótávolsága ugyan nagyobb, de azok feltehetőleg nem befolyásolják lényegesen az atomok eloszlását.) Az egyszerű gondolatmenetnek csupán az eredményét közöljük.

$$\Delta x^k \approx \sqrt{\frac{\lambda}{N \cdot R^2}}, \quad (4.1.3)$$

ahol  $N$  az 1 cm<sup>3</sup>-ben található gázatomok száma és  $R$  a szemcse sugara.

Ha például egy kolloid szemcse szabad (vákuumbeli) mozgásának vizsgálatát úgy akarjuk előkészíteni, hogy a szemcsét valamilyen gáztérből engedjük egy apró nyíláson át a légüres térbe illanni, a kezdeti sebességbizonytalanságot *nincs jogunk* a (4.1.3) és (4.1.2) képletek által megadott értéknél kisebbre venni. Miután a szemcse a gázteret elhagyta, a totális hullámfüggvény, amennyiben a Schrödinger-egyenletet követi,  $x$ -ben koherensen szétfolyik,  $x$  koherenciaszélességének első megkettőződési ideje (4.1.1)-ből számítandó. Pl.  $N \approx 10^{19}$ /cm<sup>3</sup>,  $R \approx 10^{-5}$  cm esetén  $t_2$  mindössze kb.  $10^{-5}$  sec. Olyan vákuum gyakorlatilag is elképzelhető, amelyben egy ekkora szemcse több másodpercen keresztül egyetlen atommal sem ütközik. A konvencionális kvantummechanika keretein belül tehát semmiképpen nem jogos a szabad szemcse súlypontjának szétfolyásával kapcsolatos ismeretelméleti problémát a kezdőfeltételekre vonatkozó hallgatólagos feltevésekkel megkerülni. (Mint (4.1.3)-ból látszik, sörétszem esetén  $\Delta x^k \approx 10^{-13}$  cm mint az 1. szakaszban már utaltunk rá. Sok másodpercen át szabad sörétszem azonban az elérhető legjobb vákuumban sem képzelhető el.) Második megjegyzésünk a következő. Az előző fejezet (3.4.14) képlete az általunk kidolgozott formalizmusban elvben határozottan megmondja, hogy a totális hullámfüggvény általános értelemben vett koherenciája a konfigurációs tér egymáshoz képest mekkora (és milyen értelmű) távolságban elterülő tartományai között hal ki. A téridőszerkezet kérdéséről függetlenül is világos, hogy a konfigurációs tér két különböző pontjában a hullámapplitúdók relatív fázisa annál nehezebben hozzáférhető az ellenőrzés számára, minél nagyobb és minél több koordinátát involvál a két pont távolsága. Ezért az irodalomban *kvalitatív formában* már felmerült az a gondolat, hogy az általános értelemben vett koherencia a hullámfüggvénynek a konfigurációs térben egymástól távoli tartományai között szűnik meg [39]. Vessük össze mármost elegendő nagy  $t$  mellett a gáz + szemcse ortodox módon (redukció nélkül) kiszámított hullámapplitúdóját a konfigurációs tér  $P=(x_i, x)$  és  $P=(x'_i, x')$  pontjában, ahol  $|x-x'| \gg \Delta x^k$ . Könnyű átgondolni, hogy ha mind  $\Psi(P)$ , mind  $\Psi(P')$  különbözik zérustól, akkor  $(x_i)$  és  $(x'_i)$  az atomok *merőben más* (mikroszkopikus) konfigurációjának kell hogy megfeleljen. (A szemcse mikrosz-



kopikus elmozdulásainak hatása pillanatok alatt szétterjed a gázban.) Ilyenkor tehát  $P$  és  $P'$  távolsága a konfigurációs térben automatikusan nagy és bonyolult,  $P$  és  $P'$  nem tartozhat egyetlen általános értelemben koherens tartományhoz. Zeh idézett megjegyzése tehát, hogy ti. a szemcse pozíciója a gázban automatikusan „megmértődik”, következetesen végiggondolva azt jelenti, hogy  $x$ -nek egy a fizikai realitásnak megfelelő (redukcióra nem szoruló)  $\Psi(x_i, x, t)$  hullámfüggvény által képviselt maximális megengedett  $\Delta x^0$  bizonytalansága nem lehet lényegesen nagyobb, mint a rögzített  $x_i$ -k mellett definiált  $\Delta x^k$  koherens szórás,  $\Delta x^0 \approx \Delta x^k$ . Ebben a felfogásban  $\Delta x^0$  korlátozott voltának oka közelebbről meg nem határozott módon a szemcsét körülvevő gáz szabadsági fokainak nagy száma.

Ha ez a felfogás helyes, akkor pl. egy közönséges levegőben magárahagyott kolloid szemcse aktuális pozícióbizonytalansága (4.1.3) alapján  $\approx 10^{-10}$  cm, egy sörétszemé, mint már láttuk,  $\approx 10^{-13}$  cm. Ilyen érték mellett anomális Brown-mozgás nem lép fel és például a vákuumba kiszabadult kolloid szemcse pozíciója viszonylag korlátozás nélkül szétfolyik. Ez a felfogás tehát a téridőszerkezet bizonytalanságára hivatkozó felfogástól eltérő eredményeket ad.

## 2. A súlypont maximális szórása

1. Ebben a pontban egy  $R$  sugarú,  $\varrho$  sűrűségű, egyszerűség kedvéért gömb alakú, szabadnak tekintett szilárd szemcse mozgását vizsgáljuk az előző fejezet formalizmusával. A (3.2.13)-ban  $x_i$  jelentse az  $i$ -ik atom koordinátáit. Fejezzük ki  $x_i$ -t a súlypont  $x$  koordinátájának, továbbá az alkalmasan választott  $q_\psi$ ,  $q_\varphi$ ,  $q_\theta$  rotációs és  $q_n$  vibrációs koordinátáknak a segítségével. Bontsuk fel a

$$V'_\beta(x_i, t) = \sum_i m_i c^2 \gamma_\beta(x_i, t)$$

zavaró potenciált

$$V'_\beta(x_i, t) = V'_{\beta 1}(x, t) + V'_{\beta 2} = \varrho c^2 \int_{x, R} \gamma_\beta(\xi, t) d^3 \xi + V'_{\beta 2} \quad (4.2.1)$$

alakban, ahol  $\int_{x, R}$  az  $x$  pont körül  $R$  sugárral rajzolt gömbre vett integrált jelöl.

$V'_{\beta 2}$  a vibrációs koordináták zérus értékénél eltűnik, egyébként valamennyi koordinátától bonyolultan függ. A  $\beta=0$  esetben a (3.2.13) egyenletben  $x$  szeparálható. Noha gyakorlati szempontból nincs jogunk feltételezni, hogy sikerül szorzat alakú kezdőállapot-függvényt produkálni, ilyenek összegeként minden megoldás felírható, ezért a továbbiakban a

$$\Psi_0(x_i, t) = \psi_0(x, t) \cdot \varphi_0(q_\psi, q_\varphi, q_\theta, q_n, t) \quad (4.2.2)$$

szorzatmegoldásokkal foglalkozunk, ahol természetesen

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{\psi}_0(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_0(x, t), \quad M = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho. \quad (4.2.3)$$

(A  $\varphi_0$ -ra vonatkozó egyenletre nem lesz szükségünk.) A  $\beta \neq 0$  esetre vonatkozó megoldást az általános (3.4.7) képlet birtokában a (4.2.1) felbontás tulajdonságainak kihasználása nélkül is felírhatnánk. (4.2.1) két tagjának összehasonlítása azonban további egyszerűsödésre vezet. Realisztikus  $\varrho$  értékek mellett  $V'_{\beta 2}$  minden  $R$ -re



elenyésző kicsiny  $V'_{\beta 1}$  mellett, ha a vibrációs koordinátáknak nem tulajdonítunk a termikus gerjesztésnél lényegesen nagyobb értékeket. Sőt ilyenkor a  $10^{-8} \text{ cm} < R < \approx 10^{-2} \text{ cm}$  tartományban egyfelől  $V'_{\beta 2}$ , másfelől a hullámfüggvény természetes (=termikus) kiterjedése a  $q_\psi, q_\varphi, q_\theta, q_n$  dimenziók mentén olyan kicsiny, hogy rögzített  $x$  mellett az el nem tűnő  $\Psi$ -hez tartozó belső koordináták a teljes konfigurációs tér egyetlen cellájába esnek, más szóval a redukciót mindig a hullámfüggvény  $x$ -ben való szétfolyása teszi szükségessé. A  $\approx 10^{-2} \text{ cm} < R < \approx 10^2 \text{ cm}$  tartományban az utóbbi állítás fokozatosan elveszti érvényét, s azon túl (nem termikus gerjesztés esetén esetleg már előbb is) a belső koordináták redukcióra vezető szétfolyása dominál a súlypont szétfolyása fölött. Minthogy kísérleti szempontból ez a régió nem érdekes, analízisünknek ezt a részét nem részletezzük. A bennünket érdeklő tartományban  $\Psi_0(x_i, t)$  mellett  $\Psi_\beta(x_i, t)$  is szeparálható, éspedig

$$\Psi_\beta(x_i, t) = \psi_\beta(x, t) \cdot \varphi_\beta(q_\psi, q_\varphi, q_\theta, q_n, t), \quad (4.2.4)$$

alakban, ahol

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{\psi}_\beta(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V'_{\beta 1}(x, t) \right] \psi_\beta(x, t), \quad (4.2.5)$$

$\varphi_\beta$ -ra pedig hasonló egyenlet áll fenn, amelyben ugyan  $V'_{\beta 2}$   $x$ -től is függ, de a belőle származó fázistényező a redukciót nem befolyásolja. Végeredményben  $10^{-8} \text{ cm} < R < 10^2 \text{ cm}$  tartományban a belső szabadsági fokokat teljesen ignorálhatjuk és a formalizmust önállóan alkalmazhatjuk a súlypontra. Az integrálást (3.2.5) alapján elvégezve

$$V'_{\beta 1}(x, t) = qc^2 \int_{x, R} d^3 \xi \gamma_\beta(\xi, t) = \frac{Mc^2}{\sqrt{V}} \sum_k d(k) [c_k e^{i(kx - \omega t)} + c_k^* e^{-i(kx - \omega t)}], \quad (4.2.6)$$

ahol

$$d(k) = 3 \left[ -\frac{\cos kR}{(kR)^2} + \frac{\sin kR}{(kR)^3} \right]. \quad (4.2.7)$$

Egy-egy expanziós ciklusban (4.2.5) megoldásaként a

$$\psi_\beta(x, t) = \psi_0(x - \varepsilon_\beta(x, t)) \cdot \exp(i\Phi_\beta(x, t)), \quad (4.2.8)$$

függvényeket használhatjuk. Itt a (3.4.7)-ben még kiírt érdektelen fázistényezőt elhagytuk. (3.4.9)–(3.4.13) mintájára  $\varepsilon_\beta(x, t)$  az adiabatikusan bekapcsolva képzelt (3.2.6) potenciál hatására a szemcse pozíciójában a klasszikus mechanika szerint létrejött elmozdulás és

$$\Phi_\beta(x, t) = -\frac{1}{\hbar} \frac{Mc^2}{\sqrt{V}} \sum_k d(k) \left( -\frac{c_k}{i\omega} e^{i(kx - \omega t)} + \frac{c_k^*}{i\omega} e^{-i(kx - \omega t)} \right) \quad (4.2.9)$$

$\varepsilon_\beta(x, t)$  átlagos nagyságát csak a  $t_2$  (kétszeres koherenciaszélességre való) szétfolyási idő ismeretében számíthatjuk ki. Ahhoz, hogy  $\{\psi_\beta\}$  redukció előbbi felbontása a (3.2.18a) feltételnek eleget tegyen, szükséges, hogy  $\varepsilon_\beta$  átlagos nagysága kisebb legyen, mint a

$$|\Phi_\beta(x + \Delta x^k, t) - \Phi_\beta(x, t)|^2 \approx \pi^2 \quad (4.2.10)$$

egyenletből kiszámított  $\Delta x^k = |\Delta x^k|$  koherenciaszélesség. Az összehasonlítás kérdése visszatérünk.



A (4.2.10) egyenlet megoldásához emlékeztünkbe idézzük a  $\{\beta\}$  halmaz tulajdonságait. A különböző  $c_k$ -k egymástól függetlenül változnak, átlaguk zérus. Abszolút értékük négyzetének átlagát (lásd (3.2.7)) újra ideírjuk:

$$|\overline{c_k}|^2 = A \cdot k^r \quad \text{ahol} \quad r = -\frac{5}{3}$$

és

$$A \approx \frac{2\pi^2}{\alpha_1} \alpha^{4/3}. \quad (4.2.11)$$

Az átlagolás elvégzése után (4.2.10) a  $\Delta x^k = a$  jelöléssel az

$$\frac{(Mc^2)^2}{\hbar^2} \frac{1}{V} \sum_k d^2(k) \frac{Ak^r}{c^2 k^2} 2 \cdot (1 - \cos ka) = \pi^2$$

alakot ölti. Az összegezésről integrálásra térhetünk át ( $V$  tetszőleges nagy). A  $k$  irányaira való integrálás után marad

$$A \cdot \frac{2M^2 c^2}{\pi^2 \hbar^2} \int_0^\infty dk k^r \left(1 - \frac{\sin ka}{ka}\right) d^2(k) = \pi^2, \quad (4.2.12)$$

(4.2.12)-t azért írtuk ki külön, hogy világosan lássék, (4.2.7)-et is tekintetbe véve, a  $k \gg R^{-1}$  tartomány járulékanak elenyésző volta, s így a III.2 végén emlegetett levágás részleteinek érdektelensége. Ha nem törekszünk teljes pontosságra, (4.2.12) könnyen megoldható. Pontos numerikus faktorok szerepeltetése a megoldásban egyébként sem lenne helyénvaló, minthogy III.2 gondolatmenete  $A$ -nak csupán a nagyságrendjét adja meg. Az „ $a$ ” koherenciaszélességet „nagy” szemcsék, azaz  $a \ll R$  teljesülése esetén  $\varrho$  és  $R$ , „kis” szemcsék, azaz  $a \gg R$  esetén egyszerűen  $M$  függvényeként fejezhetjük ki:

$$\left(\frac{\hbar^2}{G}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot R^{-7/3} \approx a \approx \frac{\hbar}{\varrho c} \alpha^{-2/3} \cdot R^{-7/3}, \quad \text{ha } a \ll R, \quad (4.2.13a)$$

$$\frac{\hbar^2}{G} \cdot \frac{1}{M^3} \approx a \approx \frac{\hbar^3}{\alpha^2 c^3} \frac{1}{M^3}, \quad \text{ha } a \gg R. \quad (4.2.13b)$$

Ezeket az összefüggéseket az értekezés legfontosabb eredményeinek tekintjük.

A szemcse viseelkedését leíró hullámcsomag addig marad koherens, amíg az általa képviselt pozíciószórás a fenti korlát alatt marad.

(4.2.13)-ból azonnal kiolvashatjuk, hogy „szabad szemmel látható” szemcsék feltétlenül klasszikusan mozognak, viszont néhány atomból álló képződmények esetén a koherencia gyakorlatilag egyáltalán nem korlátozódik.

Nincs éles átmenet „mikroszkopikus” és „makroszkopikus” között, de sok szempontból „kritikus”-nak nevezhetjük azt az  $M_{\text{krit}}$  tömeget, amelynél a maximális pozícióbizonytalanság körülbelül ugyanakkora, mint a szemcse átmérője. A (4.2.13) összefüggések akármelyikéből az  $a \approx R$  esetre extrapolálva,  $\varrho \approx 1 \text{ g/cm}^3$  sűrűség mellett azt kapjuk, hogy  $R_{\text{krit}} \approx 10^{-4} - 10^{-5} \text{ cm}$  és ennek megfelelően  $M_{\text{krit}} \approx 10^{-13} - 10^{-15} \text{ g}$ .



Milyen hullámfüggvényt tulajdonítsunk a szemcsének szabad mozgása megkezdésének pillanatában?

A formalizmus tetszőleges kezdőállapot esetén alkalmazható. Nyilván irreális azonban olyan hullámfüggvénnyel indulni, amely (4.2.13)-nál szélesebb, hiszen a szemcsének múltja van s az expanzió—redukció ciklusok korábban is működtek. Természetesen az, hogy a szemcse önálló hullámfüggvényéről beszélünk, önmagában véve is idealizáció. Ez azonban megengedett, ha a szemcse — környezet kölcsönhatás megszűntének pillanatában a szemcse számára olyan önálló hullámfüggvényt választunk, amelynek tartalma a korábbi totális hullámfüggvénynek a szemcsére vonatkozó tartalmával összhangban van. Az expanzió—redukció ciklusoknak a totális hullámfüggvényre gyakorolt hatását átgondolva megállapíthatjuk a következőket.

a) Kritikus, vagy annál kisebb szemcsék esetében lehetséges, sőt valószínű, hogy (nagyobb tömegű, tehát kisebb pozíciósórát megengedő szabadsági fokokkal való csatolás eredményeképpen) a kezdőhullámcsomag pozíciósórása a kifejlődni képes maximumnál jóval kisebb.

b) A kritikusnál jóval nagyobb szemcsék pozícióbizonytalanságát a környezettel való bármilyen kölcsönhatás alatt is erősebben korlátozza a saját tömegük, mint az idegen tömegekhez való csatoltság, azzal összefüggésben, hogy a szóban forgó parányi helyingadozások mellett a gázatomok vagy elasztikus erők által közvetített csatolás egyáltalán nem merev.

Hogyan viselkedik ezek után a szabad súlypont hullámfüggvénye?

Az a) esetben először egy „tranzien” jelenség zajlik le. Az első néhány szétfolyás és sztochasztikus redukció viszonylag gyorsan bekövetkezik és eldönti, hogy a kezdeti,  $x$ -ben keskeny csomag által képviselt széles (esetleg a Heisenberg-relációk által megszabott minimumnál jóval szélesebb) impulzusspektrum melyik része „marad életben”, őrzi meg realitását. A súlypont hullámfüggvénye ezek után a sztochasztikusan kiválasztott sebességnek megfelelő dőlésű egyenest rajzol a téridőre.

A b) esetben a tranzien szakasz elmarad.

A súlypont által kirajzolt világvonala nem tökéletes egyenes.

Elsősorban nem is tökéletes vonal, hiszen a hullámcsomagnak szélessége van.

Másodsorban ez a szélesség a hullámterjedés itt tárgyalt matematikai modelljében nagyjából „ $a$ ” és nagyjából „ $2a$ ” között lüktet. Minden egyes redukciónál a súlypont várható értéke „ $a$ ” nagyságrendű sztochasztikus változást szenved.

Harmadsorban a hullámcsomag által képviselt átlagsebesség is parányi,

$$\frac{\Delta p_0}{M} \approx \frac{\hbar}{aM}$$

nagyságrendű sztochasztikus ugrást végez minden egyes redukciónál.

A két utóbbi körülmény miatt a világvonala kismértékben imbolyog és kanyarog a téridőn.

Mivel a szétfolyási szakasz szempontjából a (4.2.3) szabadrészecske Schrödinger-egyenlet mérvadó, aminek ismerjük az egzakt megoldását, ez a viselkedés könnyen nyomonkövethető. Egy — egyszerűség kedvéért egydimenziós jelöléssel —

$$\psi_0(x, t) = \int dp A(p) \exp \frac{i}{\hbar} \left( px - \frac{p^2}{2M} t \right), \quad A(p) \text{ valós,}$$



alakban előállított hullámfüggvény következő tulajdonságát kell csak emlékeztünkbe idézni. A  $t=0$  pillanatban egy kiragadott  $x$  pontban  $\psi_0(x, 0)$  értékéhez az impulzustengely minden  $dp$  nagyságú intervalluma „egyenjogúan” ( $A(p)$ -vel arányosan) járul hozzá. Növekvő  $t$ -vel egyre kitüntetettebben az  $A(p)$  spektrum

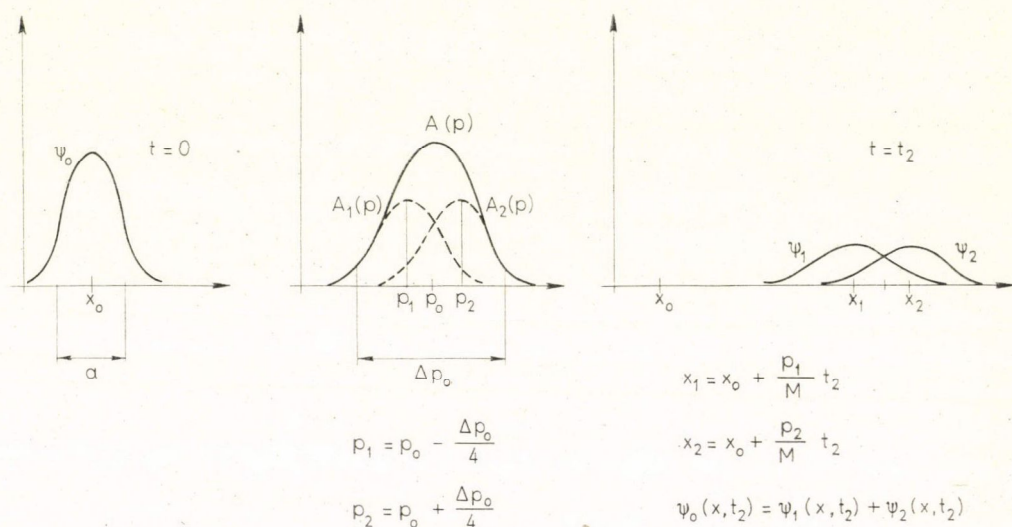
$p = \frac{x}{t} M$  érték körüli része szabja meg  $\psi_0(x, t)$ -t. Más szóval, az impulzusspektrum

különböző tartományainak az a tendenciája, hogy járulékok térbelileg szétválják. Ez a tendencia annál erősebb, minél távolabbi tartományokról van szó. Legyen

$\psi_0(x, 0)$  szélessége  $\Delta x$ ,  $A(p)$  szélessége  $\Delta p$ . Ha  $\Delta p \gg \Delta p_0 = \frac{\hbar}{a}$ , ami biztosan teljesül

$\Delta x \ll a$  esetében, akkor a szétfolyás gyors és az első redukcióra a (4.1.1) „reguláris” szétfolyási időnél sokkal hamarabb sor kerül. Az első redukció után az új ciklus kezdőfüggvénye más „ $a$ ” szélességű és impulzusspektruma az eredeti  $A(p)$ -nél keskenyebb. Az eredeti  $A(p)$  alakjától és a sztochasztikus redukciók aktuális végbemeneteltől függően több vagy kevesebb lépésben, de mindenesetre a  $t_2$  reguláris szétfolyási idővel nagyjából megegyező idő alatt  $A(p)$  szélessége  $\Delta p_0$ -ra szűkül le valamilyen, természetesen az eredeti  $A(p)$ -ben nem eltűnő súllyal szereplő  $p_0$  érték körül.

Innen kezdve a redukciók regulárisan követik egymást, a 2. ábrán látható minta szerint. A cikluskezdő pillanatot  $t=0$ -val jelöljük.



2. ábra

A reális probléma háromdimenziós. A cellabeosztás optimális megválasztása esetén egy cellának 12 szomszédja lenne. Beérjük azonban azzal, hogy a teret „ $a$ ” élhosszúságú kockákra osztjuk, a hullámcsomagot az egyes koordinátáktól függő tényezők szorzatának képzeljük és csak az egyik, tetszés szerint kiválasztott koordinátával törődünk.



A 4.1. ábra jelentése a következő. Az  $A(p)$  spektrumot az ábrán látható módon két komponens összegére bontjuk. Ennek megfelelően  $\psi_0(x, t)$  is  $\psi_0(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$  alakba írható. A ciklus végére  $\psi_1$  és  $\psi_2$  térbelileg már jelentős mértékben szétváltak, súlypontjuk ( $x_1$  és  $x_2$ ) távolsága  $\approx a$ .  $\left[ t_2 \text{ pontosabb értéke } \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M}{\hbar} a^2. \right]$  Ha  $x_1$  és  $x_2$  közelítőleg éppen a cellabeosztás két középpontjával esik egybe, akkor a redukció — egyaránt  $\frac{1}{2}$ -nél valamivel kisebb valószínűséggel a

$$\psi_0^1(x, t_2) = Nf_1(x)\psi_0(x, t_2) = N_1f_1(x)\psi_1(x, t_2) + N_1f_1(x)\psi_2(x, t_2) \quad (4.2.13)$$

$$\psi_0^2(x, t_2) = Nf_2(x)\psi_0(x, t_2) = N_2f_2(x)\psi_1(x, t_2) + N_2f_2(x)\psi_2(x, t_2) \quad (4.2.13)$$

függvények valamelyikére fog bekövetkezni, ahol  $f_1(x)$ , ill.  $f_2(x)$  az  $x_1$ , ill.  $x_2$  középponthoz tartozó „ $a$ ” szélességű és az  $\langle f_i | f_i \rangle = a$  normálási feltételnek eleget tevő haranggörbe jellegű függvény (lásd a (3.4.6) kapcsán mondottakat),  $N$  normálási tényező.  $\psi_0(x, t_2)$ -nek a többi cellára vetett vetületét ilyenkor elhanyagolhatjuk.  $\psi_0^1(x, t_2)$ -ben  $\psi_1(x, t_2)$ ,  $\psi_0^2(x, t_2)$ -ben viszont  $\psi_2(x, t_2)$  szerepel lényegesen nagyobb súllyal. Ezért az impulzus  $\psi_0^1$ , illetve  $\psi_0^2$  által képviselt átlagértéke  $p_1 = p_0 - \frac{\Delta p_0}{4}$  illetve  $p_2 = p_0 - \frac{\Delta p_0}{4}$  közelébe esik.

A valós  $f_i(x)$ -szel való szorzás az impulzus  $\psi_i(x, t_2)$  által képviselt átlagértékét nem változtatja meg. A szórását azonban  $\frac{\Delta p_0}{2}$ -ről újra  $\Delta p_0$ -re növeli, miközben a pozíciószórást újra „ $a$ ”-ra csökkenti.

A hullámfüggvény tehát, a pozícióban és a sebességben bekövetkezett parányi sztochasztikus változástól eltekintve, minden redukciónál „readjustálódik”.

A ciklus végén  $x_1$  és  $x_2$  általában nem esik egybe cellaközpontokkal. Ilyenkor a redukció legalább három cella valamelyikére történhetik számottevő valószínűséggel. A statisztikus eredmény ugyanaz.

Az  $f_i(x)$ -szel való manipuláció a  $\psi_0(x, t_2)$  függvény tartalmába való drasztikus beavatkozásnak tűnhet, ha megfigyeljük róla, hogy „fizikai hullámfüggvénynek” a ciklus végén a  $\{\psi_\beta(x, t_2)\}$  halmazt tekintjük. Mint a III. fejezetben már hangsúlyoztuk, a szeszélyes  $\Phi_\beta$  fázisok fellépte  $\psi_0(x, t_2)$  tartalmát ugyanolyan értelemben befolyásolja, mint az  $f_i(x)$  projekciós függvények alkalmazása. Ez az oka annak is, hogy az  $f_i(x)$  megválasztásához tapadó önkénynek, valamint a fenti gondolatmenetben előforduló elhanyagolásoknak nem tulajdonítunk jelentőséget.

A szabad szemcse súlypontja által rajzolt világvonal „minőségét” tömören az egy ciklushoz tartozó szakasz szélességének és  $l = ct_2$  (téridőbeli) hosszúságának hányadosa jellemzi. A zérus érték felelne meg a tökéletes egyenesnek. (4.2.13) és (4.1.1) felhasználásával

$$\eta = \frac{a}{ct_2} = \begin{cases} \frac{(\hbar G)^{1/3}}{c} R^{-2/3} & \text{ha } a \ll R \\ \frac{G}{\hbar c} M^2 & \text{ha } a \gg R \end{cases} \quad (4.2.14a)$$

$$(4.2.14b)$$

Figyelemre méltó, hogy  $\eta$  értéke bármilyen nagyságú szemcsénél igen kicsiny, továbbá éppen a kritikus szemcsenagyságnál van maximuma, ahol is  $\eta \approx 10^{-20}$ . Egyebek között ez azt jelenti, hogy ha az izoláció nehézségét nem kellene tekintetbe



venni, akkor feltétlenül a kritikus szemcsenagyság régiója lenne legalkalmasabb az egész koncepció kísérleti ellenőrzésére. Itt vált át a valóban „vonalszerű”, klasszikus propagáció interferenciaképes hullámterjedés jellegre.

A kritikus méreten alul  $R$  csökkentésével a koherenciaszélesség rohamosan nő, ezért, noha  $\eta$  is csökken, a világvonal szó elveszti aktualitását. Kísérleti szempontból nem a koherenciaszélesség korlátozottságának, hanem egyáltalán az interferenciaképesség bizonyításának (a koherenciatartományon belül) lenne jelentősége. Erre azonban nincs remény, egészen addig, amíg a „szemcse” méretét annyira le nem csökkentjük, hogy egyetlen atomból vagy elemi részecskéből álljon.

Nagyon nagy  $R$  esetén (4.2.13a) és vele együtt (4.2.14b) elveszti érvényét.

Az eddigiekben a (4.2.10) megoldása mellett csupán  $\psi_0(x, t)$ -vel foglalkoztunk. (4.2.8) tanúsága szerint a  $\{\psi_\beta(x, t)\}$  halmazban az ott tisztázott jelentésű  $\varepsilon_\beta(x, t)$  mennyiség is szerephez jut. „ $a$ ” és a belőle kapott  $t_2$  ismeretében (3.4.9) és (4.2.6) összekombinálásával  $\varepsilon_\beta(x, t_2)$ , majd az utóbbi négyzetének átlaga (4.2.11) felhasználásával kiszámítható.

$$\varepsilon^2 = |\overline{\varepsilon_\beta(x, t_2)}|^2 \approx \frac{(\hbar G)^{2/3}}{c^2} ((ct_2)^{2/3} - R^{2/3}). \quad (4.2.15)$$

Mérsékelt  $R$ -ekre  $\varepsilon \ll a$ .

$R \approx 10^2$  cm körül  $\varepsilon \approx a$  lesz, a  $\{\psi_\beta(x, t_2)\}$  halmazra a redukciós mechanizmus matematikai alapját képező, (3.2.18a) feltétel nem teljesül. Viszont egy méter sugarú „szemcsék” esetében a belső szabadsági fokokról már nem lehet elfeledkezni. A súlypont fizikai jelentősége elvész, a redukciók „kiváltásában”, mint az első szakaszban már említettük, a belső szabadsági fokok koordinátáinak szétfolyása veszi át a szerepet.

Egyszerű alakú testek belső szabadsági fokainál azonban a klasszikus mozgástól (rezgés, forgás) való, a (4.2.14)-gyel analóg eltérések kísérleti kimutatására, mint a részletes elemzés mutatja, nincs remény, minthogy ilyenkor a termikus zajhoz való csatolás, magyarul a csillapodás, túl erős. Ezért a továbbiakban ilyen szabadsági fokokkal nem foglalkozunk. Elvi szempontból természetesen nem érdektelen, hogy a redukciós mechanizmus kizárja egy makroszkopikus hullámhosszú rezgési módus nemklasszikus jellegű (pl. nagymértékben határozatlan fázisú) nagyenergiájú gerjesztett állapotait.

(4.2.14) valójában azt fejezi ki, hogy a téridőszerkezet (rendkívül kismérvű) határozatlanságának folyományaképpen egy szabad szemcse is végez bizonyos „Brown-mozgást”. Ennek kísérleti igazolása  $R$  két tartományában sikerülhet.

a) Kolloid, azaz éppen a kritikushoz közeli szemcsék esetében nem elképzelhetetlen, hogy a szemcsét néhányszor  $t_2$  időn keresztül csakugyan képesek legyünk mindennemű atomi ütközéstől megóvni. Pózícióját három alkalommal optikai úton megmérve (éspedig a második alkalommal „ $a$ ”-nál nem nagyobb pontossággal!) (4.2.14) ellenőrizhető. Figyelemreméltó, hogy a helymérés megkövetelt pontossága mindössze  $a \approx 10^{-5}$  cm lenne; egyéb manipulációt pedig, az interferencia-kísérletekkel ellentétben, a szemcsén nem kellene végrehajtani. Amíg tehát a hullámfüggvény *koherenciájának* kimutatása reménytelen, a koherencia elvi korlátjának kimutatása nem az. A szerző azonban bevallja, hogy kolloid részecskék vákuumban való kezelhetőségéről nincs elképzelése.

b) A másik tartomány az  $R = 1$  cm körüli értékeknek felel meg. Noha tökéletes izolációról szó sem lehet, arra nincs is szükség. Egy ilyen méretű golyó és a környezet



között megvalósíthatunk olyan finom kapcsolatot, hogy a golyó mozgásában a (4.2.14) anomália domináljon a termikus kölcsönhatás befolyása fölött. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy (4.2.13) és (4.2.14) változatlanul érvényben marad, ha a golyóról nem azt tesszük fel, hogy szabad, hanem hogy *gyenge* harmonikus erők tartják fogva. A (4.2.14) anomália természetesen nem a klasszikus szabad, hanem a klasszikus, harmonikus mozgáshoz képest jelentkezik. A golyót hajszálvékony fonálon felfüggesztve, vagy torziós inga gömbjeként képzelhetjük el. A szóban forgó kis súly mellett a szál csillapítása kisebb lehet, mint a környező gázé s így a (4.2.14) anomália Brown-mozgás és a termikus Brown-mozgás viszonyáról mondottak érvényben maradnak. A következő pontban megvizsgáljuk, hogyan érvényesül (4.2.14) gázal körülvett, harmonikusan kötött golyó esetében.

### 3. Anomális Brown-mozgás

1. Az eddigiekben a várható érték és a szórás fogalmát az adott pillanatban aktuális fizikai állapotfüggvényre vonatkoztattuk és kvantummechanikai értelemben használtuk. Ebben a pontban a  $t=0$  pillanatban azonos kezdőfeltételekkel indított egydimenziós harmonikus mozgások egy sokaságáról fogunk beszélni és a  $t_n = n\tau$  pillanatban az  $x_n$ , ill.  $v_n$  hely-, ill. sebességek koordinátát klasszikus valószínűségi változóként kezeljük. Itt a szétfolyás—redukció ciklus időtartamát  $t_2$  helyett  $\tau$ -val jelöltük. A  $T$  rezgésidőt úgy választjuk meg, hogy  $T \gg \tau$  legyen. A mozgást a következőképpen írjuk le. Minden egyes  $t_n < t < t_{n+1}$  intervallumban a klasszikusnak tekintett  $x$  és  $v = \dot{x}$  az

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} - \omega^2 x \quad (4.3.1)$$

mozgásegyenletnek engedelmeskedik, az  $x(t_n+0) = x_n$ ,  $v(t_n+0) = v_n$  kezdőfeltételekkel. Az intervallum végén  $x$ , ill.  $v$  értékét az  $x(n)$ , ill.  $v(n) = \frac{\delta \cdot x(n)}{\tau}$  sztochasztikus változókkal megnöveljük.  $x(n)$  és  $v(n)$  fejezi ki az egyes redukciókkal járó parányi sztochasztikus ugrásokat. A különböző  $x(n)$ -ek természetesen egymástól függetlenek, várható értékük zérus, szórásuk egyenlő és „ $a$ ” nagyságrendjébe esik. A  $\delta$  konstans értéke a 2. ábra tanúsága szerint kb.  $\frac{1}{4}$ . A (4.3.1) egyenletben tekintetbe vettük a csillapítást, de az áttekinthetőség kedvéért elhagytuk a klasszikus Brown-mozgás Langevin-féle egyenletében szereplő sebességtől független erőtagot, amely az atomi ütközések fluktuációját fejezi ki. Utólag nyilvánvaló lesz ennek az elhanyagolásnak a jogossága. A mondottak alapján, kis csillapítást feltételezve és kihasználva, hogy

$$x_n = x_{n-1} + \tau v_{n-1} + x(n), \quad (4.3.2)$$

$$v_n = v_{n-1}(1 - \gamma\tau) - x_{n-1} \cdot \omega^2 \tau + \delta \frac{x(n)}{\tau}.$$

Minthogy nem jelent érdemi megszorítást, feltesszük, hogy  $x_0 = v_0 = 0$ . A (4.3.2) egyenletek az

$$x_n = \sum_{i=1}^n f_n(i) x(i) \quad (4.3.3)$$

$$V_n = \sum_{i=1}^n g_n(i) x(i)$$



előállítást sugallják. (4.3.3)-at (4.3.2)-be téve rekurziós összefüggést kapunk, melynek megoldása vektorírásmódban

$$\begin{pmatrix} f_n(i) \\ g_n(i) \end{pmatrix} = A^{n-i} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{\tau} \end{pmatrix}, \quad (4.3.4)$$

ahol  $A$   $2 \times 2$ -es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\omega^2 \tau & 1 - \gamma \tau \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Bontsuk fel  $\begin{pmatrix} 1 \\ \delta/\tau \end{pmatrix}$ -t  $A$  sajátvektorai szerint

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

és legyen  $\lambda_1, \lambda_2$   $A$  két sajátértéke. Akkor

$$f_n(i) = \lambda_1^{n-i} w_1 + \lambda_2^{n-i} z_1$$

és

$$g_n(i) = \lambda_1^{n-i} w_2 + \lambda_2^{n-i} z_2. \quad (4.3.7)$$

Mivel a klasszikus mozgásegyenlettől való eltérés nagyon lassan érvényesül, a megfigyelhetőség szempontjából csak az  $n \gg 1$  eset érdekes. Az  $x(i)$  változókat legegyszerűbb úgy modellizálni, hogy értékkészletük  $+\frac{a}{2}$  és  $-\frac{a}{2}$  legyen, egyaránt  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel. Akkor (4.3.7) és (4.3.3) alapján a valószínűségi eloszlásokra vonatkozó bármely kérdésre felelni tudunk. A legfontosabb természetesen  $x_n$  és  $v_n$  négyzetének átlaga.

$$\begin{aligned} \overline{x_n^2} &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n f_n^2(i) = \sigma^2 \left( \frac{1 - \lambda_1^{2n}}{1 - \lambda_1^2} w_1^2 + \frac{1 - \lambda_1^n \lambda_2^n}{1 - \lambda_1 \lambda_2} 2w_1 z_1 + \frac{1 - \lambda_2^{2n}}{1 - \lambda_2^2} z_1^2 \right) \\ \overline{v_n^2} &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n g_n^2(i) = \sigma^2 \left( \frac{1 - \lambda_1^{2n}}{1 - \lambda_1^2} w_2^2 + \frac{1 - \lambda_1^n \lambda_2^n}{1 - \lambda_1 \lambda_2} 2w_2 z_2 + \frac{1 - \lambda_2^{2n}}{1 - \lambda_2^2} z_2^2 \right), \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

ahol  $\sigma^2 = \overline{x^2(i)} \approx \frac{a^2}{4}$ .

$\tau$ -ban másodrendű tagokat elhanyagolva a sajátértékfeladat megoldása

$$w = \frac{\frac{\delta}{\tau} + \frac{\gamma}{2} + d}{2d} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma}{2} + d \end{pmatrix}, \quad z = \frac{\frac{\delta}{\tau} + \frac{\gamma}{2} - d}{2d} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\gamma}{2} + d \end{pmatrix}, \quad (4.3.9)$$

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\tau\gamma}{2} + \tau d, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\tau\gamma}{2} - \tau d,$$

ahol  $d = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}$ . A  $d=0$  eset külön eljárást igényel, amit itt nem részletezünk.



Két esetet vizsgálunk meg.

a) Legyen  $\omega \gg \gamma$  és legyen a megfigyelés  $n\tau$  időpontja olyan előrehaladott, hogy a kezdőfeltételek hatása már ne érződjék. (4.3.8)-ban ez az  $n \rightarrow \infty$  határesetnek felel meg. (4.3.9) és (4.3.8) alapján ekkor

$$\overline{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n^2} \approx \frac{a^2}{\tau^3 \omega^2 \gamma} \quad (4.3.10)$$

$$\overline{v^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{v_n^2} \approx \frac{a^2}{\tau^3 \gamma}. \quad (4.3.11)$$

Visszaemlékezve arra, hogy az előző pontban  $\tau$  helyett a  $t_2$  jelölést használtuk, (4.1.1) és (4.2.13a) összevetéséből

$$\frac{a^2}{\tau^3} \approx G^{4/3} \hbar^{1/3} \varrho^4 R^{-1/3}, \quad (4.3.12)$$

(4.3.10)-et elsősorban a normális termikus Brown-mozgás

$$\overline{x_{\text{term}}^2} \approx \frac{kT}{M \cdot \omega^2} \approx \frac{kT}{\varrho R^3 \omega^2} \quad (4.3.13)$$

átlagos amplitúdóegyenletével kell összehasonlítani. A golyó kellőképpen finom felfüggesztése esetén (4.3.10)-ben  $\gamma = \frac{6\pi\eta R}{M}$  használható, ahol  $\eta$  a környező gáz viszkozitása. Növekvő  $R$ -rel (4.3.13) gyorsan csökken, (4.3.10) gyorsan nő. Ezért az az  $R_0$  küszöb, amelynél az anomális és normális Brown-amplitúdó egyenlővé válik, a fel nem tüntetett numerikus tényezőkre alig érzékeny. Ha — cgs egységekben — pl.  $\varrho \approx 1$ ,  $kT \approx 10^{-14}$  és  $\eta = 10^{-4}$ , akkor  $R_0 \approx 0,1$  cm. Kisebbségi  $R$ -ekre az anomális Brown-mozgás elhanyagolható a normális mellett. Nagyobb  $R$  értékekre (4.3.10) sok nagyságrenddel felülmúlhatja (4.3.13)-at, mielőtt (4.2.13a) elveszti érvényét (és az anomális Brown-mozgás a belső szabadsági fokokra tevődik át, ahol a nagy belső csillapítás miatt nem érvényesül). Ebben az  $R$  tartományban utólag valóban látszik a (4.3.1) egyenlet jogosultsága. (4.3.10) még így is nagyon kicsi, de amennyiben az effektus csakugyan létezik, kellő körültekintéssel kimutathatónak látszik.

$R_0$ -lal ellentétben  $\bar{x}^2$  meglehetősen érzékeny a koherencia szélességre.  $\omega$  a nevezőben szerepel, ez torziós inga alkalmazását sugallja. A gyakorlati nehézségek (pl. a torziós szál folyamatos átkristályosodása stb.) vizsgálata folyamatban van.

Az utolsó megfigyelés eredményének „elfelejtéséhez” szükséges idő egyébként (4.3.8)-ból látható módon  $\approx \gamma^{-1}$ . A maximális  $\bar{x}^2$ -tel kecsegtető  $R$  tartományban ez  $\approx 10^5$  sec.



b) Legyen  $\omega=0$ . Ez az eset elsősorban elvi szempontból érdekes, noha mesterséges hold fedélzetén, tartós súlytalanság állapotában, kísérleti vonatkozásban is szóba jöhet. (4.3.8) és (4.3.9) alapján ekkor

$$\frac{x_n^2}{\sigma^2} = n \left( \frac{\delta}{y} + 1 \right)^2 + \frac{1 - (1-y)^n}{y} \cdot 2 \left( \frac{\delta}{y} + 1 \right) \left( -\frac{\delta}{y} \right) + \frac{1 - (1-y)^{2n}}{1 - (1-y)^2} \frac{\delta^2}{y^2}, \quad (4.3.14)$$

$$\frac{\overline{v_n^2}}{\sigma^2} = \frac{1 - (1-y)^{2n}}{1 - (1-y)^2} \cdot \frac{\delta^2}{\tau^2}, \quad y = \tau\gamma.$$

A golyó most nincs helyhez kötve, ezért ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $\overline{x_n^2}$  divergál.  
 $n \ll (\tau\gamma)^{-1}$  mellett

$$\frac{\overline{x_n^2}}{\sigma^2} = \frac{n^3}{3} \delta^2 + n^2 \left( \delta - \frac{\delta^2}{2} \right) + n \left( 1 - \delta + \frac{\delta^2}{\sigma} \right), \quad (4.3.15a)$$

$$\frac{\overline{v_n^2}}{\sigma^2} = n \frac{\delta^2}{\tau^2}. \quad (4.3.15b)$$

Ha valaha sikerülni fog  $R \approx 10^{-5}$  cm sugarú szemcsék viszonylag tartós izolálása, akkor ezekre a képletekre lesz szükség. Az  $R \approx 1$  cm tartományban (4.3.15)-nél fontosabb az  $n \gg (\tau\gamma)^{-1}$  „stacionárius” bolyongás. Ekkor

$$\overline{x_n^2} = \sigma^2 n \frac{\delta^2}{\tau^2 \gamma^2} \approx \frac{a^2}{\tau^2 \gamma^2} n, \quad (4.3.16a)$$

$$\overline{v_n^2} = \sigma^2 \frac{\delta^2}{\tau^2} \cdot \frac{1}{2\tau\gamma} \approx \frac{a^2}{\tau^3 \gamma}. \quad (4.3.16b)$$

A klasszikus mozgástól való kismérvű deviáció (4.3.15b) vagy (4.3.16b) tanúsága szerint azzal a következménnyel jár, hogy az impulzus- és energiatétel sem teljesül maradéktalanul. Ez az eredmény azonban összhangban van azzal a feltételezéssel, hogy a téridő szerkezete kismértékben határozatlan. Amíg a  $\gamma$  súrlódás elhanyagolható, a golyó vagy szemcse  $\tau$  idő alatt átlagosan  $\frac{\delta^2}{\tau^2} M$  többletenergiára tesz szert.

A (4.3.16b) „stacionárius” sebesség elérése után  $\tau$  idő alatt ennyi energia adódik át a környező közegnek. A téridő és az anyag közötti energiaközlekedésnek ez a része eltörpül a kozmológiai vonatkozású (az univerzum tágulásával kapcsolatos) energiacsere mellett.  $R=1$  cm sugarú gömb súlypontkoordinátája az univerzum teljes életkorának megfelelő idő alatt mindössze  $\approx 10^{-4}$  erg energiát szívna el a téridőtől.

## V. Termikus zaj és a szuperpozíció szétesése

### 1. Szubmakroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciója

1. Az előző fejezetben olyan problémával foglalkoztunk, amelynél a hullámfüggvény propagációjában a szétfolyás—redukció ciklusokat egyetlen, kitüntetett szabadsági fok viselkedése irányította.



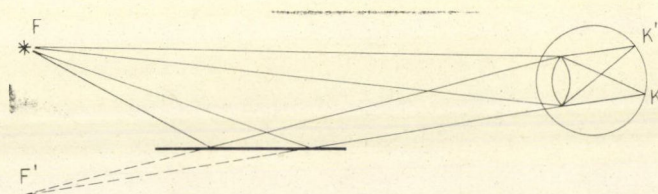
Világos, hogy egy makroszkopikus test súlypontjának kellőképpen nagy határozatlansága makroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciójának felel meg. A redukciók az előző fejezetben éppen az ilyen szuperpozíciók szétesésére vezettek, vagy helyesebben, éppen a (4.2.13) összefüggés adott felvilágosítást arra nézve, hogy a súlypont milyen mérvű határozatlanságánál kell az állapotfüggvényt makroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciójának, azaz redukcióra érett szuperpozíciónak tekinteni.

A (4.2.13) összefüggés levezetésében az a körülmény játszott döntő szerepet, hogy a *tömegeloszlás bizonytalanságára*, ami a súlypont bizonytalanságának közvetlen folyománya, a (4.2.6) zavaró potenciál s vele a (4.2.9) fázis érzékeny. Ha a szóban forgó súlypont egy atomi folyamathoz csatolt mérőberendezés mutatójához tartozik, (4.2.13) érvényben marad és szavatolja a teljes hullámfüggvény „különböző mutatóálláshoz” tartozó komponenseinek szétesését.

Nehéz azonban elnyomni azt az érzést, hogy számos esetben, amikor egy atomi folyamat „makroszkopikus” fejleményekhez van csatolva, a szuperpozíció hamarabb szétesik, mielőtt az egyes komponensekhez tartozó tömegeloszlások között olyan mérvű különbség fejlődne ki, ami a (4.2.13) összefüggéseknek felel meg [40].

Pl. egy fényképlemez *A*, ill. *B* helyéhez közeledő „szétkent” elektron becsapódása után, de még a fényképlemez „előhívása” előtt, az *A*, helyen, illetve a *B* helyen létrejött ezüstkiválásnak megfelelő állapotok tömegeloszlása majdnem tökéletesen egyforma, s kellő körültekintés mellett az előhívás során is ilyen marad. Alig hihető, hogy a szuperpozíció ilyenkor mindaddig életben marad, amíg a feketedés helyzetéhez további, a tömegeloszlás növekvő különbségére vezető szabadsági fokokat nem csatolunk.

A legkiélezettebb példát a látás folyamata szolgáltatja, pl. a 3. ábra szerinti elrendezésben.



3. ábra

Az *F* fényforrás kellőképpen kicsiny erejű felvillantásával elérhető, hogy a retina a *K*, illetve *K'* helyen beinduló reakció szuperpozíciójának állapotába kerüljön. A látásélmény mindig határozott. Valószínű, hogy a szuperpozíció két ágának megfelelő kémiai reakciók az idegrendszer tömegeloszlásában nem hoznak létre akkora különbséget, hogy (4.2.13) mintájára „makroszkopikusan különböző” állapotokról lehessen beszélni. A szuperpozíció mégis szétesik.

A továbbiakban alkalmas példán megmutatjuk, hogy az állapotfüggvény időbeli fejlődésének ciklikus modellje a csupán szubmakroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciója esetében is számot ad a szuperpozíció fokozatos, sztochasztikus széteséséről. A szétesés ilyenkor a termikus szabadsági fokok közvetíté-



sével, az utóbbiaknak a redukciós ciklusokat irányító viselkedésén keresztül következik be.

Az ilyen problémákban tehát a vizsgálandó szabadsági fokok száma szükségképpen nagy.

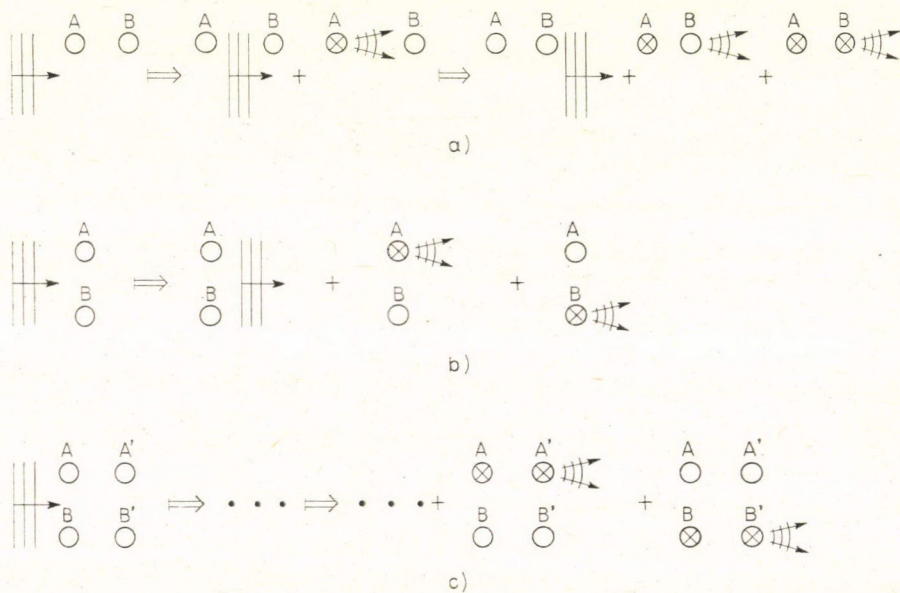
A tárgyalást megnehezíti, hogy a Schrödinger-egyenletet ténylegesen megoldani nem tudjuk. Sokszor — így az általunk választott esetben — azonban a megoldás bennünket érdeklő tulajdonságaira a statisztikus termodinamika módszereivel következtetni tudunk.

A bemutatásra kerülő példa a ködkamranyom létrejöttének problémája. Az egyszerűsítő feltevések, amelyekkel élni fogunk, a probléma fizikai lényegét nem érintik, lehetővé teszik azonban a gondolatmenet matematikai nyomkövetését.

Kísérleti szempontból az eredmények nem adnak újat. Elméleti szempontból mégis fontosnak tartjuk őket, minthogy a makroszkopikus viselkedés kvantummechanikai értelmezését logikailag teljessé teszik.

2. A ködkamranyom kérdése már a kvantumelmélet hőskorában tanulságos példaként szerepelt [41—42]. A legegyszerűbb tárgyalásban a ködkamra gázát mindössze két, alapállapotban levő a térben rögzített helyzetű atom szimbolizálja, a beeső részecskét, mondjuk egy elektront, síkhullámmal reprezentáljuk. A számítás abban áll, hogy másodrendű perturbációs számítással meghatározzuk a kétszeres inelasztikus elektronszórás hatáskeresztmetszetét. Eredmény: ez a hatáskeresztmetszet elhanyagolhatóan kicsi, hacsak a két atomot összekötő egyenes nem (közel) párhuzamos a beeső (nagyenergiájú) elektron impulzus vektorával.

A 4. ábrán intuitíven világos jelöléssel felvázoltuk a teljes hullámfüggvény ortodox fejlődése során kifejlődő szuperpozíciót, a 4c ábrán azzal a bővítéssel,

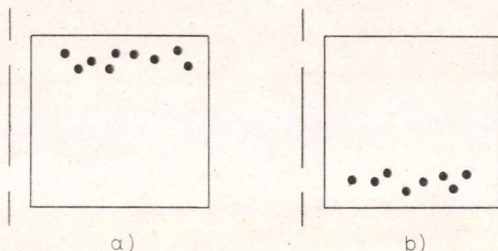


4. ábra



hogy kettő helyett négy atomot szerepeltettünk. Olyan állapot valóban nem jelenik meg a szuperpozícióban, amelyik a beeső impulzusra *merőleges* irányban kiterjedt „nyomnak” felelne meg. A mi szempontunkból azonban magyarázatra szorul a hullámfüggvény és a ködkamrában egy-egy esetben kialakuló fizikai állapot között a kapcsolat. Az ortodox elmélet ezt nem adja meg.

Realisztikus számításnál elvben tekintetbe kellene venni a ködcseppképződés részleteit.



5. ábra

Tegyük fel, hogy a ködkamrában való belépés előtt az ionizáló részecske két kicsiny nyílással ellátott diafragmán haladt át. A ködképződés után a teljes rendszer ortodox állapotfüggvénye  $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$  alakú, ahol  $\psi_1$ , illetve  $\psi_2$  annak felel meg, hogy a nyom az egyik, illetve másik nyílás mögött jön létre. (Elhanyagoljuk azt a komponenst, amely szerint a részecske egyáltalán nem hatolt be a kamrába.)  $\psi_1$ , illetve  $\psi_2$  külön-külön is egy-egy hihetetlenül bonyolult szuperpozícióként fogható fel, amelynek tagjai különböző, de önmagukban nézve határozott ködcsepp-eloszlásnak felelnek meg.  $\psi_1$ , illetve  $\psi_2$  egy-egy tipikus tagját mutatja szimbolikusan az 5a, ill. 5b ábra. A cseppecskék pontos számában, nagyságuk és helyzetük eloszlásában megmutatkozó szeszély az illető komponens bonyolult múltjával (a cseppkezdemények növekedésével, egyesülésével, diffúziójával stb.) függ össze. A gázatomokra és egyéb szabadsági fokokra vonatkozó információt a rajz nem szemlélteti.

Ha a hullámfüggvény pontos alakját természetesen nem is, a cseppecskék nagyság szerint várható eloszlását a kamra expanzióját követően a termikus egyensúly beálltakor a ködképződés Mayer-féle elmélete jól megadja [43]. Tűrhető képünk van egy találmányra kiszemelt cseppkezdemény növekedésének átlagos időbeli lefutásáról is [44]. Ezekben a számításokban a kvantummechanikai szuperpozíció szétválásának kérdése érdemben nem analizálható, ezért fel sem merül.

A  $\{\psi_\beta\}$  fizikai hullámfüggvény viselkedésének nyomonkövetésével azonban a szuperpozíció sorsa tisztázható.

3. Realisztikus ködkamranyom esetében a végállapotban a cseppecskék között olyan nagyok is akadnak, hogy az ortodox  $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$  egészen biztosan „makroszkopikus szuperpozíció”: fizikai hullámfüggvényként (a  $\{\psi_\beta\}$  halmaz  $\beta=0$ -hoz tartozó elemeként) nem maradhatott életben, már sokkal korábban szét kellett esnie. Ha előbb nem, hát akkor, mikor a  $\psi_1$ , ill.  $\psi_2$  által képviselt tömegeloszlások különb-

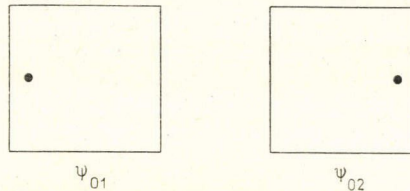


sége (a cseppnövekedés előrehaladtával) elérte a (4.2.13b) összefüggésben szereplő értéket.\*

Bennünket most a szubmakroszkopikus szuperpozíció sorsa érdekel, ezért feltesszük, hogy alkalmas beállítás révén a cseppnövekedés kellő időben abba-maradt. Sőt ezen túlmenően, a továbbiakban feltesszük, hogy

a) a teljes rendszer a  $V$  térfogatba zárt  $T$  hőmérsékletű gázból és egyetlen ködcseppből áll, és

b) a  $t=0$  kezdőpillanatban az állapotfüggvény, közelebbről az azt reprezentáló halmaz  $\beta=0$ -hoz tartozó eleme  $\psi_0 = c_1\psi_{01} + c_2\psi_{02}$  alakú, ahol  $\psi_{01}$ , ill.  $\psi_{02}$  a ködcsepp egy-egy lényegében határozott, egymástól eltérő helyzetének felel meg (l. 6. ábra), továbbá  $\psi_{01}$ -nek és  $\psi_{02}$ -nek a gáz állapotára vonatkozó tartalma az alábbiakban részletezett értelemben hasonló.



6. ábra

A szubmakroszkopikus jelző ez esetben konkrétan azt jelenti, hogy a szuperpozícióban szereplő két csepphelyzet távolsága *kisebb*, mint a ködcsepp  $M$  tömegéhez a (4.2.13b) összefüggés alapján tartozó koherenciaszélesség.

A „lényegében határozott” kitétel viszont azt jelenti, hogy külön-külön a  $\psi_{01}$ , ill.  $\psi_{02}$  állapotban a ködcsepp helyzetének bizonytalansága jóval kisebb, mint a  $\psi_{01}$ , ill.  $\psi_{02}$  által képviselt helyzet távolsága.

Az idő múlásával mind a  $\psi_{01}$ , mind a  $\psi_{02}$  komponens esetében a csepp helybizonytalansága növekszik, a csepp Brown-mozgást végez. Megfelelően választott kezdőadatok mellett azonban ez a körülmény éppúgy nem érezteti a hatását a koherencia szétesésének időtartama alatt, ahogy a csepp növekedése vagy párolgása sem. Természetesen, ha a  $\psi_{01}$ , ill.  $\psi_{02}$  által képviselt csepphelyzet távolsága számottevő, akkor a szóban forgó cseppkezdemény alig érdemli meg a csepp nevet; esetleg csak néhány száz atomból áll.

## 2. Koordinátaválasztás és cellabeosztás

1. A (3.2.13) egyenlet (3.4.7) megoldásából indulunk ki:

$$\psi_\beta(x_i, t) = \psi_0(x_i - \varepsilon_\beta(x_i, t), t) \cdot \exp(i\Phi_\beta(x_i, t)), \quad (5.2.1)$$

ahol

$$\Phi_\beta(x_i, t) = -\frac{1}{\hbar} \sum_i m_i c^2 \frac{1}{\sqrt{V}} \left( \frac{c_k}{-i\omega} e^{i(kx_i - \omega t)} + \frac{c_k^*}{i\omega} e^{-i(kx_i - \omega t)} \right) \quad (5.2.2)$$

\* Tájékoztató céljára (4.2.13b) közvetlenül használható: „a” jelentse a ködfonal két lehetséges helyzete között a távolságot,  $M$  a ködfonalban kicsapódott víz tömegét.



Itt  $x_i$  az  $i$ -edik atom helykoordinátáját jelenti,  $\varepsilon_\beta(x_i, t)$  értelmét (3.4.11) tisztázza. (5.2.1)-ben elhagytuk a (3.4.7)-ben még feltüntetett érdektelen fázistényezőt.

Mínthogy a numerikus eredményeknek közvetlen jelentősége nem lesz, az írásmunka rövidítése érdekében

a) feltesszük, hogy a rendszer valamennyi, összesen mondjuk  $N$  számú, atomjának tömege egyenlő,  $m_i = m$ . Ebből az  $N$  atomból mondjuk  $z$  darab alkotja a ködcseppet ( $z \ll N$ ).

b) A (3.2.5)-ben szereplő  $V$  térfogatot a gáz térfogatával azonosítjuk, elhanyagolva ily módon a  $V'_\beta = mc^2 \sum_{i=1}^N \gamma(x_i, t)$  zavaró potenciál a gáztér méreténél nagyobb hullámhosszú részének igazolhatóan kicsiny hatását,

c) olyan kicsiny gáztérfogatra szorítkozunk, hogy  $\varepsilon_\beta(x_i, t)$  is elhanyagolható legyen a (3.2.18) felbontás szempontjából. Mint az utólagos ellenőrzés mutatja, a realizitikus ködkamraméretnek a kritériumnak megfelelnék.

$\Phi_\beta$  kifejezése a

$$q_k = \sum_{i=1}^N e^{ikx_i} = \sum_{i=1}^N \cos kx_i + i \sum_{i=1}^N \sin kx_i = r_k + is_k, \quad (5.2.3)$$

egyenlettel definiált  $r_k, s_k$  általános koordináták bevezetését sugallja. Pontosabban, minthogy  $k$  értékkészlete végtelen nagy, a szilárd testek fajhőjének Debye-féle elméletéből ismerős módon a  $3N$  független atomi koordináta helyett az első  $\frac{1}{2} 3N$  darab  $(\tau_k, s_k)$  koordinátapárt fogjuk használni. A konfigurációs tér ezért a továbbiakban az  $\frac{1}{2} 3N$  darab  $(\tau_k, s_k)$  valós sík együttesét jelenti. Ha félreértés veszélye nem áll fenn, ennek a térnek egy helyvektorát röviden  $q = (\dots, q_k, \dots) \equiv (q_k)$ -val jelölhetjük, noha  $q_k$  komplex.

Amikor a következőkben a  $\{\psi_\beta(q, t)\} \equiv \{\psi_\beta(q_k, t)\}$  állapotfüggvényről beszélünk,  $\psi_\beta(q_k, t)$ -n nem egyszerűen (5.2.1)-nek az (5.2.3) inverze segítségével kifejezett alakját értjük, hanem egy attól az (5.2.3) összefüggés Jacobi-determinánsát tartalmazó faktor erejéig különböző függvényt: az állapotvektornak a  $|q\rangle \equiv |q_k\rangle$  bázisvektorokra vonatkozó kifejtését, ahol

$$\langle q_k | q'_k \rangle = \pi \delta(q_k - q'_k) = \pi \delta(r_k - r'_k) \delta(s_k - s'_k). \quad (5.2.4)$$

A  $|q_k\rangle$  és  $|x_i\rangle$  bázisvektorok kapcsolatának explicit alakjára nem lesz szükségünk.

Elvben mind  $\varepsilon_\beta(x_i, t)$ , mind pedig (5.2.2)-ben a  $k$ -ra vonatkozó összeg első  $\frac{1}{2} 3N$  tagja *utáni* tagokban  $x_i$  a  $q$  helyvektorral kifejezhető. Azonban (5.2.2)-ben a  $k$ -ra vonatkozó összeg szóban forgó része (3.2.7) tekintetbevételével minden szempontból kicsinynek bizonyul,  $\varepsilon_\beta$  pedig, mint kikötöttük, a (3.2.18) felbontás szempontjából lényegtelen. Ezért mindkettőt elhagyjuk.

Ezek után az új bázisvektorokra vonatkoztatott fizikai hullámfüggvény

$$\psi_\beta(q_k, t) = \psi_0(q_k, t) \cdot \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} mc^2 \frac{1}{V} \sum_k \left( q_k \frac{c_k}{i\omega} e^{-i\omega t} + q_k^* \frac{c_k^*}{i\omega} e^{i\omega t} \right) \right], \quad (5.2.5)$$

itt  $\psi_0(q_k, t)$  a  $\beta=0$ -hoz tartozó megoldás.  $\Phi_\beta$ -ban az összegezés  $\frac{3}{2} N$  tagra terjed ki.



2. A konfigurációs tér  $q = (q_k)$  és  $q' = (q_k + a_k)$  helyvektorú pontjaira nézve a fáziskülönbség négyzetes szórása:

$$\overline{(\Phi_\beta(q_k, t) - \Phi_\beta(q_k + a_k, t))^2} = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 V} \sum_k 2 |a_k|^2 \frac{|\overline{c_k}|^2}{\omega^2} = \sum_k \frac{|a_k|^2}{l_k^2}, \quad (5.2.6)$$

ahol  $|\overline{c_k}|^2$  értékét 3.2.7-ből behelyettesítve

$$l_k \cong \frac{\hbar}{mc} \sqrt{V} \alpha^{-2/3} \cdot k^{11/6}. \quad (5.2.7)$$

A kissé szokatlan koordinátaválasztást éppen (5.2.6) egyszerű alakja indokolja.

Legyen  $a = (a_k)$  speciálisan olyan, hogy csupán egyetlen  $a_{k_0}$  különbözzék zérustól. A konfigurációs tér ilyen  $a$ -val elválasztott pontjaihoz tartozó hullámamplitúdók inkoherensnek minősülnek, ha

$$\overline{(\Phi_\beta(q, t) - \Phi_\beta(q + a, t))^2} \approx \pi^2 \quad (5.2.8)$$

(5.2.6) ekkor az egyetlen  $\frac{|a_{k_0}|^2}{l_{k_0}^2}$  tagból áll. (5.2.8) és (5.2.6) összevetése megmutatja, hogy mi a  $q$  tér cellákra osztásának legegyszerűbb módja. Nevezetesen minden egyes  $q_k$  (azaz  $r_k, s_k$ ) síkot  $l_k$  élű négyzetekre s így a  $q$  teret hiperhasábokra oszthatjuk. Végezzük el ezt a felosztást és számozzuk meg a cellákat. Legyen az  $i$ -ik cella középpontja  $q(i)$ . Ha a  $q=0$  origót cellaközéppontnak választjuk, akkor  $i$  megadása az  $(m_k(i), n_k(i))$  egész számpárok sorozatának megadásával ekvivalens, az

$$r_k(i) = m_k(i) \cdot l_k, \quad s_k(i) = n_k(i) \cdot l_k \quad (5.2.9)$$

jelentéssel.

A cellabeosztásnak ez a módja, mint látni fogjuk, revízióra szorul. Előnye azonban, hogy áttekinthető, ezért egyelőre ennél maradunk.

A redukcióra érett hullámfüggvényt az  $i$ -ik cellára vetítő, a (3.4.6) egyenlettel általánosan definiált  $f_i(q)$  projekciós függvények alakja explicite megadható:

$$f_i(q) = f_i(r_k, s_k) = C \cdot \exp \left( -2 \sum_k \frac{[r_k - r_k(i)]^2 + [s_k - s_k(i)]^2}{l_k^2} \right), \quad (5.2.10)$$

$$C = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{-\frac{3}{2} N}. \quad (5.2.11)$$

$C$  megválasztása azt biztosítja, hogy az  $\int \prod_k dr_k ds_k f_i^2(q)$  integrál a (3.4.6) kirovásnak megfelelően éppen a  $\tau = \prod_k l_k^2$  cellatérfogattal egyezzen meg.

Legyen  $t_{(n)}=0$  egy redukciót közvetlenül megelőző pillanat s legyen ekkor a fizikai hullámfüggvény  $\beta=0$ -hoz tartozó eleme  $\psi_0^k(q, t_{(n)}=0)$ . A  $k$  index arra kíván utalni, hogy az előző,  $t_{(n-1)}=t_{(n)}-t_2$  pillanatban bekövetkezett redukció éppen a  $k$ -adik cellára történt. A  $t_{(n)}$  pillanatban

$$P_{ik} = \int \prod_k dr_k ds_k f_i^2(q) |\psi_0^k(q, t_{(n)}=0)|^2 \quad (5.2.12)$$



valószínűséggel végbemegy a

$$\psi_0^k(q, t_{(n)} - 0) \rightarrow \psi_0^i(q, t_{(n)} + 0) = N_{ik} f_i(q) \cdot \psi_0^k(q, t_{(n)} - 0) \quad (5.2.13)$$

redukció. Az  $N_{ik}$  normálási tényező úgy van megválasztva, hogy  $\psi_0^i(q, t_{(n)} + 0)$  normája 1 legyen. Természetesen

$$(N_{ik})^2 = \frac{1}{P_{ik}}.$$

A fizikai hullámfüggvényt természetesen minden pillanatban a teljes  $\{\psi_\beta\}$  halmaz reprezentálja. A (3.4.6) kapcsán mondottakat ismételve leszögezzük, hogy a sztochasztikusan kiválasztott  $f_i(q)$  tényezővel való szorzás az (5.2.10) definíció mellett  $\psi_0^k(q, t_{(n)} - 0)$  tartalmát csak olyan mértékben változtatja meg, amilyen mértékben az a szeszélyes  $\Phi_\beta$  fázistényező miatt is elmosódik.

3.  $t_2$  egy expanziós szakasz időtartama. Az az idő, aminek elteltével a szétfolyás „számottevőnek” minősíthető.

Az előző fejezetben  $t_2$  nagyságrendben a súlypont hullámfüggvényének kétszeres szélességre való szétfolyásához szükséges időt jelentette. A III. fejezetben általánosságban akkor tekintettük a szétfolyást számottevőnek, amikor a hullámfüggvény egy-egy szomszédos cellára eső vetületének normája megszűnt érzékenyen függeni a cellabeosztás pontos elhelyezkedésétől.

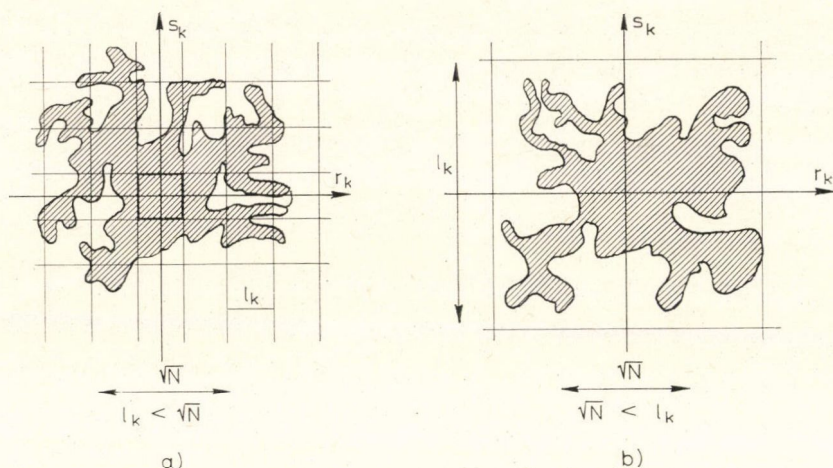
Sok szabadsági fokú rendszernél bonyodalmat okozhat, hogy a szétfolyás sebessége az egyes szabadsági fokok mentén nem egyforma. A jelen problémában azonban, mint rögtön megmutatjuk, a lényeges, azaz a nem túl nagy abszolút értékű  $k$  hullámszámvektorokhoz tartozó  $(r_k, s_k)$  koordináták mentén az  $lk$  koherencia-szélesség kétszeresére való szétfolyáshoz ugyanakkora,  $k$ -tól gyakorlatilag független időtartam szükséges. Ezt fogjuk  $t_2$ -nek tekinteni.

### 3. A hullámfüggvény viselkedése

1. A továbbiakhoz mindenképp azt kell felidéznünk a statisztikus mechanikából, amit a gáz+csepp rendszer *ortodox* hullámfüggvényének viselkedéséről, illetve amit ennek kapcsán a  $\psi_0^k(q, t)$  függvényekről egy-egy  $t_{(n)} < t < t_{(n+1)}$  expanziós, azaz a Schrödinger-egyenletet követő szakaszban tudunk.

A legegyszerűbb talán az lesz, ha a gáz+csepp rendszer mellett, azzal párhuzamosan, egy tisztán gázból álló rendszerről is beszélünk. Az utóbbira vonatkozó mennyiségeket megkülönböztetésül egy  $g$  indexszel is ellátjuk, így pl. a hullámfüggvényt  $\psi_{g0}(q, t)$ -vel jelöljük. Hogy a  $q$  térben az összehasonlítás könnyű legyen, feltesszük, hogy a tiszta gáz atomjainak a száma is  $N$ . A gáz+csepp rendszer esetében  $N-z$  a gázatomok száma. Feltesszük, hogy a gáz statisztikus viselkedésében *mindkét* esetben a gázatomok egymással való ütközése játszik döntő szerepet, továbbá, hogy a két rendszer statisztikus viselkedésének a gázkomponens szempontjából való összehasonlításánál a gázatomok számának kis különbsége lényegtelen. A tiszta gázra vonatkozó statisztikus mechanikai tudnivalókat a 7. és 8. ábra szimbolizálja. Ezt az ábrázolást *N. G. Van Kampen* [45] tanulmányának ábrái sugallták, ott az árnyékolt rész a fázispontok sokaságát jelentette a klasszikus fázistérben. Itt az árnyékolás a konfigurációs tér azon pontjait emeli ki, amelyekhez számottevő hullámmplitúdó tartozik. A 8. ábra a teljes  $q$  teret szimbolizálja. A 7a, ill. 7b ábrát





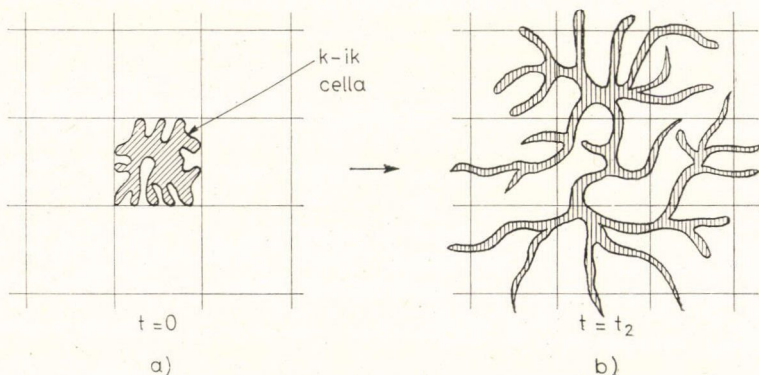
7. ábra

úgy foghatjuk fel, hogy az ortodox  $\psi_{g0}(\dots, r_k, s_k, \dots, t)$ -t rögzített  $r_{k'}, s_{k'}, k' \neq k$  mellett ábrázolja, vagy ha tetszik,  $\int \prod_{k' \neq k} dr_{k'} ds_{k'} |\psi_{g0}|^2$  képének tekinthetjük.

A gáz nem túl sűrű, az atomok elhelyezkedése egymástól nagymértékben független. (5.2.3) alapján világos, hogy termikus egyensúlyban az ortodox hullámfüggvény minden egyes  $(r_k, s_k)$  síkban egy  $\approx \sqrt{N}$  átmérőjű tartományra terjed ki. Az a kritikus  $k_{krit}$  érték, amely a későbbiekben a redukciós ciklusok szempontjából „fontos” ( $|k| < k_{krit}$ )  $k$ -kat a lényegtelen ( $|k| \gg k_{krit}$ )  $k$ -któl elválasztja, az  $l_k = \sqrt{N}$  definíció és (5.2.7) segítségével

$$k_{krit} \cong \left( \sqrt{\frac{N}{V}} \alpha^{2/3} \frac{mc}{\hbar} \right)^{6/11} \quad (5.3.1)$$

alakban fejezhető ki. Az ennél lényegesen nagyobb abszolút értékű  $k$ -khoz tartozó  $r_k, s_k$  koordináták mentén az ortodox hullámfüggvény egyáltalán nem folyik szét



8. ábra



annyira, hogy redukció váljék szükségessé. Ezeket a szabadsági fokokat akár ki is zárhatjuk a tárgyalásból, vagy pedig elkönyvelhetjük, hogy ilyen  $k$ -kra a teljes  $q$  tér „aktív” cellái esetén  $m_k$  és  $n_k$  mindig zérus. A kritikushoz közeli  $k$ -jú ( $r_k, s_k$ ) síkok további megfontolást igényelnek, erre még visszatérünk.

Az ortodox kvantumstatisztikában teljes homályban marad az a kérdés, hogy a gáz állapotfüggvényét a konfigurációs térben való kiterjedés milyen mértékénél kell makroszkopikusan különböző állapotok szuperpozíciójának tekinteni, vagy másképpen, hogy a pillanatnyi fizikai realitásnak megfelelő hullámfüggvény általában mekkora teret foglal el.

Tegyük fel, hogy az ortodox elméletben közelebből meg nem indokolható módon, (egy „megfigyelés” eredményeképpen) a  $t=0$  pillanatban a  $\psi_{g0}^k(q, 0)$  állapotfüggvény éppen a teljes  $q$ -tér  $k$ -adik cellájára terjed ki. Az egyes ( $r_k, s_k$ ) síkokban természetesen ekkor az (5.2.9) által definiált,  $l_k$  élű tartományokra koncentrálódik a hullámmplitúdó.

Legyen  $t$  nem túl kicsiny, de egyébként tetszőleges pozitív időérték. A statisztikus mechanika egyik alapfeltevése a következő. Kivételes, ezért statisztikai megfontolásoknál elhanyagolható kezdőállapotok eseteitől eltekintve a  $\psi_{g0}^k(q, t)$  hullámfüggvény  $i$ -edik cellára eső vetületének normája, vagy ami ezzel lényegében ekvivalens, a

$$P_{gik}(t) = \int \prod_k dr_k ds_k f_i^2(q) \psi_{g0}^k(q, t). \quad (5.3.2)$$

átmeneti valószínűség nem függ  $\psi_{g0}^k(q, 0)$  konkrét alakjától, hanem (adott hőmérséklet mellett) csupán a cellák elhelyezkedésétől. Amennyiben a cellák helyzetét a  $q(i), q(k)$  középpontokkal jellemezzük,  $P_{gik}(t)$  helyett  $P_g(q(i), q(k), t)$  is írható. A tétel érvényessége s  $P_g$  definíciója természetesen nincs a cellaközéppontok 5.2.9 választásához kötve.

Az ortodox kvantumstatisztikában semmi nem áll annak a feltételezésnek az útjában, hogy két „megfigyelés” között a hullámfüggvény a konfigurációs térben tetszőlegesen kiterjedjen. Annak a valószínűsége, hogy „egy második” megfigyelés, mondjuk a  $t'' = t + t'$  pillanatban a gázt a  $k$ -adik cellában találja,

$$P_{gk k_0}(t'') = \sum_{k'} P_{gk k'}(t') \cdot P_{gk' k_0}(t) \quad (5.3.3)$$

alakban írható. A különböző  $k'$  cellákon át a  $k$  cellába propagált hullámfüggvénykomponensek bonyolultságuknál fogva egymásra ortogonálisnak tekinthetők, ezért nem lépnek fel (5.3.3)-ban interferenciatagok. A  $(0, t'')$  időintervallumban a Schrödinger-egyenletet követő hullámfüggvény vetületét a  $k$ -adik cellára a kezdeti  $\psi_{g0}^k(q, 0)$  hullámfüggvény egyértelműen megszabja.

2. Az ortodox kvantumstatisztika (5.3.2)-vel kifejezett tételét értelemszerűen ki fogjuk terjeszteni a gáz + ködcsepp rendszerre, és a fizikai hullámterjedés egy-egy expanziós szakaszára alkalmazzuk. Az expanzióknak most határt szab az (5.2.8) koherenciafeltétel. A redukciók  $t_2$  időnként követik egymást. Ha a  $t=0$  pillanatban a fizikai hullámfüggvény a  $k_0$  cellát foglalta el, akkor annak valószínűsége, hogy a  $t_{(n)} + 0 = nt_2 + 0$  pillanatban a  $k_n$  cellát fogja elfoglalni

$$P_{k_n k_0}(nt_2) = \sum_{k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1} P_{k_n k_{n-1}}(t_2) P_{k_{n-1} k_{n-2}}(t_2) \dots P_{k_1 k_0}(t_2). \quad (5.3.4)$$

Az ortodox statisztikával ellentétben, (5.3.4) most azt fejezi ki, hogy a *tényleges* hullámfüggvény a  $t=0$  pillanattól kezdve a konfigurációs térben az összeg *valamelyik*



(de csupán egyik) tagjának megfelelő bolyongását hajtja végre, a megfelelő valószínűséggel. A  $t = nt_2 + 0$  pillanatban a  $k_n$  cellába „érkező” hullámfüggvény konkrét alakja a múltjától függ, különböző  $k_{n-1} \dots k_1$  sorozatokra más és más. Ezért nem annyira az (5.3.4) összeg, mint annak egyes tagjai s a megfelelő hullámfüggvények érdekesebb számunkra. Az utóbbiak tartalmazzák a ködcsapp helyzetére vonatkozó szuperpozíció sorsát.

Vizsgáljuk meg először az első lépést.

A  $t=0$  pillanatban a ködcsapp helyzete határozatlan, a  $\psi_0^{k_0}(q, 0)$  kezdőállapot ennek megfelelően a  $c_1\psi_{01}^{k_0}(q, 0) + c_2\psi_{02}^{k_0}(q, 0)$  szuperpozíciói. Közelebbről legyen közönséges derékszögű koordinátákban a csepp súlypontjának helyzete a  $\psi_{01}^{k_0}$  állapotban  $X_1$ , a  $\psi_{02}^{k_0}$  állapotban  $X_2$ . A hullámamplitúdó  $q$  koordinátákkal kifejezett alakjából természetesen igen nehéz lenne  $X$  értékére visszakövetkeztetni, de megfordítva, (5.2.3) alapján annál könnyebb átlátni, hogy a  $q$  térben a gázatomok olyan konfigurációi által produkált  $q$  értékeket, amelyekhez el nem tűnő valószínűségi amplitúdó tartozik, a csepp jelenléte az első, ill. második komponens esetében az

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1k}) \cong (v \cdot e^{ikX_1}), \quad (5.3.5)$$

ill.

$$\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2k}) \cong (ze^{ikX_2})$$

értékekkel növeli meg. ((5.3.5 felírásánál kihasználtuk, hogy külön-külön  $X_1$ , ill.  $X_2$  bizonytalansága, valamint a csepp mérete kisebb, mint  $k^{-1}$ , minden  $k$ -ra. Elképzelhető, hogy elég nagy  $k$ -ra ez nem teljesül, az ilyen  $k$  értékek azonban bizonyosan az (5.3.1) határ fölött vannak és a redukcióknál nem játszanak szerepet.  $Z$  a csepp atomjainak száma.  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$  nem tévesztendő össze a korábban elhagyott  $\varepsilon_\beta$ -val.)

A  $\psi_0^{k_0}(q, 0)$  kezdőállapot ennél fogva a gáz+csepp rendszer gázrészére vonatkozólag a következő információt tartalmazza. A  $\psi_{01}^{k_0}(q, 0)$  komponens a gáznak lényegében ugyanazt az állapotát írja le, amelyet tiszta gáz esetén a

$$\psi_{g0}^{k_0}(q, 0) \approx \psi_{01}^{k_0}(q + \varepsilon_1, 0) \quad (5.3.6)$$

állapotfüggvény írta le. Hasonló igaz a  $\psi_{02}^{k_0}(q, 0)$  komponensre.

A „lényegében azonos” kitétel, akárcsak a  $\approx$  jel (5.3.6)-ban, a statisztikus mechanikában szokásos „durva szemcsés” (coarse grained) értelemben veendő. Nem pontról pontra hasonlítjuk össze a szóban forgó hullámfüggvényeket, hanem az amplitúdónégyzet átlagát vetjük össze egy-egy  $q$  pont körüli (a cellatérfogathoz képest) kicsiny tartományban.

A fentebbi megállapítás így is fogalmazható.

Ha a gáz+csepp rendszer kezdetben  $\psi_{01}^{k_0}(q, 0)$  hullámfüggvény-komponensének vetületét (a vetület normáját) keressük az  $i$ -edik cellára a  $t_2$  pillanatban, az eredmény ugyanaz lesz, mintha a cseppet nem tartalmazó gáz kezdetben a  $q(k_0) - \varepsilon_1$  középpontú cellára kiterjedő hullámfüggvényének vetületét keresnénk a  $t_2$  pillanatban a  $q(i) - \varepsilon_1$  középpontú cellára. Az (5.3.2) alatt mondottak értelmében ez 1 helyett 2-t írva hasonló mondható a másik komponensre.

Legyen rövidség kedvéért

$$p_{k_1 k_0} = P_g(q(k_1) - \varepsilon_1, q(k_0) - \varepsilon_1, t), \quad (5.3.7)$$

$$q_{k_1 k_0} = P_g(q(k_1) - \varepsilon_2, q(k_0) - \varepsilon_2, t).$$



Ha bevezetjük — az indexektől amennyire lehet, megszabadulva — a

$$\left. \begin{aligned} \psi^{k_1}(q, t_2 + 0) &\equiv \psi_{01}^{k_1}(q, t_2 + 0) = n_{k_1 k_0} f_{k_1}(q) \psi_{01}^{k_0}(q, t_2 - 0) \\ \varphi^{k_1}(q, t_2 + 0) &\equiv \psi_{02}^{k_1}(q, t_2 + 0) = m_{k_1 k_0} f_{k_1}(q) \psi_{02}^{k_0}(q, t_2 - 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

1-re normált függvényeket, akkor a fentiek szerint

$$n_{k_1 k_0} = \frac{1}{\sqrt{p_{k_1 k_0}}}, \quad (5.3.9)$$

$$m_{k_1 k_0} = \frac{1}{\sqrt{q_{k_1 k_0}}}.$$

#### 4. A szuperpozíció szétesése

1. A  $t=0$  pillanatban tehát a következő kijelentést tehetjük. Ha az első redukció a  $k_1$  cellára történik, akkor a  $t_2+0$  pillanatban

$$\psi_0^{k_1}(q, t_2 + 0) = N_{k_1 k_0} f_{k_1}(q) \psi_0^{k_0}(q, t_2 - 0) = N_{k_1 k_0} (c_1 \sqrt{p_{k_1 k_0}} \psi^{k_1} + c_2 \sqrt{q_{k_1 k_0}} \varphi^{k_1}) \quad (5.3.4)$$

lesz a fizikai hullámfüggvény  $\beta=0$ -hoz tartozó eleme, ahol

$$N_{k_1 k_0}^2 (|c_1|^2 p_{k_1 k_0} + |c_2|^2 q_{k_1 k_0}) = 1, \quad (5.4.2)$$

és annak valószínűsége, hogy ez következék be,

$$P_{k_1 k_0} = \frac{1}{N_{k_1 k_0}^2} = |c_1|^2 p_{k_1 k_0} + |c_2|^2 q_{k_1 k_0}. \quad (5.4.3)$$

Minden lehetséges megoldásban a  $\psi$  komponens felel meg a csepp  $x_1$  helyzetének, a  $\varphi$  komponens a csepp  $x_2$  helyzetének.

Minthogy  $p_{ik}$ , ill.  $q_{ik}$  jelentésénél fogva

$$\sum_{k_1} p_{k_1 k_0} = \sum_{k_1} q_{k_1 k_0} = 1, \quad (5.4.4)$$

azért az  $x_1$  csepphelyzet előre várható  $P_1$  súlya

$$P_1 = \sum_{k_1} P_{k_1 k_0} |\langle \psi_0^{k_1} | \psi^{k_1} \rangle|^2 = \sum_{k_1} P_{k_1 k_0} (N_{k_1 k_0}^2 |c_1|^2 p_{k_1 k_0}) = |c_1|^2, \quad (5.4.5)$$

és hasonlóan, az  $x_2$  csepphelyzet előre várható  $P_2$  súlya

$$P_2 = \sum_{k_1} P_{k_1 k_0} |\langle \psi_0^{k_1} | \varphi^{k_1} \rangle|^2 = \sum_{k_1} P_{k_1 k_0} (N_{k_1 k_0}^2 |c_2|^2 q_{k_1 k_0}) = |c_2|^2. \quad (5.4.6)$$

Látszólagos trivialitása ellenére ez az eredmény fontos, mert azt bizonyítja, hogy a redukciós ciklusok működése a kezdeti  $\psi_0^{k_0} = c_1 \psi_{01}^{k_0} + c_2 \psi_{02}^{k_0}$  hullámfüggvénynek a csepp helyzetére vonatkozó statisztikus tartalmával összhangban van.

2. Az első redukció után (5.4.1) még mindenképpen maga is szuperpozíció a csepp helyzetére vonatkozólag, az eredeti szuperpozíció szétesése azonban már megkezdődött.

Ahhoz, hogy ezt átlássuk, először célszerű a szuperpozíció fokának kvantitatív mértékét definiálni.



A szóban forgó egyszerű esetről maradunk, amelyben egy *kiszemelt* tulajdonság (a csepp helyzete) két jól elkülönülő lehetőség erejéig határozatlan. Feleljen meg — akár az ortodox kvantummechanikában —  $\psi$  az egyik,  $\varphi$  a másik lehetőségnek.

Tudomásunk lehet például arról, hogy a rendszer bizonyos idő múlva  $P_1$  valószínűséggel a  $\psi = 1 \cdot \psi + 0 \cdot \varphi$  állapotba,  $P_2 = 1 - P_1$  valószínűséggel a  $\varphi = 0 \cdot \psi + 1 \cdot \varphi$  állapotba fog kerülni. A kiszemelt tulajdonságra nézve ekkor nem tudunk biztosat jósolni, azt azonban tudjuk, hogy az állapot *nem lesz* szuperpozíció, a ténylegesen megvalósuló állapotban a kiszemelt tulajdonság nem lesz határozatlan.

Ellenkezőleg: maximálisan határozatlan lesz a kiszemelt tulajdonság, ha pl. az  $\frac{1}{\sqrt{2}}\psi + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi$  állapot valósul meg.

Ha tehát  $P_i$  valószínűséggel a  $c_i\psi + d_i\varphi$  állapot megvalósulására számítunk, a várható szuperpozíciófok mértékeként

$$S = \sum_i P_i (2|c_i| \cdot |d_i|) \quad (5.4.7)$$

kínálkozik. A kettes faktor azért szerepel, hogy  $S$  maximuma (a „teljes” szuperpozíció foka) 1 legyen.

Ennek a definíciónak a birtokában látjuk, hogy míg a  $t=0$  pillanatban a szuperpozíció foka  $S(0)=2|c_1| \cdot |c_2|$ , addig a  $t_2+0$  pillanatban a várható szuperpozíció foka

$$S(t_2+0) = \sum_{k_1} P_{k_1 k_0} \cdot 2(N_{k_1 k_0} |c_1| \sqrt{p_{k_1 k_0}} \cdot N_{k_1 k_0} |c_2| \sqrt{q_{k_1 k_0}}) = 2|c_1| |c_2| \sum_{k_1} \sqrt{p_{k_1 k_0}} \sqrt{q_{k_1 k_0}}. \quad (5.4.8)$$

Ámde az (5.3.7) definíciókból látszik, hogy általában

$$p_{k_1 k_0} \neq q_{k_1 k_0}, \quad (5.4.9)$$

ebből viszont és (5.4.4)-ből a Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával következik, hogy

$$\sum_{k_1} \sqrt{p_{k_1 k_0}} \sqrt{q_{k_1 k_0}} < 1. \quad (5.4.10)$$

A szuperpozíció foka tehát csökken.

Ugyanez igaz nemcsak az első, hanem minden sztochasztikus lépésre. A hullámfüggvénynek a konfigurációs térben való bolyongása közben a szuperpozíció kihal, a hullámfüggvényben vagy a  $\psi$ , vagy a  $\varphi$  komponens marad döntő túlsúlyban.

Ezt a következtetést tekintjük a (4.2.12) relációk mellett, az értekezés legfontosabb eredményének.

Nyilvánvaló, hogy ez az eredmény értelemszerűen kiterjeszthető minden szubmakroszkopikus szuperpozíció esetére.

Utólag az is látszik, hogy a statisztikus mechanikának a tiszta gáz viselkedésére vonatkozó feltevéseire csupán az érzékletesség kedvéért támaszkodtunk. Az (5.3.9) összefüggéseket  $p_{k_1 k_0}$ , ill.  $q_{k_1 k_0}$  definíciójának tekinthetjük s ekkor egyáltalában nem szükséges (5.3.7) érvényét feltételezni. (Bár kellőképpen kicsiny csepp esetén nincs okunk (5.3.9) és (5.3.7) együttes érvényében kételkedni.) Az utóbbit eddig csak (5.4.9) leszámaztatásánál használtuk ki, márpedig 5.4.9 önmagában is meglehetősen világos.



3. A továbbiakban arról kívánunk képet kapni, hogy a szuperpozíció szétesése milyen hamar következik be. (5.4.1) mintájára azonnal adódik, hogy a  $t_{(n)} + 0 = nt_2 + 0$  pillanatban

$$P_{k_n k_{n-1} \dots k_0} = |c_1|^2 p_{k_n k_{n-1}} \cdot p_{k_{n-1} k_{n-2}} \dots p_{k_1 k_0} + |c_2|^2 q_{k_n k_{n-1}} q_{k_{n-1} k_{n-2}} \dots q_{k_1 k_0} \quad (5.4.11)$$

valószínűséggel a  $k_1, \dots, k_{n-1}$  cellákat „megjárt” s a  $k_n$  cellába „érkező”

$$\begin{aligned} \psi_{k_n k_{n-1} \dots k_0}(q, t_{(n)} + 0) = N_{k_n k_{n-1} \dots k_0} & (c_1 \sqrt{p_{k_n k_{n-1}} \cdot p_{k_{n-1} k_{n-2}} \dots p_{k_1 k_0}} \cdot \psi_{k_n k_{n-1} \dots k_0} + \\ & + c_2 \sqrt{q_{k_n k_{n-1}} \cdot q_{k_{n-1} k_{n-2}} \dots q_{k_1 k_0}} \cdot \varphi_{k_n k_{n-1} \dots k_0}, \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

függvényt fogja a realitást képviselni. Itt  $\psi$  és  $\varphi$  normája külön-külön 1, az indexek a múltat juttatják kifejezésre.  $N$  normálási tényező és természetesen

$$N_{k_n \dots k_0}^2 = \frac{1}{p_{k_n \dots k_0}}. \quad (5.4.13)$$

A várható szuperpozíciófok mértéke

$$S(t_{(n)} + 0) = 2|c_1||c_2| \sum_{k_n, k_{n-1}, \dots, k_1} \sqrt{p_{k_n k_{n-1}} \dots q_{k_1 k_0}} \cdot \sqrt{q_{k_n k_{n-1}} \dots q_{k_1 k_0}} \quad (5.4.14)$$

$p_{ik}$ , ill.  $q_{ik}$  pontos ismeretének híján (5.4.14) értékét a következő fogással becsüljük meg. Vezessük be a

$$P_{k_n k_0} = \sum_{k_{n-1}, \dots, k_1} p_{k_n k_{n-1}} \cdot p_{k_{n-1} k_{n-2}} \dots p_{k_1 k_0}, \quad (5.4.15)$$

$$Q_{k_n k_0} = \sum_{k_{n-1}, \dots, k_1} q_{k_n k_{n-1}} \cdot q_{k_{n-1} k_{n-2}} \dots q_{k_1 k_0}$$

jelöléseket, és használjuk ki újra 5.3.7-et.  $P_{k_n k_0}$  úgy is felfogható, mint a *tiszta* gáz kezdetben a  $q(k_0) - \varepsilon_1$  középpontú cellára koncentrált állapotfüggvényének súlya (vetületének normája) a  $q(k_n) - \varepsilon_1$  középpontú cellában (és hasonlóan,  $Q_{k_n k_0}$  a *tiszta* gáz kezdetben a  $q(k_0) - \varepsilon_2$  középpontú cellára koncentrált hullámfüggvényének súlya a  $q(k_n) - \varepsilon_2$  középpontú cellában), az *ortodox elmélet szerint*. De ha  $n$  elég nagy, az ortodox elméletben a hullámfüggvény nem „emlékszik” arra, hogy melyik cellából indult:  $P_{k_n k_0}$ , ill.  $Q_{k_n k_0}$  helyére egyszerűen  $P_{k_n}$  ill.  $Q_{k_n}$  írható, ahol az utóbbi mennyiségek egyszerűen a *tiszta* gáz termikus egyensúlyhoz tartozó ortodox állapotfüggvényének a súlyát jelentik a  $q(k_n) - \varepsilon_1$ , ill.  $q(k_n) - \varepsilon_2$  középpontú cellában.

$P_{k_n}$  és  $Q_{k_n}$  viszont jól megbecsülhető. Mint a 7. ábrával kapcsolatban már utaltunk rá, a gázzal feltesszük, hogy nem túl sűrű, az atomok elhelyezkedése egymástól nagymértékben független. De akkor az (5.2.3) koordinátákban az ortodox valószínűsűrsűrségnek „durvaszemcsés” (coarse grained) értelemben Gauss-eloszlást kell mutatnia: az egyes cellákra vetett vetület szempontjából az ortodox  $|\psi_{g_0}(q, t)|^2$  amplitúdónégyzet egyensúlyban a

$$|\psi_{g_0}(q, t)|^2 \cong \pi \left( \frac{e^{-\frac{|q_k|^2}{N}}}{N\pi} \right) \quad (5.4.16)$$

függvénnyel pótolható. (Félreértés elkerülésére:  $k$  nem cellaindex, hanem a  $q$  tér egy-egy  $q_k$  koordinátpárjának jelölésére szolgáló vektor, az (5.2.3) definíciónak



megfelelően. A szorzat tényezőinek száma  $\frac{3}{2}N$ . A nevezőben levő faktor biztosítja, hogy az (5.4.16) jobb oldalán álló kifejezésnek a teljes  $q$  térre vett integrálja 1 legyen.)

$P_{k_n}$  és  $Q_{k_n}$  ezek után (5.2.12) mintájára kiszámítható, arra kell csak vigyázni, hogy —  $k_n$  helyett  $i$ -t írva — az (5.2.10) projekciós függvényben a cella  $q(i)$  közép-pontját egyszer  $\varepsilon_1$ -gyel, másodszor  $\varepsilon_2$ -vel eltoljuk:

$$P_i = \int \pi dr_k ds_k f_i^2(q + \varepsilon_1) \cdot |\psi_{g_0}(q, t)|_2 \quad (5.4.17)$$

$$Q_i = \int \pi dr_k ds_k f_i^2(q + \varepsilon_2) \cdot |\psi_{g_0}(q, t)|^2.$$

Az integrálást mindjárt elvégezzük.

A Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával azonnal igazolható, hogy az (5.4.14) alatt definiált  $S(t_n + 0)$  kisebb, mint

$$S' \equiv 2|c_1||c_2| \sum_{k_n} \sqrt{P_{k_n k_0}} \sqrt{Q_{k_n k_0}} \approx 2|c_1||c_2| \sum_{k_n} \sqrt{P_{k_n}} \sqrt{Q_{k_n}} = 2|c_1||c_2| \sum_i \sqrt{P_i} \sqrt{Q_i}. \quad (5.4.18)$$

Ezért  $S'$  birtokában a szuperpozíció kihalásának ütemét meg tudjuk becsülni. A konkrétan vizsgált rendszer — néhány  $\text{cm}^3$  gáz — esetében csak azt kell megmondani, a 7. ábra kapcsán  $\sqrt{N}$  és  $l_k$  5.2.7 alatt megadott értékeit összehasonlítva, hogy az ortodox „relaxációs idő”, ami alatt az eredetileg a  $k_0$  cellára koncentrált ortodox állapotfüggvény elfelejti a múltját, amelynek elteltével tehát  $P_{k_n k_0}$ , ill.  $Q_{k_n k_0}$   $P_{k_n}$ -nel, ill.  $Q_{k_n}$ -nel pótolható, legfeljebb néhányszor  $t_2$ . Jelöljük ezt az időtartamot  $t_r$ -rel. (5.4.14) alapján nyilvánvaló, hogy  $t > t_r$  esetén

$$S(t) = S(0) \cdot e^{-At} \quad (5.4.19)$$

alakú. Minthogy  $S(t_r) < S'$ , azért

$$A > A' = \frac{1}{t_r} \left( -\ln \frac{S'}{S(0)} \right) = -\frac{1}{t_r} \ln \left( \sum_i \sqrt{P_i} \sqrt{Q_i} \right). \quad (5.4.20)$$

Két feladat marad hátra:  $t_2$  megbecslése és a logaritmus alatt szereplő összeg kiszámítása. Vegyük őket sorra.

4.  $t_2$  megbecslése. Tekintsük egy pillanatra a klasszikus mechanika szemszögéből a gáz viselkedését és tegyük fel, hogy a  $t=0$  időpillanatban az  $x$  helyen találkozik egy  $V_i$  és  $V_k$  sebességű gázatom. Ha ütközés sem itt, sem a későbbiekben nem jön létre, akkor a későbbi  $t$  pillanatban e két atom járuléka egy kiszemelt  $q_k$  általános koordináta-hoz (l. (5.2.3))

$$e^{ik(x+v_i t)} + e^{ik(x+v_k t)}.$$

Ha a  $t=0$  pillanatban létrejött az ütközés, de a továbbiakban a két atom zavartalanul haladt  $V'_i$ , ill.  $V'_k$  sebességgel, akkor járulékuk  $q_k$ -hoz a  $t$  pillanatban

$$e^{ik(x+v'_i t)} + e^{ik(x+v'_k t)}.$$

Ha egymással összemérhető súllyal mindkét lehetőséggel számolnunk kellene, akkor a  $t$  pillanatban a  $q_k$  értékének ily módon előálló bizonytalansága nagyságrendben nyilván

$$t^2 k^2 v^2, \quad (5.4.21)$$

lenne, ahol  $v^2$  a sebességnégyzet termikus átlaga, feltéve természetesen, hogy  $ktv < 1$ .



(A  $k$ -ban lineáris tag az impulzustétel miatt kiesik.) A kvantummechanikai hullámfüggvény Feynman [46] nyomán úgy fogható fel, mint összeg, amelynek tagjai külön-külön kismértékben eltérő kezdőfeltételekből kifejlődött klasszikus konfigurációkat tartalmaznak, megfelelő valószínűségi amplitúdókkal. Erre való hivatkozással feltesszük, hogy a  $q_k$  koordináta egyetlen ütközés nyomán  $t$  idő alatt kifejlődött bizonytalanságát a kvantummechanikai tárgyalásban is (5.4.21) szabja meg. (Ezzel — mint a közelebbi megfontolás mutatja, jogosan —  $q_k$  kiszélesedésének azt a részét hanyagoljuk el, amely az  $x_i$  koordináták kvantummechanikai viselkedéséből ütközések nélkül is következik.) A különböző ütközések járulékát  $q_k$  bizonytalanságához egymástól függetlennek tekintjük. A hullámfüggvény Feynman-féle felépítésében egy-egy a klasszikus mechanikának engedelmessé váló konfiguráció atomjai átlagosan  $t_0 \approx \frac{\lambda}{v}$  időközönként ütköznek, ahol  $\lambda$  a szabad úthossz  $dt$  idő alatt az az ütközések száma  $\sim N \frac{dt}{t_0}$ , így végül  $q_k$ -nak (szabatosabban  $r_k$ -nak és  $s_k$ -nak) a  $(0, t)$  intervallumban kifejlődött szórásnégyzete

$$\Delta r_k^2 \approx \Delta s_k^2 \approx \int_0^t N \frac{dt'}{t_0} (t'^2 k^2 v^2)^2 \cong \frac{N}{t_0} k^4 v^4 t^5 \quad (\text{ha } tkv < 1), \quad (5.4.22)$$

Pontosabban ennyivel nő  $\Delta q_k^2$ -nek a  $t=0$  pillanatban meglevő értéke.

Ha  $t=0$  cikluskezdő pillanat volt, azaz a gáz hullámfüggvénye a  $q_k$  síkban éppen egy  $l_k$  lineáris méretű tartományra koncentrálódott, akkor világos, hogy az a  $t$  érték, amely mellett (5.4.22) az (5.2.7)-ben megadott  $l_k$  négyzetével egyenlő, éppen a keresett  $t_2$ :

$$\frac{N}{t_0} k^4 v^4 t_2^5 \approx \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 V \cdot \alpha^{-4/3} \cdot k^{11/3}. \quad (5.4.23)$$

(Emlékeztetünk rá, hogy itt  $V$ -t a gáz térfogatával azonosítottuk.)

Látnivaló, hogy  $t_2$   $k$ -függése csakugyan elhanyagolható az érdekes  $k$  intervallumban.  $k$  értékét alulról a  $V$  térfogat, felülről lényegében az (5.3.1) alatt megadott  $k_{\text{krit}}$  korlátozza. Az állandók numerikus értékeit behelyettesítve  $V \approx 1 \text{ cm}^3$  mellett cgs egységekben kb. (1,100) lesz az érdekes  $k$  intervallum. „Szobahőmérsékletet” ( $N \approx 10^{19}$ ,  $v \approx 10^5 \text{ cm/s}$ ) feltételezve (5.4.23)-ból  $t_2 \approx 10^{-7} \text{ s}$  adódik, ami azt is jelenti, hogy a kérdéses  $k$  intervallumban a  $kvt_2 < 1$  feltétel elég jól teljesül.

5. (5.4.16)-ot és (5.2.10)-et (5.4.17)-be helyettesítve a kijelölt integrálás elvégezhető. Jelölje  $\varepsilon_1$ , ill.  $\varepsilon_2$  komponenseit az  $(r_k, s_k)$  valós síkban  $(\alpha_k, \beta_k)$ , ill.  $(\gamma_k, \delta_k)$ , azaz legyen (5.3.5) értelmében

$$\alpha_k = z \cos kX_1, \quad \beta_k = z \sin kX_1, \quad \gamma_k = z \cos kX_2, \quad \delta_k = z \sin kX_2. \quad (5.4.24)$$

Akkor az integrálás eredménye egyszerűen

$$P_i = \tau \prod_k \frac{1}{\pi \left( N + \frac{l_k^2}{4} \right)} \exp \left[ -\frac{1}{N + \frac{l_k^2}{4}} \left( (\alpha_k - r_k(i))^2 + (\beta_k - s_k(i))^2 \right) \right] \quad (5.4.25)$$

$$Q_i = \tau \prod_k \frac{1}{\pi \left( N + \frac{l_k^2}{4} \right)} \exp \left[ -\frac{1}{N + \frac{l_k^2}{4}} \left( (\gamma_k - r_k(i))^2 + (\delta_k - s_k(i))^2 \right) \right].$$



Ebből viszont

$$\sqrt{P_i} \sqrt{Q_i} = \tau \prod_k \frac{1}{\pi \left( N + \frac{l_k^2}{4} \right)} \exp \left( - \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2}{2 \left( N + \frac{l_k^2}{4} \right)} \right) \times \\ \times \exp \left( - \frac{1}{N + \frac{l_k^2}{4}} (r_k^2(i) + s_k^2(i) - (\alpha_k + \gamma_k) r_k(i) - (\beta_k + \delta_k) s_k(i)) \right). \quad (5.4.26)$$

A cellaközpontok (5.2.9) megválasztása mellett (5.4.26) alapján  $\sum_i \sqrt{P_i} \sqrt{Q_i}$  összegek szorzatára bomlik. Vegyük azonban inkább észre, hogy  $\tau = \prod_k l_k^2$  egy cella térfogata, ezért  $\sum_i \sqrt{P_i} \sqrt{Q_i}$  közelítőleg egyenlő a  $\tau$  mellett álló kifejezés integráljával a teljes  $q$  térre, a folytonosnak tekintett  $r_k(i)$ ,  $s_k(i)$  változók szerint. Ez az integrál is egyszerű integrálok szorzatára bomlik, az eredmény:

$$\sum_i \sqrt{P_i} \sqrt{Q_i} \approx \prod_k \exp \left[ - \frac{1}{2 \left( N + \frac{l_k^2}{4} \right)} \left( \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2 - \frac{1}{2} ((\alpha_k + \gamma_k)^2 + (\beta_k + \delta_k)^2) \right) \right]. \quad (5.4.27)$$

(5.5.1) alapján látható, hogy az (5.5.4) szorzat minden tényezőben a görög betűket tartalmazó rész egy 1 körüli faktortól eltekintve  $z^2$ -tel egyenlő, feltéve, hogy a szuperpozícióban szereplő  $X_1$  és  $X_2$  helyzetek nincsenek egymáshoz túl közel. (Az utóbbi esetben a szóban forgó kifejezés értéke  $z^2$ -nél lényegesen kisebb s a szuperpozíció szétesése lassúbb.) Mindkét oldal logaritmusát képezve a  $k$ -ra vonatkozó szorzatból összeg lesz, amely megint csak (a háromdimenziós  $k$  térre vonatkozó) integrállal pótolható.

$$\log \left( \sum_i \sqrt{P_i} \sqrt{Q_i} \right) \approx \sum_k \left[ - \frac{z^2}{N + \frac{l_k^2}{4}} \right] \approx - \frac{V}{N} Z^2 \int_0^\infty dk \frac{k^2}{1 + B \cdot k^{11/3}}, \quad (5.4.28)$$

ahol  $B$  az (5.2.7)-ből adódó

$$B = \frac{V}{N} \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 A} \quad (5.4.29)$$

állandót jelöli, az integrál felső határát pedig nyugodtan végtelennek vehetjük. Az előző szakasz végén választott adatokkal (5.4.28)-at kiértékelve s visszaemlékezve arra, hogy ekkor  $t_2 \approx 10^{-7}$  s, (5.4.20)-ból  $s^{-1}$  egységekben

$$A' \approx \frac{Z^2}{10^5} \quad (5.4.30)$$

## 6. Diskusszió

1. Ha tehát a szubmakroszkopikus szuperpozícióban szereplő cseppkezdemény például néhány száz atomból áll, a szuperpozíció kb. egy másodpercig marad fenn. Azután már vagy az egyik, vagy a másik csepphelyzetnek kell realitást tulajdonítani.



Természetesen, ha „megnézzük”, hogy hol van a cseppkezdemény, azaz a csepp súlypontját masszívabb szabadsági fokokhoz csatoljuk, akkor a szuperpozíció makroszkopikussá válik és azonnal szétesik. (Ezért (5.4.30)-nak kísérleti következménye nincs.)

(5.4.30) tanúsága szerint azonban ez a szétesés „külső beavatkozás” nélkül is bekövetkezik.

A cseppkezdemény helyzetét nagyobb tömeghez a legegyszerűbben úgy csatolhatjuk, hogy a cseppet növekedni hagyjuk. Ilyenkor  $z$  és vele együtt  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$ , valamint a  $p_{ik}$ ,  $q_{ik}$  átmeneti valószínűségek időfüggővé válnak. Még ez az eset is könnyen végigszámolható. A koherencia kihalása versenyt fut a csepp növekedésével és a növekedési sebesség realiztikus modelljei [44] mellett a szuperpozíció még szubmakroszkopikus stádiumban szétesik.

Aktuális ködkamra esetében még a kvalitatív beszédmódot is nehézkesé teszi az a körülmény, hogy „az egyik” vagy „a másik” ködkamranyom is bonyolult szuperpozíció.

Minél kevésbé hasonló konfigurációkat vizsgálunk meg, (egy-egy nyomon belül) annál hamarabb szakadnak el egymástól az „örököseik” a szuperpozícióban.

Az ilyenfajta szuperpozíció azonban nemcsak öröklődik és kihal, hanem állandóan újonnan születik is, a koordináták kvantummechanikai viselkedése folytán. Az aktuális hullámfüggvény mindig különböző határozott (klasszikus) konfigurációk szuperpozíciója.

2. Itt térünk ki arra, hogy a cellabeosztást (5.2.9) alatt megadott módja, amely szerint a teret egyszerűen a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű hiperkockákra bontjuk, túlságosan durva. Sokdimenziós térben a kocka nagyon eltér a gömbtől, a cella-központok mintegy „egyenetlenül” helyezkednek el a térben. Ezzel összefüggésben a (3.4.4) egyenlőség fennállásához szükséges

$$\sum_i f_i^2(q) \approx 1 \quad (\text{minden } q\text{-ra}) \quad (5.5.1)$$

feltétel növekvő dimenziószámmal egyre rosszabbul teljesül, noha természetesen az összeg átlagértéke a  $q$  térben  $f_i$  normálása következtében 1. Ezen a hibán ún. sűrű pakolású cellák választásával lehet segíteni. Meg lehet mutatni, hogy ilyenkor (5.5.1) kitűnően teljesül. Minthogy azonban sokdimenziós térben a cella térfogatának zöme a „felszíne mentén” helyezkedik el, ahol a cella saját  $f_i(q)$  projekciós függvénye jelentékenyen kisebb, mint a cella közepén, (5.5.1) teljesülése azt is jelenti, hogy a cellák, pontosabban az  $f_i(q)$  függvények nagymértékben átfedik egymást, nem páronként ugyan, de abban az értelemben, hogy a páronkénti átfedés mértékéhez képest egy cellának nagyon sok a szomszédja. Közelebbi megfontolás viszont azt mutatja, hogy ez a sok körülmény nem hátrány, hanem előny, s a redukciós ciklusok működését „simává” teszi. Amikor (5.4.26)-ot összegezés helyett integrállal számítottuk ki, valójában korrigáltuk a cellabeosztás durvaságát.

3. A nagy dimenziószámhoz kapcsolódik a következő megjegyzés is.

Amikor a  $\{\psi_\beta\}$  fizikai hullámfüggvény koherenciátulajdonságait vizsgáljuk, a  $\Phi_\beta(q, t)$  fázis  $\beta$ -tól szeszélyesen függő relatív különbségét hasonlítjuk össze a konfigurációs tér két pontja között. Egy cellán belül a hullámfüggvény éppen azért tekinthető viszonylagosan koherensnek, mert ha  $q$  a — mondjuk —  $q_i$  cellaközpontához közel van, akkor a  $\Phi_\beta(q, t) - \Phi_\beta(q_i, t)$  relatív fázis ingadozása kicsi és csak akkor nő  $\pi$  közelébe, ha  $q$  a cellahatárhoz közeledik. Mivel azonban a térfogat



zöme a cellahatár mentén van, növekvő dimenziószám esetén a hullámfüggvény még egyetlen cellán belül is egyre kevésbé mondható koherensnek. Ezen nem lehet a cellaméret csökkentésével segíteni. Pontosabban, (példánkban) az

$$f_i(q) = C \cdot \pi_k e^{-2 \frac{(r_k - r_k(i))^2 + (s_k - s_k(i))^2}{l_k^2}} \quad (5.2.10)$$

projekciós függvényekben  $l_k^2$  nem csökkenthető, mert ha  $l_k^2$  értékét kisebbre vesszük, mint az (5.2.7) által adott érték, akkor a sztochasztikus redukció durvább beavatkozást jelent  $\{\psi_\beta\}$  statisztikus tartalmába, mint a  $\Phi_\beta$  szeszélyes fázis fellépte. Az (5.2.7) projekciós függvény súlyához,  $q$ -térbeli térfogatintegráljához viszont még az olyan  $q$  pontok is jelentősen hozzájárulnak, amelyeknek távolsága a cellaközépponttól  $\sqrt{\text{dimenziószám} \cdot \text{szor}}$  akkora, mint sűrűpakolású cellabeosztás esetén két szomszédos cellaközéppont távolsága. (Ugyanakkor  $\int dq f_i(q) f_k(q) \ll \int dq f_i^2(q) = \tau$  még akkor is, ha  $i$  és  $k$  szomszédos cellákat jelöl.) Mindez azt jelenti, hogy a konfigurációs tér minden pontjában amplitúdó és fázis szempontjából egyaránt határozott, irreálisan gazdag információtartalmú ortodox hullámfüggvényt felváltó fizikai hullámfüggvénynek a konfigurációs tér egy-egy kiragadott pontjához kapcsolódó jelentése csillagászati dimenziószám esetén még egy cellán belül is egyre inkább elmosódik, átlagolódik, összhangban a fizikai várakozással.

A termikus zaj szempontjából a sok szabadsági fokú rendszer fizikai hullámfüggvényének kézzelfogható jelentése elsősorban éppen annyiban van, hogy kijelöli az aktuális cellát, megadja a három dimenziós tömegsűrűségeloszlás Fourier-együtthatóinak (ezek lényegében a  $q_k$  változók) mint kvantummechanikai változók, nak a pillanatnyilag aktuális „hullámcsomagját”. A hullámcsomag szó arra utal, hogy az alacsony  $k$ -jú  $q_k$ -k terében a pillanatnyilag aktuális hullámfüggvény kiterjedése kisebb, mint az ortodox termikus kiterjedés. Ha a hullámfüggvénynek a redukciókat megelőző szétfolyását, s így végeredményben a rendszer sztochasztikus bolyongását a cellák között a termikus zaj (példánkban a gázatomok ütközése) vezérli, és a rendszer elég nagy, továbbá a környezethez csak termikusan van csatlakozva, akkor a fentiek alapján érthetővé válik az az ortodox elméletben alapvetően homályos kérdés, hogy miért szabad a környezetről elfeledkezni. Példánkban a  $q$  térbeli bolyongás szempontjából a fal termikus hatása például egyszerűen azért hanyagolható el, mert a gázatomok sokkal gyakrabban ütköznek egymással, mint a fal atomjaival.

4. A ködkamranyom keletkezésének problémája csupán egyetlen szempontból van kitüntetve a jelenségeknek abban a nagy családjában, amelyben mikroszkopikus folyamatok kimenetelét makroszkopikus szintig erősítjük fel, más szóval a bennünket érdeklő mikroszkopikus szabadsági fokokat makroszkopikus szabadsági fokokhoz csatoljuk, röviden a mikroszkopikus mérések családjában. Nevezetesen abból a szempontból, hogy az alkalmazott egyszerűsítések mellett valamennyi lényeges részlet kvantitatíve nyomon követhető.

A tanulság azonban általánosan megfogalmazható.

A kvantummechanikai „méréselmélet” megszűnik önálló ismeretelméleti problémák hordozója lenni. A mérési folyamat a „sok szabadsági fokú rendszerek viselkedése” című fejezet egyik, elvileg nem kitüntetett témájává válik.

A mérési folyamat megértéséhez nem kell egyebet tenni, mint a mikrorendszer + apparátus együttes rendszerének fizikai hullámfüggvényét gondolatban nyomon



követni. Mire az ortodox, tisztán a Schrödinger-egyenletet követő hullámfüggvény kifejtészené a II.2-ben emlegetett makroszkopikus szuperpozíciót, addigra a sztochasztikus redukciók a szuperpozíciónak csak egyetlen tagját hagyják életben. A ködcseppképződésnél bonyolultabb esetekben ennek a folyamatnak a részleteit csak kvalitatíve lehet áttekinteni, egy fontos kvantitatív következtetés azonban *mindig* levonható. Éspedig az, hogy az (5.4.5)-nek és (5.4.6)-nak megfelelő összefüggések *mindig* fennállnak: annak valószínűsége, hogy a sztochasztikus redukciók során a szuperpozíció egy kiszemelt tagja fog életben maradni, megegyezik a megfelelő  $|c_i|^2$ -tel az ortodox hullámfüggvényben. Ennek oka a következő. Közvetlenül a kölcsönhatás lezajlása után mikroszkopikus és apparátus között együttes rendszer  $\{\psi_\rho\}$  állapotfüggvénye az apparátusban létrejött apró változásokat reprezentáló szuperpozíció lesz. Ezek a parányi változások a tömegeloszlás szempontjából elhanyagolható különbségeket jelentenek, de már egyértelmű kapcsolatban állanak a további fejleményekkel. Más szóval a lehetséges végeredmények súlyát az első lépés szabja meg, ott pedig az (ortodox  $\psi$ )  $\rightarrow \{\psi_\rho\}$  átmenetnek még nincs jelentősége.

## VI. Befejezés

1. Gyakran hangoztatott nézet, hogy a kvantummechanika különleges helyet foglal el a fizikai elméletek között: határesetként tartalmazza a klasszikus fizikát, ugyanakkor kezdettől fogva támaszkodik is a klasszikus koncepciókra, amely utóbbiak nélkül a hullámfüggvény nem értelmezhető. Az atomi folyamatok nem tanulmányozhatók másként, mint egyértelmű, klasszikus viselkedést mutató makroszkopikus tárgyakkal való kölcsönhatásokon keresztül.

Az elmondottak alapján úgy tűnik, hogy a klasszikus koncepciókat már akkor kellőképpen kihasználjuk, amikor a kvantummechanika formalizmusát a téridő fogalmára alapozzuk. Ha a téridőkontinuum absztrakcióját kellő óvatossággal vezetjük be, akkor nem szükséges a kvantummechanikai hullámfüggvény értelmezése céljából megegyezően expliciten hivatkozni a klasszikus viselkedésre, mint tapasztalati tényre. A makroszkopikus testek klasszikus mozgását, a hullámfüggvény viselkedése visszaadja.

2. Az előzők során olyan téridőtartományra szorítkoztunk, amely első közelítésben görbületlennek tekinthető. Nagy tömegek közelében a téridő görbült. Minthogy azonban a nagy tömegek kvantummechanikai helyzetbizonytalansága nagyon kicsi, a geometriai szerkezetnek az utóbbiból fakadó bizonytalansága kisebb, mint a III.2-ben alkalmazott gondolatmenet görbült térre vonatkozó változatából adódó bizonytalanság. Így nagy tömegek közelében a görbület klasszikusnak tekinthető. Ha pl. valamely próbatest mozgását egy nagy tömeg közelében vizsgáljuk, a (3.2.13) egyenlettel szemben annyi az eltérés, hogy — Einstein-féle gyenge tér közelítésben — a Schrödinger-egyenletben megjelenik a Newton-féle gravitációs potenciál. A szabad hullámcsoport súlypontja — a változatlanul érvényesülő anómális Brown-mozgás mellett — szabadon esik.

Végeredményben azt mondhatjuk, hogy a téridő szerkezet parányi elmosása a makroszkopikus test fogalmának és a téridő fogalmának viszonyát konzisztenssé teszi.

3. A metrika bizonytalanságát kifejezésre juttató  $\gamma(x, t)$  függvény nagy  $k$  értékekhez tartozó komponenseire a makroszkopikus viselkedés problematikájában



sehol nincs szükség. Ezért az ebben a dolgozatban érintett összefüggések a nagy-energiájú elemirész-folyamatok és a gravitáció esetleges kapcsolatának kérdését nyitva hagyják.

4. Nem térünk ki a redukciós ciklusokon át történő hullámterjedés gondolatának két közvetlen alkalmazási lehetőségére. Itt röviden megemlítjük őket.

a) A „szuperszelekciós szabályok” [47] létrejötte a szubmakroszkopikus szuperpozíció szétesésének mintájára megérthető. Pl. az elektromos töltés kellőképpen (mondjuk, az össztöltésben) különböző kezdeti eloszlásához tartozó hullámfüggvénykomponensek az elektromos kölcsönhatás különbözősége miatt permanensen hajlamosak eltérő tömegeloszlás kifejlesztésére, így minden feltételezett szuperpozíció csakhamar szétesik. Minthogy az össztöltés megmaradó mennyiség, újabb szuperpozíció keletkezésére nincsen mód.

b) A statisztikus termodinamikában nyugtalanító pontot jelentenek az ún. „kivételes” kezdőállapotok [45], amelyekből kisebb entrópiájú állapotok fejlődhetnek ki. Ahhoz, hogy figyelmen kívül hagyassuk őket, valamilyen feltevéssel kell élnünk a kezdőállapot „a priori” valószínűségére. Nos, a hullámfüggvény sztochasztikus „bolyongásáról” alkotott kép mellett ilyen feltevésre nincs szükség. Bár szigorúan nem bizonyítható, aligha érdemes kételkedni abban, hogy a kivételes kezdő állapotok a konfigurációs térnek egyetlen cellánál jóval nagyobb tartományára terjednek ki, fellépésüket tehát a hullámterjedés törvénye kizárja.

#### IRODALOM

1. G. Ludwig, Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Braunschweig, 1961.
2. C. J. Isham, A. Salam, J. Strathdee, preprint IC(70)131 1970.
3. I. Farkas és G. Pócsik, ITP-Bp. Report No. 294, 1971.
4. R. Arnowitt, S. Deser és C. W. Misner, Phys. Rev. 117, 1545, 1960.
5. R. Arnowitt, S. Deser és C. W. Misner, Gravitation an Introduction to Current Research, Wiley, 1962.
6. J. Schwinger, Phys. Rev. 173, 1264, 1968.
7. R. Ruffini és S. Bonazzola, Phys. Rev. 187, 1767, 1969.
8. N. Rosen, J. E. Mitchell, Sci. Soc. 61, 67, 1954.
9. R. P. Feynman, Lecture on Gravitation, Cal. Tech. 1962—63.
10. F. J. Dyson, Scientific American 74, 1958.
11. J. M. Jauch, Lecture Notes of the Enrico Fermi School, Varenna, 1970.
12. J. P. Wigner, Lecture Notes of the Enrico Fermi School, Varenna, 1970.
13. Bryce S. DeWitt, Lectures Notes, Chapel Hill, 1969.
14. J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 29, 436, 1957.
15. H. Everelt, Rev. Mod. Phys. 29, 454, 1957.
16. D. Bohm, Phys. Rev. 85, 166, 180, 1953.
17. D. Bohm és J. Bub, Rev. Mod. Phys. 38, 453, 1966.
18. J. S. Bell, Lecture Notes of the Enrico Fermi School Ref. TH-1220-CERB, 1970.
19. L. Kasday, Lecture Notes of the Enrico Fermi School, 1970.
20. H. D. Zeh, Foundation of Phys. 1, 72, 1970.
21. H. Y. Chiu és W. F. Hoffmann: Gravitation and Relativity, Benjamin, New York, 1964.  
R. H. Dicke által írt 7. fejezet.
22. J. A. Wheeler: Geometrodynamics, Academic, New York, 1962.
23. B. Bertotti, Proceedings of the Enrico Fermi School, XX. kötet.
24. J. H. Oort, Ap. J. 116, 233, 1950.
25. H. Y. Chiu és W. F. Hoffmann: Gravitation and Relativity, Benjamin, New York, 1964.  
V. W. Hugher által írt 6. fejezet
26. H. Y. Chiu és W. F. Hoffmann. Gravitation and Relativity, Benjamin, New York. 1964.  
R. H. Dicke által írt 1. fejezet.



27. *H. Salecker, E. P. Wigner*, Phys. Rev. 109, 571 1958.
28. *E. P. Wigner*, Rev. Mod. Phys. 29, 41, 1957.
29. *E. Schrödinger*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 12, 238, 1931.
30. *H. Tetrode*, Z. Phys. 50, 336, 1928.
31. *H. Weyl*, Z. Phys. 57, 261, 1929.
32. *E. Schrödinger*, S. B. preuss. Akad. Wiss. 105, 1932.
33. *V. Bargmann*, S. B. preuss. Akad. Wiss. 346, 1932.
34. *F. Károlyházy*, Nuovo Cimento 42, 390, 1966.
35. *R. Schiller*, Phys. Rev. 125, 1100, 1962.
36. *M. C. Wang és G. E. Uhlenbeck*, Rev. Mod. Phys. 17, 323, 1945.
37. *S. Chandrasekhar*, Rev. Mod. Phys. 15, 1, 1943.
38. *F. Zernike*, Hdb. d. Physik 3, 456, 1928.
39. *E. Teller*: Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Braunschweig, 1961.
40. *D. Bohm*: Quantum Theory, Prentie Hall Int. Englewood N. Y. 1951.
41. *N. F. Mott*, Proc. Roy. Soc. London, 126, 79, 1929.
42. *L. I. Schiff*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 1949.
43. *J. E. Mayer, M. G. Mayer*, Statistical Mechanics, Wiley, New York, 1949.
44. *S. J. Gupta*, Rev. Mod. Phys. 18, 1946.
45. *N. G. Van Kampen*: Fundamental Problems in Statistical Mechanics, 173, North-Holland, 1962.
46. *R. P. Feynman*, Rev. Mod. Phys. 20, 367, 1948.
47. *G. C. Wick, A. S. Wightman, E. P. Wigner*, Phys. Rev. 88, 101, 1952.







# A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

## ELEMI RENDSZEREK LOKALIZÁLT ÁLLAPOTAI\*

T. D. NEWTON és WIGNER JENŐ

Megkíséreljük, hogy természetes invarianciakövetelmények alapján megfogalmazzuk a lokalizált állapotok tulajdonságait. A legfőbb ezek közül, hogy valamely meghatározott pontban lokalizált állapot eltolás után ortogonális lesz mindazon, a mondott pontban lokalizált állapotokra, amelyekre nem alkalmaztunk eltolást. Azt találjuk, hogy a megkövetelt tulajdonságok egyértelműen meghatározzák a lokalizált állapotok rendszerét zérustól különböző tömegű, tetszőleges spinű elemi rendszerekre. A lokalizált függvények egy operátor folytonos spektrumához tartoznak; ezt természetes helyoperátornak nevezni. Ez az operátor automatikusan olyan tulajdonságú, hogy megőrzi annak a hullámfüggvénynek a pozitív energiás jellegét, amelyre azt alkalmazzuk (s azt csak ilyen hullámfüggvényekre szabad alkalmaznunk). Úgy hisszük, az itt kifejtettek talán alkalmazhatók lesznek az elemi részecskék és az ütközési mátrix elméletében.

### Bevezetés

Jól ismert, hogy az invarianciamegfontolások elégségesek ahhoz, hogy az elemi rendszerekre vonatkozóan lehetséges relativisztikus hullámegyenleteket felsorolhassunk.<sup>1</sup> Az „elemi rendszer” fogalma nem teljesen azonos az elemi részecske intuitív fogalmával. Intuitíve „elemi”-nek tekintjük a részecskét, ha nem látszik hasznosnak, hogy szerkezetet tulajdonítsunk neki. A definíció, melynek alapján a relativisztikus egyenletek fent említett felsorolása megadható, ennél explicitebb: megköveteli, hogy a rendszer minden állapotát megkaphassuk *tetszőleges* állapot relativisztikus transzformáltjaiból szuperpozíciókat képezve. Más szavakkal, nem szabad, hogy a rendszer különböző állapotai között — melyekre a szuperpozíció-elv alkalmazható — relativisztikusan invariáns módon különbséget lehessen tenni. Erre a feltételre gyakran mint az irreducibilitás feltételére hivatkozunk. A fentiekben említett relativisztikus transzformáltakba a szokásos Lorentz-transzformációkon kívül a tér- és időbeli elforgatásokkal és eltolásokkal nyert állapotok is beleértendők.

Az elemi rendszereknek mint ütközési folyamatok kezdeti és végállapotainak a szerepét — s így kapcsolatukat az ütközési mátrix elméletével — ezen cikk végén fogjuk tárgyalni. Most az elemi rendszereknek az elemi részecskékkel való kapcsolataira térünk rá.

Úgy látszik, hogy az elemi részecske fogalmával kapcsolatban két feltétel játszik igen fontos szerepet. Az egyik az, hogy állapotai képezzenek elemi rendszert a fent megadott értelemben. Ez a feltétel teljesen egyértelmű. A másik feltétel kevésbé határozott. Eszerint nem tekintjük a részecskét eleminek, ha nem látszik hasznosnak

\* Reviews of Modern Physics 21, 400, 1949.

<sup>1</sup> E. P. Wigner, Ann. of Math. 40, 149 (1939). Az elemi rendszer fogalma, amit alább megmagyarázunk, az állapotok olyan seregének a leírása, mely — matematikai nyelven szólva — az inhomogén Lorentz-csoport számára irreducibilis ábrázolási teret képez.



azt más részecskékből állónak tekinteni. Az elektron vagy a proton esetében mind a két feltétel teljesül. Ezeknek a részecskéknak az elemi jellege nem vitás. A normálállapotú hidrogén atomra csak az első feltétel teljesül, s azt nem tekintjük elemi részecskének.

A helyzet kétesebb pl. a  $\pi$ -mezon esetében. Kvalitatíve a  $\pi$ -mezon semmiben sem különbözik a  $\mu$ -mezon s a neutrínó ütközése folyamán képződő igen éles rezonancia-állapottól. Szigorúan véve a  $\pi$ -mezon állapotai nem képeznek elemi rendszert, minthogy az elég hosszú idő múltán mind disszociált, mind pedig disszociálatlan állapotban lehet, s bizonyos, hogy ezek között relativisztikusan invariáns módon különbséget lehet tenni. Mindamellet a  $\pi$ -mezon élettartama minden szóbjövő időegységhez (amilyen pl. a  $h/mc^2$ ) viszonyítva igen nagy; ezen időtartamon belül a  $\pi$ -mezon állapotai elemi rendszert alkotnak. Másrészről a  $\pi$ -mezon tulajdonságai nagyon eltérnek attól, amit egy  $\mu$ -mezonból és egy neutrínóból álló összetett rendszer esetében várnánk. Eszerint az elemi részecskékre vonatkozó második feltétel teljesül. Ez az a feltétel, amelynek nincs megfelelője az elemi rendszer definíciójában. Ennek folytán az elemi rendszer fogalma sokkal tágabb az elemi részecskéénél. Amint fent említettük, a normálállapotú hidrogén atom elemi rendszert képez.

Minden rendszert — tartalmazzon bár tetszőleges számú részecskét — fel lehet bontani elemi rendszerekre. Ezek az elemi rendszerek csak bizonyos állapotokat tartalmaznak s relativisztikusan invariáns módon jellemezhetők. Eszerint ha a hidrogén atom normálállapotára szorítkozunk, ezzel kiválasztottunk egy elemi rendszert a hidrogén atom állapotainak összességéből, melyek együttesen nem képeznek elemi rendszert. Az elemi rendszerekre való felbontás hasznossága attól függ, hogy milyen gyakran van dolgunk több elemi rendszert tartalmazó lineárkombinációkkal.

Ha az elemi rendszereket használjuk az elmélet alapja gyanánt, ennek az a nagy hátránya, hogy az elemi rendszerek létezése meglehetősen elvont okoskodással következik a kvantummechanika elveiből. Ennek folytán a legfontosabb operátorok közül némelyeknek a kifejezése „elvész” az eljárás folyamán. A fizikai mennyiségek közül az elmélet közvetlenül csupán az alapvető mennyiségek: az energia-impulzusvektor komponensei és a relativisztikus impulzusmomentum hat komponense számára szolgáltat kifejezést. Ebben a cikkben megkíséreljük, hogy olyan általános, invariánselméleti elveket találjunk, amelyeknek az alapján a helykoordináták operátorai meghatározhatók.

Ha elemi rendszerre szorítkozunk, a meghatározandó operátorokat fizikailag egyértelműen lehet értelmezni. Azok a részecske helyének felelnek meg, ha elemi részecskével van dolgunk; egyébként a rendszer tömegközéppontjának feleltethetők meg. Ha a rendszer nem elemi, az értelmezés nem lesz többé egyértelmű s követelményeink sem eredményeznek egyértelműen meghatározott operátorokat.

Mielőtt a tárgyalásra térnénk, szeretnénk hivatkozni más vizsgálatokra, melyeket meglehetősen hasonló céllal folytattak. A tömegközéppont problémáját a relativitáselméletben különösen Eddington<sup>2</sup> és Fokker<sup>3</sup> tárgyalta; ők azonban nem a kvantummechanikát vették alapul. Munkájuk értékelése és kvantummechanikai általánosítása Pryce<sup>4</sup> dolgozatában található meg. Gyakran lesz alkalmunk arra, hogy az ő eredményeire hivatkozzunk. Pryce munkájával rokon gondolatokat

<sup>2</sup> A. S. Eddington, *Fundamental Theory* (Cambridge University Press, London, 1946).

<sup>3</sup> A. D. Fokker, *Relativitätstheorie* (Groningen, Noordhoff, 1929).

<sup>4</sup> M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc.* 195A, 62 (1948).



fejtett ki mindenekelőtt Schrödinger<sup>5</sup>, utóbb pedig Finkelstein<sup>6</sup>, valamint Møller<sup>7</sup>.

Ez a dolgozat a de Sitter-tér irreducibilis ábrázolásainak<sup>8</sup> a szerzők egyike által elvégzett újbóli vizsgálatából<sup>9</sup> született. Ezek az ábrázolások egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak az elemi rendszerekre vonatkozó relativisztikus hullámegyenletekkel a de Sitter-térben. A vizsgálat végeredményeként kitént, hogy a kapott egyenletek fizikai tartalmát sokkal könnyebben megérthetnénk, ha lehetséges lenne helyoperátorokat definiálni invariánselméleti alapon. Ennek előkészítéseképpen elvégeztük az analóg vizsgálatot sík térben. A kapott eredményeket az alább következő szakaszokban közöljük.

### A lokalizált állapotokra és a helyoperátorokra vonatkozó posztulátumok

A helyoperátort könnyen fel lehetne írni, ha ismernénk azon állapot (vagy állapotok) hullámfüggvényét, amelyben (v. amelyekben) a három térkoordináta értéke zérus a  $t=0$  időben. Ha  $\psi$  ilyen hullámfüggvény és  $T(a)$  az  $a_x, a_y, a_z, a_t$  komponensekkel jellemzett eltolás operátora, akkor a  $T(a)^{-1}\psi$  hullámfüggvény olyan állapotot ír le, amelyben a térkoordináták értéke  $a_x, a_y, a_z$  az  $a_t$  időben. Eszerint az  $x=y=z=0, t=0$  állapotoknak megfelelő hullámfüggvények (és az eltolásoperátorok) ismerete maga után vonja valamennyi lokalizált állapotnak — azaz: a helyoperátorok valamennyi sajátfüggvényének — az ismeretét. Ezekből a helyoperátorok könnyen megkaphatók. Ez okból erőfeszítéseinket arra összpontosítottuk, hogy megkapjuk azon állapotok hullámfüggvényét, amelyek a  $t=0$  időben a koordinátarendszer kezdőpontjában vannak lokalizálva.

Posztuláljuk, hogy a  $t=0$  időben az  $x=y=z=0$  helyen lokalizált rendszert reprezentáló állapotok: *a)* lineáris  $S_0$  sereget képezzenek, azaz: két ilyen lokalizált állapot szuperpozíciója ugyanilyen módon lokalizált állapot legyen; *b)* az  $S_0$  sereg legyen invariáns a kezdőpont körül való elforgatásokkal, valamint a térkoordináták s az időkoordináta tükrözéseivel szemben; *c)* ha a  $\psi$  állapot a fent mondott értelemben lokalizált, térbeli eltolás alkalmazása  $\psi$ -re tegye azt ortogonálissá az  $S_0$  seregbe tartozó valamennyi állapotra; *d)* bizonyos regularitási feltételeket, melyek lényegében azt a követelményt fejezik ki, hogy a lokalizált állapotokra a Lorentz-csoport összes infinitezimális operátora alkalmazható legyen, később vezetünk be.

Várható, hogy valamely adott pontban lokalizált állapotok ugyanolyan tulajdonságúak, mint a folytonos spektrum sajátfüggvényei, azaz: nem lesznek négyzetesen integrálhatók, hanem négyzetesen integrálható függvények limeszeként kaphatjuk meg őket. Úgy tetszik, a fenti posztulátumok természetes kifejezői a rendszer lokalizációjának abban az értelemben, hogy az olyan rendszereket, amelyek esetében lehetetlennek bizonyul kielégíteni ezeket a feltételeket, természetes lenne lokalizálhatatlannak nevezni.

<sup>5</sup> E. Schrödinger, Berl. Ber. 418 (1930); 63 (1931).

<sup>6</sup> R. J. Finkelstein, Phys. Rev. 74, 1563A (1948).

<sup>7</sup> Chr. Møller, Comm. Dublin Inst. for Adv. Studies A, No. 5 (1949); továbbá A. Papapetrou Acad. Athens 14, 540 (1939).

<sup>8</sup> L. H. Thomas, Ann. of Math. 42, 113 (1941).

<sup>9</sup> T. D. Newton, Princeton Dissertation (1949).



Számításaink elvégzéséhez az elemi rendszerek Bargmann és Wigner<sup>10</sup> által leírt realizációját választjuk. Most rátérünk a számításokra.

*A spinnel nem rendelkező részecske* (Klein—Gordon-részecske)

A lokalizált állapot meghatározása különösen egyszerű ebben az esetben. Ennek ellenére meglehetősen részletességgel elvégezzük, mivel ugyanezek a lépések fordulnak elő a spinnel rendelkező részecskékre vonatkozó gondolatmenetben is.

A hullámfüggvények ebben az esetben a  $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2$  hiperboloid pozitív köpenyén van definiálva. Független változókként a  $p^1, p^2, p^3$  komponenseket használjuk;  $p_0$ , ahol csak fellép, a  $(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2)^{1/2}$  kifejezést jelöli röviden. Az invariáns skalárszorzat

$$(\psi, \varphi) = \iiint \psi(p_1 p_2 p_3)^* \varphi(p_1 p_2 p_3) dp_1 dp_2 dp_3 / p_0. \quad (1)$$

A koordinátatérben a hullámfüggvény

$$\Phi(x^1, x^2, x^3, x^0) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi(p_1, p_2, p_3) \exp(-i\{x, p\}) dp_1 dp_2 dp_3 / p_0, \quad (2)$$

ahol

$$\{x, p\} = x^0 p^0 - x^1 p^1 - x^2 p^2 - x^3 p^3 = x_0 p_0 - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 \quad (3)$$

a Lorentz-invariáns skalárszorzat. Ebben a dolgozatban mindenütt a kovariáns és kontravariáns komponensek az időkoordináta (0) esetében egymással megegyeznek, a térbeli (1, 2, 3) koordináták esetében ellentettben egyenlők. Ez határozza meg az indexek fel- és lehúzását. Olykor két hármasektor skalárszorzatának jelölésére használni fogjuk az  $(x \cdot p)$  írásmódot, úgyhogy pl.  $\{x, p\} = x^0 p^0 - (x \cdot p)$ .

A  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$  körül végrehajtott elforgatásokkal szemben invariáns lineáris sokaságokat a  $2j+1$  számú

$$p_m^j(\vartheta, \varphi) f(p) \quad (m = -j, -j+1, \dots, j-1, j) \quad (4)$$

függvény feszíti ki, ahol  $p, \vartheta$  és  $\varphi$  a  $p_1, p_2, p_3$  változóknak megfelelő polárkoordináták,  $f$  pedig tetszőleges függvény. A  $P_m^j$  függvények a jól ismert gömbfüggvények. A (4) függvényrendszerek invariánsak tükrözéssel — azaz a  $p_1, p_2, p_3 \rightarrow -p_1, -p_2, -p_3$  helyettesítéssel — szemben is. Ezekkel az invarianciatulajdonságokkal természetesen nemcsak egy-egy, (4) alatt látható függvényrendszer rendelkezik, hanem tetszőleges számú ilyen rendszer összege is, hacsak minden egyes függvénnyel együtt mind a  $2j+1$  számú, (4) alatt felírt függvény, és azok összes lineáris kombinációja is fellép. Az  $f(p)$  függvények különböző  $j$  mellett különbözőek lehetnek.

Időtükrözéskor  $\psi(p_1 p_2 p_3)$  a

$$\Theta \psi(p_1, p_2, p_3) = \psi(-p_1, -p_2, -p_3)^* \quad (5)$$

függvénybe megy át<sup>11</sup>. Időtükrözésen azt az operációt értjük, amely a  $\psi$  hullámfüggvényt a következő tulajdonságú  $\Theta \psi$  hullámfüggvénybe viszi át: a  $\Theta \psi$  hullámfüggvénnyel leírt állapotban a  $-t$  időben végrehajtott minden kísérlet ugyanazt az eredményt szolgáltatja, mint ha ugyanazt a kísérletet  $\psi$ -n hajtuk végre a  $t$  időben. Tekintettel az (5) képletre és a  $b)$  posztulátumunkra, ha  $P_m^j(\vartheta, \varphi) f(p)$  a kezdő-

<sup>10</sup> V. Bargmann és E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. **34**, 211 (1948).

<sup>11</sup> E. P. Wigner, Göttinger Nachrichten 546 (1932).



pontban lokalizált állapot, a megfelelő  $P_{-m}^j(\vartheta, \varphi)^* f(p)^*$  rendszer — azaz a  $P_{+m}^j(\vartheta, \varphi) \times \times f(p)^*$  rendszer — szintén lokalizált állapotokat ír le. Ugyanez igaz a megfelelő függvénypárok összegére és különbségére is, ami azt mutatja, hogy az általánosság korlátozása nélkül feltehető: az  $f(p)$  függvények valóságok.

Az eltolásoperátor az impulzustérben egyszerűen az  $\exp(-i\{a, p\})$  kifejezéssel való szorzás:

$$T(a)\psi = \exp(-i\{a, p\})\psi. \quad (6)$$

Nekünk tisztán térszerű eltolásokat kell vizsgálnunk; feltesszük tehát, hogy  $a^0=0$ . A  $c)$  posztulátumunkból ekkor következik, hogy speciálisan  $\exp(i(a \cdot p))\psi$  ortogonális  $\psi$ -re, ha  $\psi$  lokalizált, vagyis

$$\iiint |\psi(p_1 p_2 p_3)|^2 \exp i(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) dp_1 dp_2 dp_3 / p_0 = 0 \quad (6a)$$

bármely el nem tűnő  $a$  vektor mellett. Ez azt mutatja, hogy  $|\psi|^2/p_0$  Fourier-integrál-előállításában csak a hullámszám zérus értékének megfelelő járuléklép lép fel. Így tehát  $|\psi|^2/p_0$  konstans;  $|\psi|$  arányos  $p_0^{1/2}$ -nel. Ha ezt összevetjük a (4) képlettel, látjuk, hogy csak a  $j=0$  értéket választhatjuk. Minthogy láttuk ezenkívül, hogy  $f(p)$  valósnak választható, kapjuk:

$$\psi^2 = (2\pi)^{-3} p_0. \quad (7)$$

Várakozásunknak megfelelően  $(\psi, \psi)$  végtelen: a lokalizált függvény folytonos spektrum részét képezi.

Ami az  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  posztulátumokat illeti,  $\psi$  lehetne diszkontinuus függvény:  $+p_0^{1/2} = (p^2 + \mu^2)^{1/4}$  a  $p$  változó bizonyos értékeire, a többi  $p$  értékekre pedig  $-(p^2 + \mu^2)^{1/4}$ . Bárhogy is válasszuk azonban  $\psi$ -t, (7)-nek megfelelően, esetünkben csak egy, a kezdőpontban lokalizált állapot van; ha ugyanis kettő volna, mondjuk  $\psi_1$  és  $\psi_2$ , a  $\psi_1$  állapotnak nemcsak  $\psi_1 \exp(-i(a \cdot p))$ -re, hanem  $\psi_2 \exp(-i(a \cdot p))$ -re is ortogonálisnak kellene lennie, amiből nemcsak  $|\psi|^2 \sim p_0$ , hanem  $\psi_1^* \psi_2 \sim p_0$  is következik;  $\psi_1$ -nek tehát arányosnak kell lennie  $\psi_2$ -vel.

Abból a célból, hogy kiküszöböljük a szakadásos  $\psi$ -t mint lokalizált állapotot, további regularitási feltételt vezetünk be: Az

$$(M^{0k}\psi_n, M^{0k}\psi_n)/(\psi_n, \psi_n) \quad (8)$$

kifejezés maradjon véges, miközben a  $\psi_n$  normálható hullámfüggvények  $\psi$ -hez tartanak. Itt  $M_{0k}$  az  $x^0 x^k$  síkbeli valódi Lorentz-transzformáció infinitezimális generátora, melynek az

$$M^{0k} = ip^0 \partial / \partial p_k \quad (8a)$$

differenciáloperátor felel meg<sup>10</sup>. Ez a kiegészítő posztulátum kizárja a szakadásos  $\psi$ -ket s így az egyetlen, az origóban lokalizált állapot hullámfüggvényére kapjuk:

$$\psi = (2\pi)^{-3/2} p_0^{1/2}. \quad (9)$$

A  $d)$  regularitási követelmény voltaképpen azt írja elő, hogy a (8) kifejezés mindegyik  $M^{kl}$ -re véges legyen. Ha azonban (8)-ban  $M^{0k}$  helyére az  $M^{23}$ , az  $M^{31}$ , vagy az  $M^{12}$  generátort helyettesítjük be, a kapott kifejezés automatikusan korlátozott lesz; a három tag összege  $j(j+1)$ -gyel egyenlő. Eszerint az a követelmény, hogy az  $M^{23}$ ,  $M^{31}$ ,  $M^{12}$  operátorokat alkalmazni lehessen  $\psi$ -re, nem ad új feltételt.



A koordinátatérben a lokalizált függvényt a (2) képlet segítségével kaphatjuk meg. Az eredmény egy állandó tényezőtől eltekintve<sup>12</sup>

$$\Psi(r) = (\mu/r)^{5/4} H_{5/4}^{(1)}(i\mu r). \quad (9a)$$

Ez az  $r=\infty$  helyen exponenciálisan zérushoz tart (mint  $e^{-\mu r}$ ), az  $r=0$  helyen pedig végtelenné válik úgy, mint  $r^{-5/2}$ . Természetesen nem négyzetesen integrálható függvény, minthogy folytonos spektrumnak képezi a részét.

Az eltolás operátorát (9)-re alkalmazva megkapjuk a  $t=0$  időben az  $x^1, x^2, x^3$  helyen lokalizált állapot hullámfüggvényét:

$$T(-x)\psi = (2\pi)^{3/2} p_0^{1/2} \exp -i(p^1 x^1 + p^2 x^2 + p^3 x^3) = (2\pi)^{-3/2} p_0^{1/2} e^{-i(p \cdot x)}.$$

Ennek a  $q^k$  koordináta-operátor sajátfüggvényének kell lennie az  $x^k$  sajátérték mellett. A  $q^k$  operátort ennél fogva a

$$q^k \varphi(p) = (2\pi)^{-3} \int p_0^{1/2} e^{-i(p \cdot x)} x^k (p'_0)^{1/2} e^{i(p' \cdot x)} \varphi(p') dx dp' / p'_0 \quad (10)$$

képlet definiálja;  $dx$  és  $dp'$  rövid jelölésként  $dx^1 dx^2 dx^3$ , ill.  $dp'_1 dp'_2 dp'_3$  helyett áll. A (10) képlet ismert módon átalakítható a következőképpen:

$$\begin{aligned} q^k \varphi(p) &= \left( i \frac{\partial}{\partial p^k} - \frac{i}{2} \frac{p^k}{p_0^2} \right) (2\pi)^{-3} \int p_0^{1/2} e^{i(p' - p) \cdot x} (p'_0)^{-1/2} \varphi(p') dx dp' = \\ &= -i \left( \frac{\partial}{\partial p^k} + \frac{p^k}{2p_0^2} \right) \varphi(p). \end{aligned} \quad (11)$$

Ezek a kifejezések egyaránt érvényesek véges és eltűnő nyugalmi tömeg esetére. Figyelemre méltó, hogy a  $q^k$  operátort a koordinátatérbe transzformálhatjuk és alakja ott viszonylag egyszerű marad:

$$q^k \Phi(x) = x^k \Phi(x) + \frac{1}{8\pi} \int \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{|x-y|} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_k} dy. \quad (12)$$

Itt  $x$  és  $y$  az  $x^\mu, y^\mu$  négyesvektorok térbeli részét jelöli,  $dy$  pedig rövidítésként  $dy^1 dy^2 dy^3$  helyett áll. A megszokott  $q^k$  operátor csupán (11) első tagját tartalmazza.

Hasznos lehet ehelyütt emlékeztetni arra, hogy a helyoperátorok, melyekre posztulátumaink vezetnek, szükségszerűen felcserélhetők egymással, úgyhogy összehasonlítást csak Pryce  $e$ ) esetével tehetünk. Valóban: a mi  $q^k$  operátorunk azonos az ő dolgozatában szereplő  $\tilde{q}^k$ -val. Megjegyzendő azonkívül, hogy valamely állapot, mely egy koordinátarendszerben lokalizált az origóban, egy az előbbihez képest mozgó koordinátarendszerben nem lokalizált, még akkor sem, ha a két koordinátarendszer kezdőpontja a  $t=0$  időben egybeesik. Eszerint  $q^k$  operátorainknak a relativisztikus transzformációkkal szemben nincs egyszerű kovariáns jelentésük. Ez egyébként a megszokott operátorok esetében sincs így. Azonfelül habár úgy látszik, hogy  $\Phi(x)=\delta(x)$  invariáns azon relativisztikus transzformációkkal szemben, amelyek az origót változtatlanul hagyják, ez lényegében nem más, mint egy matematikai szócsavarás. Ez a legjobban oly módon látható, ha a  $\delta$ -függvényt visszatransz-

<sup>12</sup> G. A. Campbell és R. M. Foster, "Fourier Integrals for Practical Applications", American Telephone and Telegraph Company (1931).



formáljuk az impulzustérbe (2) megfordításának felhasználásával. Az eredményül kapott  $p_0$ -nak, úgy látszik, egyszerű kovariáns jelentése van. Azonban ez nem négyzetesen integrálható függvény s ha ilyenl közelítjük, mondjuk a  $\psi_\alpha = p_0 \exp(-\alpha^2 p_0^2)$  függvényvel,  $\psi_\alpha$  Lorentz-transzformáltja csökkenő  $\alpha$ -val nem tart  $\psi_\alpha$ -hoz. Valóban: ha  $\alpha\mu \ll 1$ , a  $\psi_\alpha$  függvénynek és transzformáltjának a skalárszorzata  $\alpha$ -tól független és kisebb, mint  $\psi_\alpha$  normája.

### Spinnel rendelkező véges tömegű részecske

Ismét a 10 alatt idézett dolgozatban használt leírást választjuk, azaz a hullámfüggvényeket a  $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2$  hiperboloid pozitív köpenyén értelmezzük, a  $p_1, p_2, p_3$  változókon kívül  $2s$  spinváltozót fogunk használni:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2s}$ ; ezek mindegyike négy értéket vehet fel. A hullámfüggvények, melyek a rendszer lehetséges állapotait írják le, a  $\xi$  változóknak szimmetrikus függvényei és a következő  $2s$  egyenletet elégítik ki:

$$\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^* p_{\alpha} \psi = \mu \psi, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2s. \quad (13)$$

Ezek konzisztens voltát korábban kimutattuk.<sup>10</sup> A  $\gamma_{\alpha}$ -k a  $\xi_{\alpha}$ -kra hatnak; két  $\gamma$ , ha első indexeik különbözők, egymással felcserélhető, ha pedig első indexeik megegyeznek, a jól ismert

$$\gamma_{\alpha}^* \gamma_{\alpha}^{\lambda} + \gamma_{\alpha}^{\lambda} \gamma_{\alpha}^* = 2g^{\lambda\lambda} \quad (13a)$$

összefüggéseket elégítik ki. A mi esetünk és a zérus spin esete között a nagy különbség abban áll, hogy a megengedhető hullámfüggvényekre vonatkozóan most érvényes a (13) korlátozás is a hiperboloid pozitív köpenyére való korlátozódáson kívül. Ezt az utóbbit oly módon vehetjük figyelembe, hogy független változókként csupán a  $p_1, p_2, p_3$  változókat használjuk; az előbbi korlátozást azonban nem lehet hasonlóan egyszerű módon tekintetbe venni. Nagymértékben ki fogjuk azonban aknázni a Schrödinger<sup>5</sup> által oly sikeresen alkalmazott fogást: bevezetjük az

$$E_{\alpha} = \frac{1}{2} (p_0)^{-1} \left( \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^* p_{\alpha} + \mu \right) \gamma_{\alpha}^0 \quad (14)$$

operátorokat. Ezek projekció-operátorok:  $E_{\alpha}^2 = E_{\alpha}$  és  $E_{\alpha} \psi$  automatikusan kielégíti a megfelelő (13) egyenletet. Jelöljük az összes  $E_{\alpha}$  szorzatát  $E$ -vel:

$$E = E_1 E_1 \dots E_{2s}; \quad (14a)$$

$E\psi$  mindenkor megengedett függvény, mely valamennyi (13) egyenletnek eleget tesz.

Skalárszorzatként a

$$(\psi, \varphi) = \int p_0^{-2s-1} \sum_{\xi} \psi^* \varphi dp \quad (15)$$

kifejezést fogjuk használni. Innen nyomban következik  $c)$  posztulátumunk folytán, és mert (6) ebben az esetben is érvényes, hogy minden, a kezdőpontban lokalizált hullámfüggvény kielégíti (7) analogonját:

$$\sum_{\xi} |\psi|^2 = (2\pi)^{-3} p_0^{2s+1}. \quad (16)$$

Az időtükrözés operátora

$$\Theta \psi(p_1, p_2, p_3) = C \psi(-p_1, -p_2, -p_3)^*, \quad (17)$$



ahol  $C$  a  $\xi$  koordinátákra ható mátrix, mely eleget tesz a

$$\begin{aligned} C\gamma_\alpha^{0*} &= \gamma_\alpha^0 C & (\alpha = 1, 2, \dots, 2s); \\ C\gamma_\alpha^{k*} &= -\gamma_\alpha^k C & (\alpha = 1, 2, \dots, 2s; k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (17a)$$

egyenleteknek. Ha  $\gamma^0, \gamma^2, \gamma^3$  valósak,  $\gamma^1$  pedig képzetes,

$$C = \prod_{\alpha=1}^{2s} \gamma_\alpha^2 \gamma_\alpha^3; \quad C^2 = (-1)^{2s}. \quad (17b)$$

Minthogy  $C$  a fent megadott definíció szerint valós mátrix, teljesül  $\Theta^2 = (-1)^{2s}$  is; ez a  $\gamma$  mátrixok választásától függetlenül fennáll. A térkoordináták tükrözésének operátora

$$I\psi(p_1, p_2, p_3) = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \dots \gamma_{2s}^0 \psi(-p_1, -p_2, -p_3); \quad (18)$$

ez a (14) alatt megadott  $E_\alpha$  operátorokkal felcserélhető.

Abból a célból, hogy meghatározzuk a hullámfüggvényeknek a térbeli elforgatásokkal szemben invariáns seregeit, először is definiáljuk a tiszta spinfüggvény analógját a (13) relativisztikus egyenletek esetében. Ebből a célból definiáljuk a  $v_m$  segédfüggvényeket, melyek a  $p_1, p_2, p_3$  komponensektől függetlenek s csak a  $\xi$  változóktól függenek. Ezek eleget tesznek a

$$\gamma_\alpha^0 v_m = v_m \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2s) \quad (19)$$

és

$$\frac{1}{2} i \sum_\alpha \gamma_\alpha^1 \gamma_\alpha^2 v_m = m v_m \quad (m = -s, -s+1, \dots, s-1, s) \quad (19a)$$

egyenleteknek. Minthogy a  $\gamma^0$  és az  $i\gamma^1\gamma^2$  mátrixok felcserélhetők, átmenetileg feltehetjük, hogy mind átlós alakúak. A (19) egyenlet ekkor megkívánja, hogy a  $v_m$  függvények minden egyes  $\gamma^0$  mátrix  $+1$  sajátértékéhez tartozzanak;  $2^{2s}$  ilyen függvény van. Minket azonban csupán a  $\xi$  változók szimmetrikus függvényei érdekelnek és ilyen függvényből csak  $2s+1$  van. Ezeket az  $m$  index különbözteti meg:  $v_m$  csak azokra a  $\xi$  értékekre különbözik zérustól, amelyek mellett az  $i\gamma^1\gamma^2$  mátrixok közül  $s+m$  számú  $+1$ -gyel, a fennmaradó  $s-m$  mátrix  $-1$ -gyel szoroz. Ezen  $\xi$  értékekre  $v_m$  értéke  $((s+m)!(s-m)!/(2s)!)^{1/2} 2^{-s}$ , úgyhogy  $v_m$  normált a következő értelemben:

$$\sum_\xi |v_m|^2 = \sum_\xi v_m^2 = 1. \quad (19b)$$

Fizikailag  $m$  az  $x^3$  tengelyre vonatkozó spinmomentumnak felel meg,  $v_m$  paritása páros (19) és (18) folytán.

A  $v_m$ -ek nem megengedett hullámfüggvények, minthogy nem teljesítik a (13) hullámegyenleteket. Definiáljuk ezért a következő spinfüggvényeket:

$$V_m(p_1, p_2, p_3, \xi_1, \dots, \xi_{2s}) = E v_m \quad (m = -s, \dots, s). \quad (20)$$

Ezek megengedett páros paritású hullámfüggvények és  $V_m$  a harmadik koordináta-tengelyre vonatkozó impulzusmomentum  $m\hbar$  értékével jellemzett állapotot ír le.



Normálásuk (19b) helyett:

$$\sum_s |V_m|^2 = ((p_0 + \mu)/2p_0)^{2s}. \quad (20a)$$

A (13) egyenletek legáltalánosabb megoldása a  $V_m$ -ek valamely lineáris kombinációja, amelynek együtthatói  $p_1, p_2, p_3$  tetszőleges függvényei. Az elforgatásokkal és tükrözésekkel szemben invariáns függvényrendszer

$$\psi_{jm} = \sum_{l, m'} S(l, s)_{j, m-m', m'} P_{m-m'}^l(\vartheta, \varphi) f_l(p) V_{m'} \quad (21)$$

alakú hullámfüggvényeket tartalmaz. Itt  $p, \vartheta, \varphi$  ismét a  $p^1, p^2, p^3$  változóknak megfelelő polárkoordinátákat jelölik;  $f_l$  tetszőleges ismeretlen függvénye  $p$ -nek. Ha azonban a rendszerben a (21) alakú függvények egyike fellép, fellép az összes többi függvény is, amelyek  $m$ -nek különböző értékeihez, de ugyanahhoz az  $f_l$ -hez tartoznak. Az  $l$ -re való összegezés az összes,  $|j-s|$  és  $j+s$  közé eső páros értékre terjesztendő ki, ha páros paritású  $\psi_j$ -t kívánunk kapni; páratlan paritású  $\psi_j$  esetén  $l$  valamennyi páratlan értékére kell összegeznünk. A szokásos  $S(l, s)$  együtthatók<sup>13</sup> adott  $l$  „pályamomentum” és  $s$  „spinmomentum” mellett megadják a teljes impulzusmomentum  $j$  értékéhez tartozó hullámfüggvényt.

Minthogy a  $\vartheta, \varphi$  polárszögek  $p=0$  mellett határozatlanok, az  $f_l(p)$  függvényeknek a  $p=0$  helyen el kell tűnniük, kivéve ha  $l=0$ . Ha nem így volna, a  $\psi_{jm}$  függvények  $p=0$  mellett szingulárisá válnának s az  $M^{0k}$  operátorokat nem lehetne rájuk alkalmazni abban az értelemben, hogy (8) korlátos voltának feltétele teljesüljön. (Ténylegesen ezt az egyenletet meg kell követelnünk  $M^{0k}$  négyzetére, nem csak  $M^{0k}$ -ra.) Ebből következik, hogy  $\psi_{jm}$  eltűnik a  $p=0$  helyen, kivéve ha a (21) sor tartalmaz  $l=0$ -nak megfelelő tagot. De (16) azt mutatja, hogy  $\psi$  nem tűnhet el ebben a pontban véges nyugalmi tömeg esetén s hogy ennél fogva minden lokalizálható hullámfüggvény kifejtésében kell lenni  $l=0$ -s tagnak. Ez csak akkor következik be, ha  $j=s$  és a hullámfüggvény páros paritású. Ha  $\psi_{jm}$  paritása páratlan, (21) alatt csak az  $f_1, f_3$  stb. függvények lépnek fel s ezek a  $p=0$  helyen eltűnnek. Ebből következik, hogy az origóban lokalizált hullámfüggvények impulzusmomentuma mindenkor  $j=s$  s maguk a függvények a következő alakúak:

$$\psi_m = \sum_{l=0}^{2s} \sum_{m'} S(l, s)_{s, m-m', m'} P_{m-m'}^l(\vartheta, \varphi) f_l V_{m'}. \quad (21a)$$

Most átgörjük a számításnak azt a részét, amely az  $f_l$ -ek meghatározásával foglalkozik s csak az eredményt adjuk meg. Eredményül  $2s+1$ , a kezdőpontban lokalizált függvényt kapunk; ezek:

$$\psi_m = (2\pi)^{-3/2} 2^s p_0^{2s+1/2} (p_0 + \mu)^{-s} V_m(p_1 p_2 p_3; \xi_1, \dots, \xi_{2s}), \quad (21b)$$

<sup>13</sup> Lásd pl. E. P. Wigner, Gruppentheorie... (V. Viehweg & Sohn, Braunschweig, 1931). A  $\psi_j$  hullámfüggvény megszerkesztése a  $V$  spinfüggvényekből és a  $P^l$  gömbfüggvényekből ugyanaz a művelet, mint amellyel a spinváltozók meghatározott  $S$ -sel jellemzett függvényeiből, valamint a térkoordináták meghatározott  $L$ -hez tartozó függvényeiből meghatározott  $J$  értékkel rendelkező függvényt szerkesztünk, amely a változók mindkét csoportjától függ. Ennek az összetevésnek a leírása XXII. fejezetben található. Az összetevési együtthatók — melyeket ebben a dolgozatban  $S(l, s)$ -sel jelöltünk — meghatározása az idézett könyvben a 202. oldaltól kezdődően található meg (jelölük ott  $S^{(L, S)}$ ).



[azaz (21a)-ból csak az  $l=0$ -s tag marad meg]. Ez az eredmény semmiképp sem meglepő.<sup>14</sup>

A helykoordináta operátorának kiszámítása pontosan ugyanolyan módon végezhető el, mint a zérus spin esetében és a következő eredményt kapjuk:

$$q^k = E \prod_{\alpha=1}^{2s} (1 + \gamma_{\alpha}^0) \frac{p_0^{2s+1/2}}{(p_0 + \mu)^s} \left( -i \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \frac{p_0^{-1/2}}{(p_0 + \mu)^s} E. \quad (22)$$

Ha  $s=1/2$ , ez ismét megegyezik a Pryce dolgozatában az  $e$ ) esetben kapott eredmény-nyel<sup>4</sup>, azaz az  $\tilde{q}$  operátorával.

Az  $E$  projekció-operátorok jelentősége (22) alatt csak abban áll, hogy megsemmisítik a mögöttük álló függvény negatív energiájú részét s tisztán pozitív energiájú hullámfüggvényt eredményeznek. Minthogy a  $q^k$  helyoperátor csakis az olyan hullámfüggvényekre vonatkozik, amelyek kizárólag a pozitív hiperboloidon vannak értelmezve, a jobb oldalon álló  $E$ -t el lehetne hagyni. Mindkét  $E$  operátort elhagyhatjuk<sup>5</sup>, ha két tisztán pozitív energiájú hullámfüggvényt összekötő mátrixelemet akarunk kiszámítani. A  $p_0$ -t tartalmazó tényezőkre azért van szükség, hogy  $i\partial/\partial p_j$ -t hermitikusá tegyük; a (15) térfogatelem  $p_0^{-2s-1}$  tényezője miatt valamely operátor akkor hermitikus, ha azután, hogy jobbról  $p_0^{s+1/2}$ -del megszoroztuk s balról ugyan-

ezen tényezővel elosztottuk, hermitikusnak látszik. A  $\prod_{\alpha=1}^{2s} \frac{1}{2} (1 + \gamma_{\alpha}^0)$  operátor projekció-operátor, vagyis azonos önmaga négyzetével, ennél fogva még egyszer beírhatjuk (22)-be a második  $E$  elé, hogy így (22) valamivel szimmetrikusabbnak lássék. A Klein—Gordon-részecske (11) helyoperátora speciális esete (22)-nek és abból  $s=0$  behelyettesítésével kapható meg.

Ha valamely állapotra  $a$  nagyságú eltolást alkalmazunk s azután megmérjük  $x^k$  koordinátáját, az eredmény  $a^k$ -val nagyobb lesz, mint az eredeti állapotban mért  $x^k$  koordináta. Ez a

$$T(-a)q^kT(a) = q^k + a^k \quad (23)$$

összefüggésre vezet ( $a^0=0$ ). Ha itt  $T(a)$  helyére behelyettesítjük annak (6) kifejezését és áttérünk az igen kicsiny  $a^k$  határesetére, a

$$(q^k p^l - p^l q^k) \varphi = -i \delta_{kl} \varphi \quad (23a)$$

összefüggést kapjuk, ahol  $\varphi$  tetszőleges megengedett hullámfüggvény. Valóban, az

$$E_{\alpha}(1 + \gamma_{\alpha}^0)E_{\alpha} = p_0^{-1}(p_0 + \mu)E_{\alpha} \quad (24)$$

<sup>14</sup> A bizonyítás menete a következő. Először megmutatjuk, szemügyre véve a  $\psi_m \pm \Theta \psi_{-m}$  függvényt, hogy a (21a) alatt fellépő  $f_l$  függvények valósaknak választhatók. Ezután  $\psi_m$ -et felbontjuk két részre: a (21a) összeg  $l=0$ -hoz tartozó részét  $\psi^0$ -al jelöljük, a fennmaradó részt pedig  $\psi^r$ -rel. Amint láttuk,  $\psi^0$  véges a  $p=0$  helyen, míg  $\psi^r$  ugyanebben a pontban eltűnik. A bizonyítás ezután abban áll, hogy megmutatjuk: nem létezhet olyan tartomány, amelyben  $\psi^r$  véges, de sokkal kisebb, mint  $\psi^0$ . Ekkor  $\psi^0$  és  $\psi^r$  folytonosságából következik, hogy az utóbbi mindenütt eltűnik. Behelyettesítve a  $\psi^0 + \psi^r$  függvényt  $\psi$  helyére a (16) képletbe,  $\psi^r$  négyzetét az előbb említett tartományban elhanyagolhatjuk a többi taghoz képest. A jobb oldal, valamint a  $\psi^0$  négyzete által szolgáltatott tag független  $\vartheta$ -tól és  $\varphi$ -tól. Ennél fogva ennek igaznak kell lenni a  $\psi^0$  és  $\psi^r$  keresztszorzatából származó tagra is. Ez a tag azonban  $P_m^{\mu}(\vartheta, \varphi)f_0 f_l$  alakú kifejezések összege, melyek csak akkor lehetnek függetlenek  $\vartheta$ -tól és  $\varphi$ -tól, ha valamennyi  $f_l$  ( $l>0$ ) eltűnik ( $f_0$  a feltevés szerint véges). Ebből azután következik, hogy az  $f_l$ -ek mindenütt eltűnnek és (21a) egyetlen tagra redukálódik. Ezt (16)-ból oly módon kaphatjuk meg, hogy mindkét oldalból négyzetgyököt vonunk.



azonosság felhasználásával elvégzett közvetlen számítás a

$$q^k p^l - p^l q^k = -i\delta_{kl} E \quad (25)$$

felcserélési összefüggést adja. A  $q^k$  koordinátáknak  $p_0$ -al képezett felcserélési összefüggései természetesen a szokásos alakúak, minthogy  $p_0$  egyedül a  $p^k$  változók függvénye. Mivel a  $q^k$ -k egy háromdimenziós térbeli vektoroperátor komponensei, ezeknek a térbeli  $M^{kl}$  komponensekkel képezett felcserélési összefüggései ugyancsak a megszokottak.

Végezetül meg kívánjuk jegyezni, hogy a fentiekhez hasonló vizsgálatot a zérus tömegnek megfelelő egyenletek esetére is elvégeztük. A spin 0 és  $1/2$  értékeire újból a lokalizált rendszerekre vonatkozóan (9) és (21b) alatt megadott kifejezésekre jutottunk. Azonban  $s$  nagyobb (de véges) értékei mellett,  $s=1$ -gyel (azaz a Maxwell-egyenletekkel) kezdődően azt találtuk, hogy a fenti értelemben vett lokalizált állapotok nem léteznek. Ez munkánknak egy nem kielégítő — habár nem váratlan — vonása. A tényállás végtelen spin esetén sem teljesen kielégítő.

### Megjegyzések

Először is megkérdezhetjük, mi az oka annak, hogy a mi lokalizált állapotaink nem a koordinátatérbeli  $\delta$ -függvények, melyeket szokásosan a lokalizált állapotok leírására használnak. Az ok természetesen az, hogy a mi hullámfüggvényeink valamennyien tisztán pozitív energiájú állapotokat írnak le. A  $\delta$ -függvény nem ilyen. Hasonlóképpen, a mi (22) operátorunk pozitív energiás függvényeket pozitív energiás függvényekbe visz át.

Gyakran mondják, hogy ha valamely részecske — pl. egy elektron — helyének mérését a Compton-hullámhossznál nagyobb pontossággal végezzük el, ez párkeltést eredményezne, s hogy ennél fogva természetes, hogy a helyoperátorok nem őrzik meg a hullámfüggvény pozitív energiás voltát. Minthogy a részecske helyének mérése meghatározott helyű részecskét kell, hogy eredményezzen, nem pedig egy részecskét és több részecsképart, ez a megfontolás valójában tagadja a részecske helymérésének a lehetőségét. Ha ezt elfogadjuk, különös marad továbbra is, hogy a párkeltés egyforma mértékben teszi lehetetlenné a helymérést oly nagymértékben különböző rendszerek esetében, amilyen az elektron, a neutron vagy éppen a neutrínó. A fent közölt számítások mindenestre azt mutatják, hogy nincs abban semmi képtelenség, ha feltesszük: a zérustól különböző tömegű elemi rendszerek helye mérhető, és léteznek lokalizált állapotok. Azonfelül az  $a$ ),  $b$ ),  $c$ ) és  $d$ ) posztulátumok, melyek invariancia-megfontolásokon alapulnak, minden zérustól különböző tömegű elemi rendszerre egyértelműen definiálják a lokalizált állapotokat és a helyoperátorokat.

Összetett rendszerek esetében a lokalizált állapotokra nem adható hasonlóan egyértelmű definíció. Jóllehet most is könnyen meg lehet mutatni, hogy a lokalizált állapotoknak meghatározott  $j$  impulzusmomentum tulajdonítható, ami az okoskodás fennmaradó részét illeti, csakhamar nehézségekbe ütközünk. Speciálisan a (16) képletben az összegezés nem csupán a  $\xi$  spinkoordinátákra terjesztendő ki, hanem a nyugalmi tömeg és a sajátimpulzusmomentum (spin) különböző értékeivel jellemzett összes állapotra is. Ennek folytán pl. olyan állapotokat kaphatunk, amelyek axiómáink értelmében koegzisztálhatnak mint lokalizált állapotok, jóllehet  $j$  értékeik különbözőek. Ez az, amit közönségesen okoskodva is várnánk, mivel ha a rendszer



több részecskét tartalmaz, azok az állapotok, amelyekben ezen részecskék bármelyike lokalizálva van az origóban, teljesítik posztulátumainkat. Ez vonatkozik azokra az állapotokra is, amelyekben egy másik részecske van ily módon lokalizálva, vagy azon állapotokra, amelyekben a koordináták tetszőleges lineárkombinációja zérus. Következésképpen nem csak a lokalizált állapotok száma lesz sokkal nagyobb, hanem azonkívül várnunk kell, hogy sok ilyen nagy sereg található, amelyekre posztulátumaink teljesülnek, noha nincs köztük két olyan sereg, melyeket szimultán lokalizálnak lehetne tekinteni. Más szavakkal, a lokalizált állapotok seregei nem csak sokkal nagyobbak összetett rendszerekre, hanem azonkívül még választanunk is kell sok sereg között, melyek magukban mind teljesítik posztulátumainkat. Nem látszik lehetőség arra, hogy tovább lépjünk előre az összetett rendszerek lokalizált állapotainak definíciója terén anélkül, hogy további különleges feltevéseket ne tennénk. Természetesen definiálhatjuk lokalizált állapotokként azokat az állapotokat, amelyekben az összetett rendszer elemi alkotórészeinek bármelyike láthatóan lokalizálható. Ésszerűnek látszik feltenni, hogy ez a definíció megfelel az egész rendszer tömegközéppontjának.

Felmerülhet a kérdés még az elemi részecskék esetében is, vajon a lokalizált állapotok s a helyoperátorok meghatározásának van-e különösebb értelme. Ilyen kétségeink különös erővel támadhatnak, ha hajlunk a vélekedésre, hogy az elmélet jövő alakja az ütközési mátrix segítségével nyer majd megfogalmazást. Nem szabad elfelejtenünk azonban, hogy ennek az elméletnek a szokásos kifejtése csupán a hatáskeresztmetszeteket illető kérdésekre vonatkozik. Fel lehet azonban tenni a további érdekes kérdések egész sorát, melyek a szórt részecskék helyére vonatkoznak: mennyivel vannak lemaradva (azaz: mennyivel vannak közelebb a szórócentrumhoz) ahhoz képest, mint ha a szórócentrumhoz érkezve útjukat késlekedés nélkül folytatnák az új irányban.<sup>15</sup> Ahhoz, hogy az ilyen kérdésekre a relativisztikus tartományban választ adhassunk, szükségünk lesz az elemi rendszerek lokalizált állapotainak valamilyen definíciójára. Ebből a szempontból kielégítő, hogy a lokalizált állapotokat éppen az ezekre a rendszerekre vonatkozóan egyértelműen lehetett definiálni.

Fordította: Györgyi Géza

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
KÖNYVTÁRA

<sup>15</sup> L. Eisenbud, Princeton Dissertation (1948).



## KÖNYVISMERTETÉS

Planck's Original Papers in Quantum Physics,  
German and English edition. Annotated by Hans Kangro. Translated by D. ter Haar  
and Stephen G. Brush. Taylor and Francis, London, 1972

Ez a könyvecske, mely Max Planck két alapvető kvantumfizikai dolgozatát közli, új sorozatot indít el, amely a „Classic Papers in Physics” címet viseli.

Egy ilyen sorozat jelentőségének méltatására éppen a Magyar Fizikai Folyóirat olvasói előtt felesleges szót vesztegetni. „A klasszikus irodalomból” című rovatunk egyidős a lappal s azt immár több, mint két évtizeden át az olvasók élénk érdeklődése kíséri. E rovat Planck fent említett két dolgozata közül „A normálspektrum energiaeloszlási törvényéről” címűt már 1954-ben közölte magyar nyelven (Magy. Fiz. Foly. 2. kötet, 4. sz., 347. lap). Ugyancsak megtalálható ezen munka magyar fordítása a Fényes Imre szerkesztésében megjelent, „A kvantummechanika kalsszikusai” c. kötetben (Gondolat, 1966), mely ezenkívül a másik említett Planck-dolgozatot („A Wien-féle eloszlási törvény módosításáról”) is közli.

Az 1970-ben megrendezett „International Working Seminar on the Role of the History of Physics in Physics Education” alkalmából született meg a gondolat, hogy Max Planck 1900-ban frott két korszakalkotó kvantumelméleti dolgozatát német eredetiben, valamint angol fordításban, az oktatás céljaira kis könyvecske alakjában közzétegyék. Az angol fordítás szövegét Dirk ter Haar „The Old Quantum Theory” című kötetéből vették át (Pergamon Press, 1967). A szakszerű történeti bevezető, a részletes jegyzetanyag és az igen hasznos irodalomjegyzék összeállítása Hans Kangro munkája. Érdekes magyar vonatkozás, hogy a Planck előtt használatos energiaeloszlási függvények között Kangro megemlíti a Kövesligethy—Radó által javasolt függvényt is; vele a Planck-törvény előtörténetét tárgyaló könyvében külön is foglalkozik.

Györgyi Géza

Sakae Takeuchi: The Properties of Liquid Metals.  
Proceedings of the Second International Conference held at Tokyo, Japan.  
September 1972

1966-ban Brookhavenben tartották a Properties of Liquid Metals első konferenciáját. Az 1972-ben Tokióban rendezett másodikon tartott előadásokat, illetőleg megbeszéléseket tartalmazza ez a kötet. Az anyag öt részre oszlik: A folyékony fémek és ötvözetek szerkezete; elektronállapotok és elektrontranszport tulajdonságok; termodinamikai sajátságok; atomtranszport tulajdonságok és olvadási jelenségek. Brookhavenben viszonylag még kevés kísérleti adatot közöltek és szinte teljesen a viszonylag alacsony olvadáspontú fémekkel foglalkoztak. Így a közel szabad elektron formula még elég jó adatokat nyújtott pl. a termoelektromos tulajdonságokkal, az ellenállás hő- és térfogati együtthatójával kapcsolatban. Brookhavenben a folyékony átmeneti fémek sajátságait szintén elhanyagolták. A tokiói konferencia megmutatta, hogy az elmúlt 6 év alatt e téren a tudomány nagyot haladt, de sok nehezen megvalósítható kísérleti és elméleti munka vár még az e terület kutatóira. (T. Gy.)



Technikai szerkesztő: Turchányi György  
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő : Sós Attila  
A kézirat beérkezett: 1973. július 10. — Terjedelem: 8,75 (A/5) ív  
74-3239 — Szegedi Nyomda



A MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK  
**KÖZLEMÉNYEI**

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,  
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.



## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Sasvári László: Másodrendű szerkezeti átalakulások</i> .....	1
<i>Károlyházy Frigyes: Gravitáció és makroszkopikus testek kvantummechanikája</i> .....	23

## A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>T. D. Newton és Wigner Jenő: Elemi rendszerek lokalizált állapotai</i> .....	87
---	----

## KÖNYVISMERTETÉS

<i>D. ter Haar and Stephen G. Brush: Planck's Original Papers in Quantum Physics (Györgyi Géza)</i> .....	99
<i>S. Takeuchi: The Properties of Liquid Metals (T. Gy.)</i> .....	99



307.226

W.

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

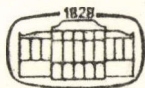
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,  
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR  
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI  
JÁNOSSY LAJOS

XXII. KÖTET

2. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ  
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST 1974



# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klaszszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10–10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratból évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus  
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út  
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölik. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.



# IONIZÁCIÓS FRONTOK VIZSGÁLATA AZ INTERSZTELLÁRIS MÁGNESES TÉR FIGYELEMBEVÉTELÉVEL\*

SZABADOS LÁSZLÓ

ELTE Csillagászati Tanszék, Budapest\*\*

Az ionizációs front fogalmának tisztázása után az ionizációs frontok osztályozására kerül sor, mind a mágneses, mind a nem mágneses frontokra vonatkozóan. Amíg ez utóbbiak osztályozását már régebben kidolgozták [3], a mágneses ionizációs frontokat ilyen szempontból még nem vizsgálták. Az erre vonatkozó jelenlegi számolások alapján kimutatható, hogy mágneses tér jelenlétekor az ionizációs frontok osztályozása nem változik, de a front tér- és időbeli fejlődése módosul.

## BEVEZETÉS

A csillagok közötti térben, főképpen a Tejútrendszer fősíkjában igen kis sűrűségű ( $0,1-1000$  atom/cm<sup>3</sup>) hidrogénfelhők vannak jelen. Aszerint, hogy a felhőt alkotó hidrogén semleges vagy ionizált, a felhőt HI, ill. HII zónának nevezzük. A HII zónák kinetikus hőmérséklete  $10^4$  °K, a HI zónáké  $100$  °K körül van. A megfigyelések szerint a HII zónák belsejében rendszerint legalább egy fiatal, forró, O vagy B színképtípusú csillag található. A semleges és ionizált hidrogénfelhő közti határ igen éles, és a közegre jellemző hangsebesség nagyságrendjébe eső sebességgel terjed úgy, hogy a HII zóna mérete nő.

Az iménti tények a következő folyamatra vezethetők vissza. A forró csillag, mely kezdetben semleges hidrogénfelhőbe van beágyazva, erősen sugároz az ultraibolya színképtartományban. A csillag által kibocsátott,  $13,59$  eV-nál nagyobb energiájú fotonok képesek ionizálni egy-egy hidrogénatomot. Így a csillag körül egy ionizált hidrogénből álló tartomány alakul ki. Az ionizáció után megmaradt fotonenergia a HII zóna melegítésére fordítódik. Ha a csillag körül már kialakult egy HII zóna, az az ultraibolya sugárzást már átengedi, így sor kerülhet a csillagtól távolabb levő hidrogén ionizációjára is, az ionizáció határa egyre jobban terjed kifelé [7]. A semleges és ionizált hidrogénfelhő határa az ún. ionizációs front (praktikus rövidítéssel IF). Az IF lökéshullám frontjának fogható fel, mert igen vékony a hidrogénfelhők méretéhez képest, nagy sebességgel terjed, és két oldalán a sebesség, valamint a termodinamikai paraméterek (hőmérséklet, nyomás) ugrást szenvednek.

A Tejútrendszerben, mint azt az utóbbi években kimutatták, mágneses tér is van jelen. A mágneses tér kimutatására szolgáló módszerek nem túl pontosak, csupán nagyságrendi becslést adnak, azonban mindegyik módszerrel azonos nagyságrendűnek adódott a Tejútrendszer általános mágneses terének nagysága [5]. Ga-

\* Érkezett 1973. febr. 10.

\*\* Jelenlegi cím: MTA Csillagvizsgáló Intézete, Budapest



laxisunk mágneses terének térerőssége  $10^{-5}$ – $10^{-6}$  gauss, és az erővonalak nagyjából párhuzamosak a Tejútrendszer fősíkjával. (Az intersztelláris térben a kis anyag-sűrűség miatt a mágneses indukció és a mágneses térerősség gyakorlatilag egyenlő. Ezért a térerősséget is indukcióegységben szokták megadni.) A nagyméretű és kis sűrűségű intersztelláris hidrogénfelhőkben még ez a kis mágneses tér is számottevő hatást okoz.

Mágneses térben a gáznyomáson kívül mágneses nyomás is fellép. Értéke  $H^2/8\pi$ , ahol  $H$  a mágneses térerősség abszolút értéke. Az igen nagy elektromos vezetőképesség miatt a magnetohidrodinamika speciális jelensége is fellép: a mágneses tér befagy az anyagba, amit a következő egyenlettel foglalhatunk matematikai formába:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\varrho} \right) = \left( \frac{H}{\varrho} \nabla \right) v, \quad (1)$$

ahol  $\varrho$  a közeg sűrűsége,  $v$  a sebessége. Ha az ionizációs frontnak csak a Tejútrendszer szimmetriasíkjára merőleges terjedését vizsgáljuk:

$$\frac{H}{\varrho} = \text{const} = b. \quad (2)$$

Az ionizációs frontot keltő lökéshullámok a közegbeli hangsebesség nagyságrendjébe eső sebességgel terjednek. A hangsebesség:

$$c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s}, \quad (3)$$

ahol  $p$  a nyomás, az  $s$  index pedig arra utal, hogy a differenciálásnál az entrópia konstansnak veendő. Mágneses térben a nyomás a gáznyomás és a mágneses nyomás összege (ha a sugárnyomást nem vesszük figyelembe), ezért az ún. effektív hangsebesség:

$$c_H = \sqrt{\left( \frac{\partial p_g}{\partial \varrho} \right)_s + \left( \frac{\partial p_m}{\partial \varrho} \right)_s} = \sqrt{c_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\varrho}} = \sqrt{c_0^2 + v_A^2}. \quad (4)$$

Itt  $c_0$  a hangsebesség mágneses tér nélkül,  $v_A$  az ún. Alfvén-hullám terjedési sebessége. A mágneses tér tehát mindig megnöveli a hangsebesség értékét, ezáltal megnehezíti a lökéshullámok létrejöttét.

## STACIONÁRIUS IONIZÁCIÓS FRONTOK

### 1. Alapegyenletek

A stacionárius lökéshullámok és ionizációs frontok néhány tulajdonságának tárgyalásához vegyünk fel olyan koordinátarendszert, melynek sebessége a lökéshullámfront sebességével egyezik meg, és a frontnak tangenciális sebessége se legyen. Ebben a koordinátarendszerben a lökéshullám nyugszik, és a gáz csak a lökéshullám frontjára merőleges sebességgel rendelkezik.



Ebben a vonatkoztatási rendszerben a tömeg-, az impulzus- és az energiamegmaradás tételei a stacionaritás figyelembevételével a következő alakot öltik [4]

$$\varrho \cdot u = J_m = \text{const.} \quad (5)$$

$$p_g + \frac{H^2}{8\pi} + \varrho \cdot u^2 = \text{const.} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_g}{\varrho} + \frac{H^2}{4\pi\varrho} = \text{const.} \quad (7)$$

Ezekben az összefüggésekben  $u$  a lökeshullám frontjára merőleges gázsebesség,  $\gamma$  a  $\frac{c_p}{c_v}$  fajhőhányados.

Válasszunk ki a lökésfront két oldalán egy-egy felületet úgy, hogy a fizikai paraméterek összes változása ezen két felület között menjen végbe. Alkalmazzuk a megmaradási tételeket egy speciális lökeshullám, az IF két kontrollfelületére! Az  $_1$  index az ionizációs front előtti, a  $_2$  a front mögötti állapotra utal.

$$\varrho_1 \cdot u_1 = \varrho_2 \cdot u_2 = J_m, \quad (8)$$

$$p_{g1} + \frac{H_1^2}{8\pi} + \varrho_1 \cdot u_1^2 = p_{g2} + \frac{H_2^2}{8\pi} + \varrho_2 \cdot u_2^2, \quad (9)$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \cdot \frac{p_{g1}}{\varrho_1} + \frac{H_1^2}{4\pi\varrho_1} + \frac{u_1^2}{2} + \frac{Q^2}{2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \cdot \frac{p_{g2}}{\varrho_2} + \frac{H_2^2}{4\pi\varrho_2} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (10)$$

Ez utóbbi egyenletben a  $\frac{Q^2}{2}$  mennyiség annak a tömegegységenkénti energiának felel meg, ami az ionizáló foton energiájából a hidrogén ionizációja után megmarad, azaz a front mögötti oldal energiáját növeli.

Mágneses tér jelenlétekor még egy egyenlet szükséges, a már korábban említett befagyási egyenlet.

$$\frac{H_1}{\varrho_1} = \frac{H_2}{\varrho_2} = b = \text{const.} \quad (11)$$

A befagyási egyenlet ilyen alakban csak akkor érvényes, ha a  $H$  vektor párhuzamos a front síkjával. Egyébként ún. ferde lökeshullám alakul ki, amelyben tangenciális impulzusáram is fellép. A (11) egyenlet a Tejútrendszer fősíkjára merőlegesen terjedő ionizált gázfelhő esetén igaz, mivel galaxisunkban a mágneses tér iránya egybeesik a fősíkbeli galaxisok irányával.

Semleges és ionizált hidrogénre  $\gamma = \frac{5}{3}$ . (Részben ionizált hidrogénfelhőre  $\gamma$  értéke mindig kisebb  $5/3$ -nál.) Ennek figyelembevételével a (8)–(10) egyenletekből algebrai átalakítások révén a következő összefüggés vezethető le:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{4p_{g2} + p_{g1} + 3p_{m2} + p_{m1}}{4p_{g1} + p_{g2} + 3p_{m1} + p_{m2}} - \frac{Q^2}{V_2} \cdot \frac{1}{4p_{g1} + p_{g2} + 3p_{m1} + p_{m2}}. \quad (12)$$

Itt  $V$ -vel a fajtérfogatot jelöljük. Nézzük meg (12) néhány speciális esetét:



a) Ha nincs maradékegyergia az ionizációnál ( $Q=0$ ) és nincs mágneses tér ( $H=0$ ):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4p_{g2} + p_{g1}}{4p_{g1} + p_{g2}}. \quad (13)$$

Ez a közönséges lökeshullámokra vonatkozó egyik alapösszefüggés. Erős lökeshullámra, vagyis, ha  $p_{g2} \gg p_{g1}$ , akkor  $Q_2 = 4Q_1$ . Tehát a sűrűség ugrása korlátozott. A sűrűséghányados értéke abban az esetben nőhet 4 fölé, ha a lökésfront mögötti gáz a saját energiájából ionizálódik, vagy energiát sugároz ki. Ezeket az eseteket itt nem tárgyaljuk.

b)  $Q=0$ ;  $H \neq 0$ . Ekkor

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4p_{g2} + p_{g1} + 3p_{m2} + p_{m1}}{4p_{g1} + p_{g2} + 3p_{m1} + p_{m2}}. \quad (14)$$

Ha a mágneses nyomás sokkal nagyobb a gáznyomásnál, a (14) egyenlet így módosul:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{3p_{m2} + p_{m1}}{3p_{m1} + p_{m2}}. \quad (15)$$

$H_2 \gg H_1$  esetén  $Q_2/Q_1 = 3$  lenne. Ekkor azonban a befagyás miatt  $H_2$  is csak háromszorosa lehet  $H_1$ -nek. Erős mágneses lökeshullám tehát nem létezhet. Sőt, a (15) összefüggés

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{3Q_2^2 + Q_1^2}{3Q_1^2 + Q_2^2}$$

alakra történő átalakításából kimutatható, hogy csak  $Q_2 = Q_1$  a megoldás. Ekkor viszont  $H_1 = H_2$ , azaz a nyomások is megegyeznek (ha a gáznyomás kicsi), tehát lökeshullám ki sem alakulhat! Ha a gáznyomás nem hanyagolható el a mágneses nyomás mellett, a sűrűséghányados nemcsak 4-nél kisebb, hanem kisebb a (13) által adott értéknél is.

c) Ha  $Q \neq 0$ , (12) érvényes. Mivel a  $Q$ -t tartalmazó tag egyik tényezője sem negatív, a levonásra kerülő tag csökkenti a sűrűséghányadost. Ezért  $Q_2 < 4Q_1$ , sőt  $Q_2/Q_1 < 1$  is megvalósulhat, csupán annyi megszorítást kell tenni, hogy a sűrűséghányados negatívvá nem válhat.

## 2. Az ionizációs frontok Kahn-féle osztályozása

A mágneses tér nélküli ionizációs frontokat különböző típusokba lehet sorolni [3]. A (8)–(10) egyenletekből indulunk ki, a mágneses térerősséget tartalmazó tagokat elhagyjuk:

$$Q_1 \cdot u_1 = Q_2 \cdot u_2 = J_m, \quad (8a)$$

$$p_{g1} + Q_1 \cdot u_1^2 = p_{g2} + Q_2 \cdot u_2^2 \quad (9a)$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{p_{g1}}{Q_1} + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} Q^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_{g2}}{Q_2} + \frac{1}{2} \cdot u_2^2. \quad (10a)$$



Legyen  $q_2 = \varepsilon \cdot q_1$ . Mivel  $c_0^2 = \gamma \cdot \frac{P_g}{Q}$ , a (10a) egyenlet így alakítható át:

$$(3c_{01}^2 + u_1^2 + Q^2) \cdot \varepsilon^2 - (3c_{01}^2 + 5u_1^2) \cdot \varepsilon + 4u_1^2 = 0. \quad (16)$$

Megoldásként csak a pozitív  $\varepsilon$ -ok jöhetnek számításba. Ezért (16) diszkriminánsára a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$(3c_{01}^2 + 5u_1^2)^2 \geq 16u_1^2 \cdot (3c_{01}^2 + u_1^2 + Q^2). \quad (17)$$

Ezt átalakítva a következő két megoldást kapjuk:

$$u_1 \geq u_R = \frac{1}{3}(2Q + \sqrt{4Q^2 + 9c_{01}^2}), \quad (18)$$

$$u_1 \leq u_D = \frac{1}{3}(-2Q + \sqrt{4Q^2 + 9c_{01}^2}). \quad (19)$$

Tehát két kritikus sebességérték adódik, mely értékek által meghatározott sebesség-intervallumon kívül eső  $u_1$  sebességek esetén jöhet létre IF. Adott  $J_m$  tömegsűrűség-nél (8) alapján

$$q_R = \frac{J_m}{u_R} = \frac{3J_m}{2Q + \sqrt{4Q^2 + 9c_{01}^2}}, \quad (20)$$

$$q_D = \frac{J_m}{u_D} = \frac{3J_m}{-2Q + \sqrt{4Q^2 + 9c_{01}^2}} \quad (21)$$

a két kritikus sűrűségérték.

A  $D$  és  $R$  indexek használatának megértéséhez tekintsük a következő példákat!

Ha az intersztelláris felhőben elhelyezkedő csillag nem tartalmaz elég sok ionizáló fotont:

$$J_f \cdot M = J_m \leq J_{mD}.$$

( $J_f$  a fotonáramsűrűség,  $M$  a hidrogénatom tömege), az ionizációs front csak lassan tud kifelé haladni a gázban. Ugyanez az eset valósul meg akkor is, ha a gerjesztő csillag adott fluxusú, de a csillag körül sűrű a gázfelhő. Ilyenkor az IF szintén csak lassan tud haladni:  $u_1 < u_D$  ha  $q_1 > \frac{J_m}{u_D}$ . Ez a sűrű felhőnek megfelelő eset, az angol

„dense” szó kezdőbetűjével a  $D$ -típusú IF. Hasonlóképpen, ha adott fotonfluxus esetén a gázfelhő sűrűsége egy bizonyos érték alatt marad, gyorsan terjedő IF alakul ki. Az ilyen, ritka gázfelhőben terjedő IF az  $R$ -típusú, az angol „rarefied” szó kezdőbetűje alapján. Ha a gázfelhő kezdeti sűrűsége  $q_R < q_1 < q_D$ , ez megfelelhetne egy  $M$ -típusú („median”) ionizációs frontnak. (17)-ből látszik, hogy ez nem jöhet létre. Ilyenkor az történik, hogy lökéshullám keletkezik, melynek frontja mögött megnő a sűrűség, és ebben a sűrűbb gázban már ki tud alakulni egy  $D$ -típusú IF. A  $q_R$ , ill.  $q_D$  sűrűségű gázban haladó ionizációs frontok a kritikus  $R$ -, ill. kritikus  $D$ -típusúak.

Az  $R$ -típusú ionizációs frontok a semleges hidrogénhez képest szuperszonikus (a közegbeli hangsebességnél nagyobb) sebességgel haladnak. (18)-ból ugyanis  $u_1 \geq u_R > c_{01}$ . Hasonlóan, (19)-et vizsgálva:  $u_1 \leq u_D < c_{01}$ , vagyis a  $D$ -típusú ionizációs frontok a semleges hidrogénhez képest szubszonikus (a hang terjedési sebességénél kisebb) sebességgel terjednek.



Vizsgáljuk meg azt is, hogyan halad az IF a mögötte levő, ionizált gázhoz képest! Kritikus frontok esetén (16) két egybeeső megoldást ad, adott  $q_1$  esetén  $q_2$  csak egyféle lehet. Az  $R$ - és  $D$ -típusú frontokra (16) két-két megoldást ad, tehát ilyenkor kétféle  $q_2$  is kialakulhat. Az általánosság megszorítása nélkül ez utóbbi esetben fel lehet tenni, hogy  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  a két gyök nagyság illetően. (Itt az  $_1$  és  $_2$  index csupán sorszám.) Belátjuk, hogy az  $\varepsilon_1$ -nek megfelelő  $q_2$  esetén az IF mozgása szubszonikus a front mögötti gázhoz képest, míg  $\varepsilon_2$ -nek az ionizációs frontnak az ionizált gázhoz viszonyított szuperszonikus mozgása felel meg. (9a)-ból ugyanis:

$$\frac{p_{q1}}{q_1} + u_1^2 = \varepsilon \cdot \left( \frac{p_{q2}}{q_2} + u_2^2 \right),$$

vagyis

$$3c_{01}^2 + 5u_1^2 = \varepsilon \cdot (3c_{02}^2 + 5u_2^2). \quad (22)$$

Mármint  $c_{02} > u_2$ , azaz a relatív mozgás szubszonikus, ha

$$\varepsilon > \frac{8u_1^2}{3c_{01}^2 + 5u_1^2}. \quad (23)$$

Most már csak azt kell megmutatni, hogy (23)  $\varepsilon = \varepsilon_1$  esetén teljesül. Ezért képezzük  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$  harmonikus közepét:

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \right]^{-1} = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{8u_1^2}{3c_{01}^2 + 5u_1^2}. \quad (24)$$

Mivel  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , így  $\varepsilon_1$  nyilván nagyobb  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$  harmonikus közepénél is, vagyis

$$\varepsilon_1 > \frac{8u_1^2}{3c_{01}^2 + 5u_1^2}. \quad (25)$$

Ez már bizonyítja, hogy  $\varepsilon = \varepsilon_1$  esetén az IF mozgása az ionizált gázhoz képest szubszonikus lesz. Hasonlóan látható be, hogy  $\varepsilon = \varepsilon_2$  esetén az IF a háta mögött levő gázhoz képest szuperszonikusan mozog.

Az IF mögötti gázhoz képest szubszonikusan mozgó frontok a  $wD$ - és  $sR$ -típusúak, míg a szuperszonikusan mozgók a  $wR$ - és  $sD$ -típusúak. A  $w$  a „weak” (=gyenge), az  $s$  a „strong” (=erős) szó kezdőbetűje. A  $w$  és  $s$  alosztályok arra utalnak, hogy van-e jelentős sebességváltozás az IF áthaladásakor a gázban. Erős az IF, ha a gáz sebessége a fronthoz képest a front áthaladásakor szuperszonikusból szubszonikusba vagy éppen fordítva megy át. Gyenge az IF, ha az előtte levő gázhoz képest ugyanolyan jellegű a sebessége, mint a mögötte levőhöz viszonyítva. Természetesen figyelembe kell venni azt is, hogy az IF két oldalán más a hangsebesség nagysága. A kritikus ionizációs frontok éppen hangsebességgel mozognak a mögöttük levő gázhoz viszonyítva.

### 3. Ionizációs frontok mágneses térben

A nem-mágneses ionizációs frontoknál ismertetett eljárást követve a (8)–(10) egyenletekből  $\varepsilon$  bevezetésével a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{2} v_{A1}^2 \varepsilon^3 + (Q^2 + u_1^2 - v_{A1}^2 + 3c_{H1}^2) \varepsilon^2 - (3c_{H1}^2 + 5u_1^2 - \frac{1}{2} v_{A1}^2) \varepsilon + 4u_1^2 = 0. \quad (26)$$



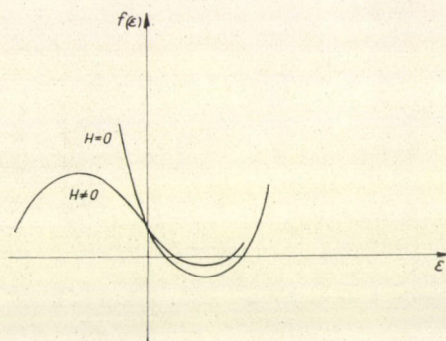
A mágneses teret nem tartalmazó (16) egyenlet  $\varepsilon$ -ra nézve csak másodfokú volt, (26) már harmadfokú. A fokszámbeli növekedés a befagyás következménye. Vizsgáljuk meg a (26) bal oldalán álló függvényt!

- Ha  $\varepsilon \rightarrow -\infty$ , a függvény értéke  $-\infty$ -hez tart.
- $\varepsilon=0$  esetén a függvény értéke pozitív.
- Ha  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , a függvény értéke  $\infty$ -hez tart.
- A függvény  $\varepsilon$  szerinti deriváltjának gyökei lesznek a szélsőértékhelyek.

A két szélsőérték helye:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{3v_{A1}^2} \cdot \left[ -2(Q^2 + u_1^2 - v_{A1}^2 + 3e_{H1}^2) \pm \sqrt{4(Q^2 + u_1^2 - v_{A1}^2 + 3e_{H1}^2) + 6v_{A1}^2 \left( 3c_{H1}^2 + 5u_1^2 - \frac{1}{2}v_{A1}^2 \right)} \right]. \quad (27)$$

Látható, hogy a négyzetgyök értéke nagyobb, mint a szögletes zárójelen belüli másik tag értéke. Így a  $\pm$  előjelek közül a  $+$  választásakor pozitív szélsőértéket kapunk, míg a negatív előjel feltétlenül negatív szélsőértékhelyet eredményez. Az a) és c) megállapítások miatt a negatív szélsőértékhely csak maximumhely lehet, míg a pozitív szélsőértékhely kizárólag minimumhely. Továbbra is csak a pozitív  $\varepsilon$ -okkal foglalkozunk, mivel csak ezek rendelkeznek fizikai tartalommal. Márpedig a pozitív  $\varepsilon$ -ok tartományára ez a harmadfokú függvény ugyanolyan menetű, mint a (16) bal oldalán álló Kahn-féle másodfokú függvény (l. az 1. ábrát). A b) és c) megállapítások mindkét függvényre érvényesek, és  $\varepsilon$  pozitív értékeire mindkét függvénynek egy lokális minimuma van. Így a mágneses inonizációs frontok is  $R$ - és  $D$ -típusba csoportosíthatók a kritikus tömegsűrűségek és fotonáramsűrűségek alapján, és a kritikus értékek közötti tartományban nem lehetséges IF kialakulása. A kritikus értékek meghatározása azonban



1. ábra Az IF típusainak meghatározására szolgáló függvények

nagy nehézségekbe ütközik.

Reális ionizációs frontra (26)-nak két pozitív gyököt kell adnia, melyek esetleg egybeesnek. Ekkor a harmadik gyök nyilvánvalóan negatív, hiszen komplex gyök esetén annak konjugáltja is gyök lenne. Tehát IF létrejötte csak három valós gyök esetén lehetséges. Egy

$$a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0 \quad (28)$$

alakú harmadfokú egyenletnek akkor van három valós gyöke, ha az együtthatóiból alkotott  $D$  diszkrimináns negatív:

$$D = -\frac{a_2^2 a_3^2}{108 a_1^4} + \frac{a_4^2}{4 a_1^3} + \frac{a_2^3 \cdot a_4}{27 a_1^4} - \frac{a_2 a_3 a_4}{6 a_1^3} + \frac{a_3^3}{27 a_1^3}. \quad (29)$$



A (26) egyenlet megfelelő együtthatóit a (29) formulába belyettesítve, a  $D < 0$  feltételből kell meghatározni  $u_1$  azon értékeit, amelyekre ez a feltétel teljesül.

$$\begin{aligned}
 D = & -9u_1^8 - (63v_{A1}^2 + 2Q^2 + 36c_{H1}^2) \cdot u_1^6 + (23Q^4 - \frac{9}{4}v_{A1}^4 - 18c_{H1}^4 - \\
 & - 441 \cdot v_{A1}^2 \cdot c_{H1}^2 + 240v_{A1}^2Q^2 - 210 \cdot Q^2 \cdot c_{H1}^2) \cdot u_1^4 + \\
 & - (-43v_{A1}^2 \cdot Q^4 + 114Q \cdot c_{H1}^2 - \frac{171}{2} \cdot v_{A1}^4 \cdot c_{H1}^2 - 117v_{A1}^2 \cdot c_{H1}^4 + 108c_{H1}^6 + \\
 & + 270Q^2 \cdot c_{H1}^4 + 204 \cdot v_{A1}^2Q^2 \cdot c_{H1}^2 + \frac{39}{2} \cdot v_{A1}^4 \cdot Q^2 + 16 \cdot Q^6) \cdot u_1^2 - \\
 & - \left( \frac{9}{4}v_{A1}^4 \cdot c_{H1}^4 + \frac{1}{4}v_{A1}^4 \cdot Q^4 + 9Q^4 \cdot c_{H1}^4 - 3v_{A1}^2 \cdot Q^4 \cdot c_{H1}^2 + 81c_{H1}^8 - 27v_{A1}^2c_{H1}^6 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}v_{A1}^6 \cdot Q^2 - 36v_{A1}^2 \cdot Q^2 \cdot c_{H1}^4 + \frac{15}{2} \cdot v_{A1}^4 \cdot Q^2 \cdot c_{H1}^2 + 540 \cdot Q^2 \cdot c_{H1}^6 \right) < 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

A kritikus ionizációs frontok paramétereit a diszkrimináns bonyolult alakja miatt nem lehet zárt alakban megadni. A  $D$  diszkrimináns  $u_1^2$  negyedfokú függvénye. E függvény vizsgálata is néhány értékes információt szolgáltat. Be lehet látni, hogy legfeljebb két pozitív gyöke lehet, és a fizikai szempontból fontos pozitív  $u_1^2$ -ek tartományában a függvény ugyanúgy viselkedik, mint a (17) egyenlőtlenségben az  $u_1^2$  második hatványát tartalmazó függvény. A gondolatmenet teljes részletezése helyett ragadjuk ki csak az  $u_1^0$  együtthatóját. Belátható, hogy (30)-ban  $u_1^0$  együtthatója pozitív, azaz a függvény értéke  $u_1^2=0$  esetén ugyanolyan előjelű, mint (17)-ben. A konstans tag együtthatója ugyanis azonos átalakítások révén a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{3}{2}v_{A1}^2 \cdot c_{H1}^2 - 9c_{H1}^4 \right)^2 + Q^4 \cdot \left( 3c_{H1}^2 - \frac{1}{2}v_{A1}^2 \right)^2 + \\
 & + Q^2 \cdot (3c_{H1}^2 - v_{A1}^2)^3 + (3c_{H1}^2 - v_{A1}^2) \cdot \left( 9c_{H1}^2 - \frac{1}{2}v_{A1}^2 \right) > 0,
 \end{aligned} \tag{31}$$

mivel mind a négy összeadandó pozitív. Itt fel kell használni, hogy  $c_{H1}^2 > v_{A1}^2$ , ami (4)-ből rögtön következik. A függvény egyéb tulajdonságainak megállapítása szintén hosszú számolást igényel. A (30) diszkriminánsfüggvény  $u_1^2$  szerinti differenciálhányadosai alapján belátható, hogy nulla vagy két (esetleg egybeeső) gyöke van  $D$ -nek a pozitív  $u_1^2$  tengelyen. Tehát a mágneses ionizációs frontokat a nem-mágnesesekhez hasonlóan lehet osztályozni.

A kritikus ionizációs frontok paramétereiről csak annyit lehet megállapítani, hogy az e paraméterekre vonatkozó feltételekben  $Q^2$ ,  $c_{H1}^2$  és  $v_{A1}^2$  irracionális törtkifejezései szerepelnek.



# NEMSTACIONÁRIUS IONIZÁCIÓS FRONTOK

Az előzőekben vizsgált IF-modell csak rövid időtartamra (10–100 évre) közelíti meg a valóságot. Az IF ugyanis nemstacionárius jelenség, mivel a fotonáramsűrűség értéke a frontnál állandóan változik. (Azonban ez a változás lassú, ezért tekinthető rövid időre mégis stacionáriusnak az IF.)

A fotonáramsűrűség változásának több oka van, nevezetesen:

1. A HII zónában levő hidrogénionok nem maradnak örökké ionizált állapotban. A leszakadt elektronok, melyek szintén a HII zóna alkotórészei, a protonokkal kölcsönhatásba lépve ismét semleges hidrogénatomokat képeznek. Ez az ún. rekombinációs folyamat csak bizonyos valószínűséggel következik be. A rekombináció révén felszabaduló energia egy fotont hoz létre. Ha a szabad elektron a legbelső elektronpályára ugrik vissza, annyi energia szabadul fel, amennyi elegendő egy másik hidrogénatom ionizálásához. A rekombinációnak ez a fajtája nem jelent fluxuscsökkenést. Ha a rekombináció az elektronoknak második vagy még magasabb pályára való visszatéréseivel jön létre, a rekombináció során kisebb energiájú foton bocsátódik ki, mint amilyen az alapállapotú hidrogénatom ionizálásához szükséges. Ezt a fotont az IF már nem tudja felhasználni. Ugyanakkor az ionizált gázfelhő belsejében a rekombináció révén képződött hidrogénatom felhasznál egy fotont a csillag sugárzásából és újra ionizálódik.

A rekombináció valószínűsége minden proton-elektronpárra ugyanakkora. Így minél több van ezekből a részecskékből a csillag és az IF között, annál több fog rekombinálódni és újra ionizálódni, miközben ezáltal lecsökken az ionizációs fronthoz eljutó fotonok száma. A HII zónában található részek száma viszont nő az IF kifelé terjedésével. Bizonyos idő elteltével olyan állapot következik be, amikor minden, a csillagból érkező  $\chi_0 = 13,59$  eV-nál nagyobb energiájú foton elnyelődik, még mielőtt az ionizációs fronthoz érne. Ez akkor következik be, ha:

$$4\pi \cdot R_*^2 \cdot J_{f*} = \frac{4\pi}{3} \cdot R_{sk}^3 \cdot N^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n(T), \quad (32)$$

ahol  $R_*$  a csillag sugara,  $J_{f*}$  a csillag felszínének  $1 \text{ cm}^2$ -éről  $1$  másodperc alatt kibocsátott,  $\chi_0$ -nál nagyobb energiájú fotonok száma,  $N$  a felhő kezdeti atomszám sűrűsége, azaz a HII zónában  $N$  elektron és  $N$  proton van  $\text{cm}^3$ -ként. A HII zónát homogénnek tételezzük fel.  $R_{sk}$  annak a gömbnek a sugara, ahol először következik be az az állapot, hogy az IF nem kap foton-utánpótlást (kezdeti Strömgren-sugár),  $\beta_n$  az  $n$ -edfokú rekombinációs valószínűség. Az asztrofizikában a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \beta_n(T) = \beta \quad (33)$$

jelölést szokták használni.  $\beta$  a hidrogénre vonatkozó rekombinációs együttható. A számítások szerint [2]

$$\beta = 3 \cdot 10^{-10} \cdot T^{-\frac{3}{4}} \left[ \frac{\text{cm}^3}{s} \right]. \quad (34)$$



$\beta$  bevezetésével (32)-ből  $R_{sk}$  kifejezhető:

$$R_{sk} = \left( \frac{3 \cdot R_*^2 \cdot J_{f*}}{N^2 \cdot \beta} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (35)$$

A kezdeti Strömgren-gömb azonban nem egyensúlyi állapotot tükröz, így az IF mozgása  $R_{sk}$  elérésével még nem ér véget. Az ionizált gáz  $p_{g2} = 2N_2 \cdot k \cdot T_2$  nyomása sokkal nagyobb, mint a neutrális gáz  $p_{g1} = N_1 \cdot k \cdot T_1$  nyomása ( $k$  a Boltzmann-állandó). Ez abból következik, hogy  $T_2 \approx 10^4$  °K,  $T_1 \approx 100$  °K, míg  $N$  értéke a HI és a HII zónában ugyanolyan nagyságrendű. Ezért az IF kifelé terjedése addig folytatódik, amíg az ionizált gáz sűrűsége annyira lecsökken, hogy a hidrodinamikai egyensúly már fennáll a front két oldala között. Ez olyan  $N_2 = N_v$  végső sűrűségnél következik be, melyre

$$2N_v \cdot T_2 = N \cdot T_1, \quad (36)$$

vagyis a nyomás egyenlő az IF két oldalán. Ekkor az IF sugara  $R_{sv}$  (végső Strömgren-sugár):

$$R_{sv} = \left( \frac{3R_*^2 \cdot J_{f*}}{N_v^2 \cdot \beta} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (37)$$

(35) és (36) segítségével:

$$R_{sv} = \left( \frac{2T_2}{T_1} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot R_{sk} \approx 30R_{sk}. \quad (38)$$

Ez tehát az IF fejlődésének végső állomása.

2. A stacionaritás nemcsak a rekombináció miatt nem teljesül. A gömbszimmetrikus eset vizsgálatakor az IF kifelé haladása során az adott, másodpercenkénti  $4\pi R_*^2 \cdot J_{f*}$  fotonnak egyre nagyobb felületű réteget kell ionizálnia. A fotonszám adott mennyiség, az IF felülete egyre nő, következésképpen  $J_f$ , azaz a front 1 cm<sup>2</sup>-ére másodpercenként beeső fotonok száma egyre csökken.

3. A stacionaritás létrejötte ellen hat a gerjesztő csillag is. A csillagra jellemző  $J_{f*}$  ugyanis időben változó. Ez összefügg a csillag fejlődésével. Az a modell nyilvánvalóan nem kielégítő, amely szerint egy kész csillag hirtelen kezd el sugározni a HI zónában, hiszen az IF kialakulása és terjedése már a csillag fejlődésének igen korai stádiumában (a Kelvin—Helmholtz-kontrakció idején) megindul. A helyzet annyira összetetté válik, hogy pl. nagy tömegű csillag esetén a csillag még rá sem fejlődik a Hertzsprung—Russell-diagram fősorozatára, amikor körülötte a kezdeti Strömgren-gömb már kialakulhat [6].

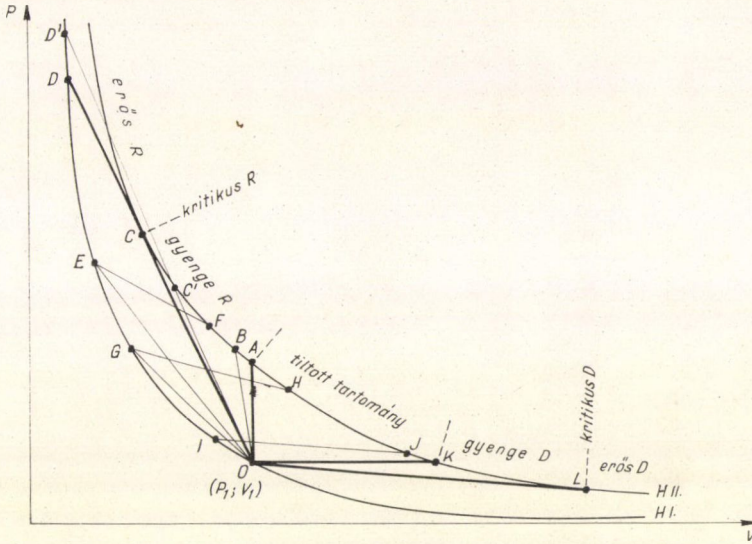
A most felsorolt tények azt eredményezik, hogy az IF típusa a fotonáramsűrűség változása miatt időben változik.

A következőkben egy tipikus IF fejlődési útját tekintjük végig. Elöljáróban le kell szögezni egy fontos tényt: a HI zóna és a HII zóna külön-külön izotermikus. Ha a gerjesztő csillag fejlődésétől eltekintünk, a csillag energiaspektruma állandó. Ezért az egy ionizáló fotonra jutó átlagos energia is állandó, ami a  $Q$  mennyiséget szabja meg.  $Q$  pedig arra az extra termikus energiára jellemző, amire az elektronok az ionizáció után szert tesznek. Bizonyos idő múlva az ion- és elektronhőmérséklet kiegyenlítődik, s ez az egyensúlyi hőmérséklet ugyanaz a csillagtól tetszőleges távol-



ságra levő IF mögött. Ez csak az  $R_{sk}$  elérése előtt igaz, mert csak addig teljes az ionizáció. A HI zónában a szén ionizációja (2,3 eV ionizációs potenciállal) hasonló módon alakítja ki a hőmérsékletet.

Az IF fejlődési útját jól lehet szemléltetni a nyomás-fajtérfogat-diagramon [6], mely a 2. ábrán látható. A koordinátatengelyekhez aszimptotikusan tartó két görbe



2. ábra. Egy ionizációs front fejlődési útja, a fejlődési sorrendet lásd a szövegben

a semleges (alsó görbe) és az ionizált (felső görbe) hidrogén izotermája. A két görbe egyenlete:

$$p_{g1} = \frac{c_{01}^2}{\gamma \cdot V_1}, \quad \text{ill.} \quad p_{g2} = \frac{c_{02}^2}{\gamma \cdot V_2}. \quad (39)$$

A mágneses tértől egyelőre eltekintünk. (8a)-ból és (9a)-ból a sebességek kiküszöbölésével a

$$p_2 - p_1 = -J_m^2 \cdot (V_2 - V_1) \quad (40)$$

egyenletet kapjuk. Az ionizációs frontnak a gázon történő áthaladása az ábrán úgy reprezentálható, hogy az alsó izoterma egy  $O(p_1; V_1)$  pontjából a gáz állapota egy negatív meredekségű egyenes pontjainak megfelelő állapotok során eljut a felső izoterma egy pontjának megfelelő állapotba.

Az A és K pontok közötti görbe szakasz pontjaiba csak pozitív meredekségű egyenes mentén juthatna el az O pontból a gáz állapota, ezért ez a tartomány tiltott. Mathews tévesen nyilvánítja ezt az M-típusú ionizációs frontok által létrehozott fiktív átmenetnek. Az A és K pontok közötti görbére O-ból csak képzetes fotonáramsűrűséggel lehetne egyenes mentén eljutni, ami fizikai képtelenség. Az M-típusú ionizációs frontoknak megfelelő meredekségű egyenesek által súrolt tartományt a 3. ábra szemlélteti.







ső Strömgren-sugarat és a nyomás az IF két oldalán már kiegyenlítődik. Az izotermikus közelítés azonban csak  $R_{sk}$  eléréséig használható. Ezért az  $\overline{OG}$  és  $\overline{GH}$  utáni állapotokat már nem mutatja helyesen az ábra. Ez pl. abban nyilvánul meg, hogy az ionizációs frontnál a fotonáramsűrűség akkor lesz nulla, ha a front két oldalán a nyomások kiegyenlítődnek. Ez pedig azt jelentené, hogy  $R_{sk} = R_{sv}$ , ami valójában nem igaz.

Az ionizációs frontok struktúrájának részletesebb vizsgálata [1] megmutatta, hogy erős  $D$ -típusú IF is lehetséges. Ekkor egy  $\overline{OD'}$  lökés előzi meg a  $\overline{D'C}$  ionizációs frontot. Ilyenkor a kritikus  $R$ -állapotot a front sohasem éri el.

Ha a felhő kezdeti sűrűsége sokkal nagyobb, mint a most vizsgált esetben, a  $(p_1; V_1)$  pont feljebb kerül a HI izotermán, közeledve a  $V=0$  tengelyhez. Látható, hogy ekkor gyenge  $R$ -típusú IF kialakulására nem nagyon kedvező a helyzet.

Ha a csillag fejlődését is figyelembe vesszük, mivel az IF már a csillag ultraibolya sugárzásának beindulásakor elkezdi fejlődni, a kezdeti kis fotonfluxus miatt a létrejött IF már eleve csak  $D$ -típusú lehet. (Viszont, ha a csillag fejlődését is figyelembe vesszük, a HII zóna már nem tekinthető izotermikusnak, így az IF fejlődését ekkor nem lehet a 2. ábrán bemutatni.)

## NEMSTACIONÁRIUS MÁGNESES IONIZÁCIÓS FRONTOK

A fejlődési utat továbbra is a nyomás-fajtérfogat-diagramon vizsgáljuk. A  $p$  össznyomás ezúttal a gáznyomás és a mágneses nyomás összege lesz.

$$p = p_g + p_m = \frac{c_0^2}{\gamma \cdot V} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{c_0^2}{\gamma \cdot V} + \frac{b^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{V^2}. \quad (41)$$

Az utóbbi alaknál már a befagyás is figyelembe van véve. A HI és a HII zónára külön felírható egy ilyen típusú egyenlet. (8) és (9) egyenletekből a sebesség kiküszöbölésével

$$p_2 - p_1 = -J_m^2 \cdot (V_2 - V_1) \quad (42)$$

adódik, ami formailag teljesen megegyezik a (40) egyenlettel, de itt a nyomásnak több összetevője van.

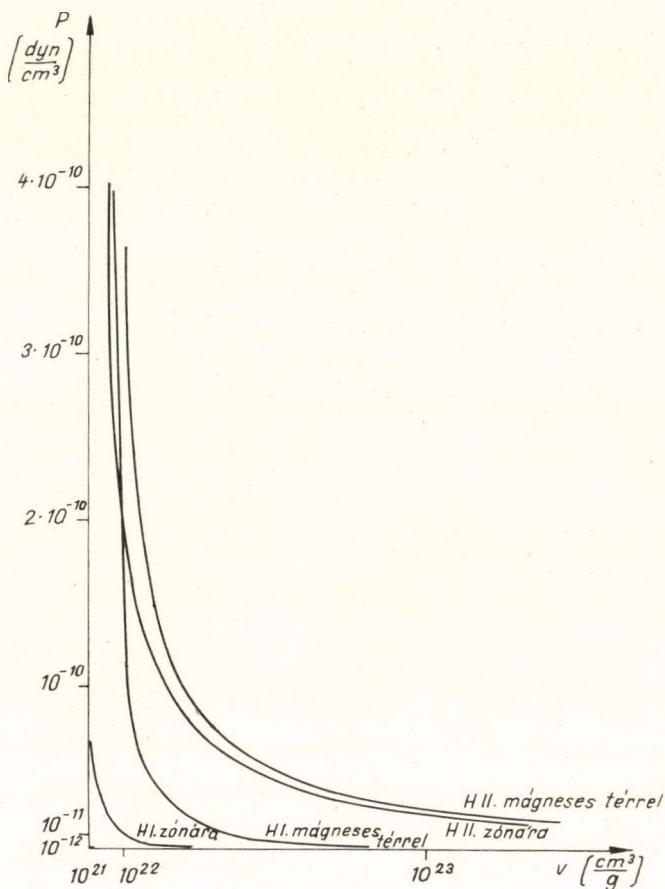
(42) azt a fontos tényt mutatja, hogy a nyomás-fajtérfogat-diagramon a mágneses ionizációs frontokat is egyenes reprezentálja, azonban a mágneses tér jelenléte miatt most (41) alakú izotermák között létesít átmenetet az IF. Azt, hogy (41) mennyire módosítja az izotermákat, jól szemlélteti a 4. ábra. (A számításoknál  $1 \text{ atom/cm}^3$  sűrűségű térben jelenlevő  $10^{-6}$  gauss erősségű mágneses tér volt a kiindulás.)

Látható, hogy az ilyen jelentéktelennek tűnő mágneses tér is milyen fontos hatású lehet. A HI zónában már  $1 \text{ atom/cm}^3$  sűrűségnél is  $p_m > p_g$ , a sűrűség növekedtével pedig a mágneses nyomás jobban nő, mint a gáznyomás. A HII zónában csak valamivel nagyobb atomszám-sűrűségnél válik jelentőssé a mágneses tér hatása, de  $100 \text{ atom/cm}^3$  sűrűségnél  $p_m$  és  $p_g$  már azonos nagyságrendű.

A 4. ábrán a 2. ábránál leírtakhoz hasonlóan végig lehet követni az ionizációs frontok fejlődési útját. A fejlődési sorrend nyilván azonos lesz az előzővel, ez a görbék alakjából következik. Azonban az egyes típusok fennállásának időtartamát tekintve változik a helyzet. A kis fajtérfogatok tartományában a  $V^{-2}$ -t tartal-



mazó mágneses tag miatt a HII zónára vonatkozó görbe gyorsabb növekedésbe kezd a  $V=0$  felé haladva. Ezért meredekebb lesz a  $(p_1; V_1)$  pontból húzott érintője. Ez azt jelenti, hogy már nagyobb fotonáramsűrűségnél bekövetkezik a kritikus  $R$ -állapot, mint a mágneses tér nélküli esetben. Figyelembe véve, hogy maga a  $(p_1; V_1)$  pont is feljebb kerül a  $V=V_1$  függőleges egyenes mentén, a kritikus  $R$ -állapotnak



4. ábra. A HI és HII zóna izotermáinak változása, ha mágneses tér is van

megfelelő érintő nem lesz sokkal meredekebb, mint a mágneses tér nélküli esetben. A  $(p_1; V_1)$  pontból a felső izotermához húzott másik érintőnél jobban megfigyelhetők a kritikus fotonáramsűrűségben bekövetkező változások. Az érintési pont abszcisszája ugyanis elég nagy ahhoz, hogy ott a mágneses tér hatása ne legyen számottevő. A  $(p_1; V_1)$  viszont felfelé tolódott, s ez most éppen olyan hatást gyakorol a kritikus  $D$ -típusú IF feltételére, hogy a megfelelő kritikus fotonáramsűrűség



nagyságrendekkel megnő. Ezek a megállapítások a következőkben számpéldák segítségével jobb alátámasztást nyernek.

A mágneses tér jelenléte tehát azt eredményezi, hogy az IF rövidebb ideig van gyenge  $R$ -állapotban. Lerövidül az erős  $D$ -állapot ideje is, és a gyenge  $D$ -típusú fronttá válás az IF fejlődésének korábbi szakaszában, vagyis a gerjesztő csillaghoz közelebb következik be, mint az mágneses tér nélkül történne.

Hogy pontosabb képünk legyen a kritikus állapotok bekövetkezéséről, különböző esetekre kiszámítottam a  $J_{fR}$  és  $J_{fD}$  kritikus fotonáramsűrűségeket.

Ha nincs mágneses tér, a

$$p = \frac{c_{02}^2}{\gamma \cdot V} \quad (43)$$

és

$$p - p_1 = -J_m^2 \cdot (V - V_1) \quad (44)$$

egyenletek által meghatározott görbék metszéspontjait kell kiszámítani. (43)-ból  $p$ -t (44)-be helyettesítve  $V$ -re nézve másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásai

$$V_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot J_m^2} \cdot \left[ p_1 - J_m^2 \cdot V_1 \pm \sqrt{(p_1 + J_m^2 \cdot V_1)^2 - 4 J_m^2 \cdot \frac{c_{02}^2}{\gamma}} \right]. \quad (45)$$

Mi az érintési pontot keressük, ekkor a két metszéspont egybeesik, azaz (45) diszkriminánsa 0. (39) figyelembevételével ez a következő egyenletet adja:

$$J_m^4 \cdot V_1^2 + J_m^2 \cdot \left( 2 \cdot \frac{c_{02}^2}{\gamma} - 4 \frac{c_{01}^2}{\gamma} \right) + p_1^2 = 0, \quad (46)$$

melyből a kritikus ionizációs frontoknak megfelelő tömegáramsűrűségek:

$$J_{mR} = \frac{1}{\gamma \cdot V_1^2} [2c_{02}^2 - c_{01}^2 + 2 \cdot \sqrt{c_{02}^4 - c_{02}^2 \cdot c_{01}^2}], \quad (47)$$

$$J_{mD} = \frac{1}{\gamma \cdot V_1^2} [2c_{02}^2 - c_{01}^2 - 2 \cdot \sqrt{c_{02}^4 - c_{02}^2 \cdot c_{01}^2}]. \quad (48)$$

Mágneses tér jelenlétekor hasonló módon, de a (41) összefüggésből kiindulva a

$$V^3 \cdot J_m^2 - V^2 \cdot (p_1 + J_m^2 \cdot V_1) + V \frac{c_{02}^2}{\gamma} + \frac{b^2}{8\pi} = 0 \quad (49)$$

egyenlet adódik. A kritikus IF itt is két egybeeső gyököt eredményez. Egy harmadfokú egyenlet mindhárom gyöke valós és ebből kettő egybeesik, ha az egyenlet diszkriminánsának értéke nulla. A diszkrimináns (29) alakjába helyettesítve (49) együtthatóit, majd rendezve  $J_m^2$  hatványai szerint, a diszkrimináns zérus volta így fejezhető ki:

$$\begin{aligned} J_m^6 \cdot \left( -\frac{b^2}{216 \cdot \pi} \cdot V_1^3 \right) + J_m^4 \cdot \left[ -\frac{c_{02}^4}{300} \cdot V_1^3 + \frac{b^2}{256\pi} - b^2 \cdot \left( \frac{p_1 V_1^2}{72\pi} - \frac{c_{02}^2 \cdot V_1}{80\pi} \right) \right] + \\ + J_m^2 \cdot \left[ -\frac{c_{02}^2}{150} \cdot p_1 \cdot V_1 + \frac{c_{02}^4}{125} - b^2 \left( \frac{p_1^2 \cdot V}{72\pi} - \frac{c_{02}^2 \cdot p_1}{80\pi} \right) \right] - \frac{c_{02}^4 \cdot p_1^2}{300} - \frac{b^2 \cdot p_1^3}{216 \cdot \pi}. \end{aligned} \quad (50)$$

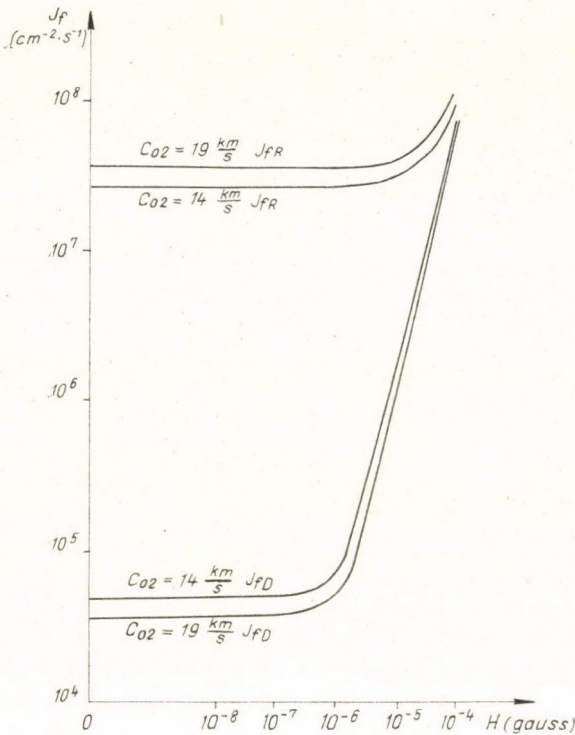


Ennek az egyenletnek egy speciális esete a (46), ahol is  $b=0$ . Az (50) egyenlet  $J_m^2$ -re harmadfokú, melynek legalább két valós, tehát három valós gyöke kell, hogy legyen. Két gyök ezek közül a  $J_{mR}^2$ -et és a  $J_{mD}^2$ -et adja, a harmadik  $J_m^2$  negatív lesz. Ez a negatív gyök (41) függvény ábrázolásakor a negatív fajtérfogatokra kiterjesztett görbe érintésének felel meg, melynek természetesen nincs fizikai jelentése.

(46)-ot és (50)-et néhány speciális esetre oldottam meg.  $V_1$ -et minden esetben  $5 \cdot 10^{22}$  CGS-nek választottam (kb. 10 hidrogénatom/cm<sup>3</sup>);  $c_{01}=1,2$  km/s;  $c_{02}=14$  km/s

ill. 19 km/s. (46) megoldásánál  $b=0$ , míg (50)-nél  $b$  értékei olyanok, hogy a választott  $V_1$ -nél rendre  $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  és  $10^{-4}$  gauss mágneses térerősségeknek felelnek meg. Az eredmény az 5. ábrán található meg. Az ábrából kitűnik, hogy a  $J_{fR}$  (így a  $J_{mR}$  is), ha kevésbé is, de növekszik a mágneses térerősség növekedtével, azaz a front sebessége a mögötte levő gázhoz képest gyorsabban csökken le a hangsebességre mágneses térben.

Még szembeutóbb a változás, ha  $J_{fD}$ -t (ill.  $J_{mD}$ -t) nézzük. Ennél a mágneses térerősség változásának megfelelő nagyságrendi változások következnek be a kritikus fotonáramsűrűségben. A  $10^{-4}$  gauss erősségű mágneses tér már igen közel hozza egymáshoz a kritikus  $R$  és  $D$  fotonáramsűrűségeket, de  $H$  további növelése során (ami asztrofizikai szempontból nézve már irreális) sem válhat a két érték egyenlővé. Ezt geometriai úton is alá lehet támasztani, ugyanis a hiperbolához egy pontból nem lehet két,



5. ábra. Kritikus fotonáramsűrűségek értéke a mágneses-térerősség függvényeként

egymással párhuzamos érintőt húzni (vö. 4. ábra). Ez azt jelenti, hogy az  $M$ -típusú ionizációs frontok tartománya, bár egyre szűkül, de növekvő mágneses térerősségnél is fellép.

Megfigyelhető az 5. ábrából az is, hogy nagyobb  $c_{02}$  esetén (ami nagyobb  $Q$ -nak felel meg) a kritikus fotonáramsűrűségek távolabb esnek egymástól. A közönséges ionizációs frontokra ez a Kahn-féle összefüggésből ismert. Mágneses ionizációs frontra a kritikus fotonáramsűrűségekre vonatkozó összefüggést nem sikerült levezetni. A fenti tény azonban értékes információt ad az ismeretlen összefüggésben  $Q$  szerepére.

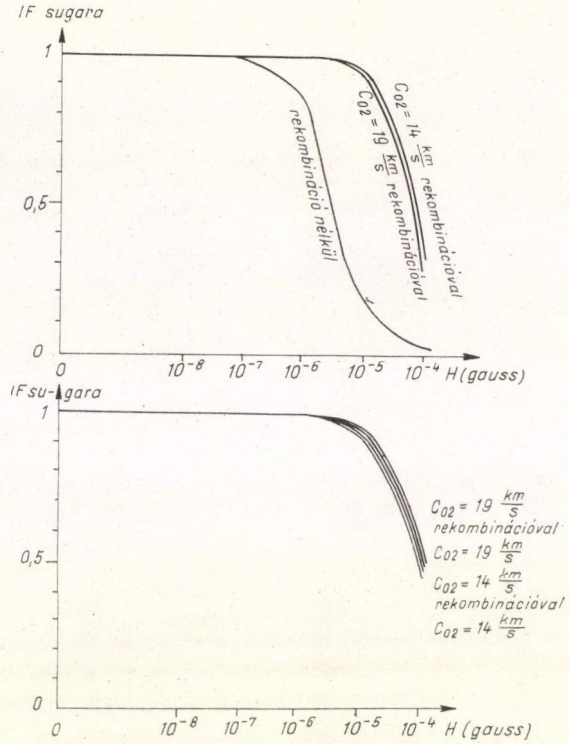
A növekvő kritikus fotonáramsűrűség azt jelenti, hogy a kritikus IF állapotának elérése korábban, azaz a gerjesztő csillaghoz közelebb következik be. Kiszámítható,



hogy az egyes előbbi mágneses télerősségek esetén a kritikus állapot a csillaghoz mennyivel közelebb lép fel. A számításokat a rekombináció hatásának figyelembevételével és anélkül is elvégeztem. A viszonylag egyszerű számítások eredménye a 6. ábrán tekinthető meg. A függőleges tengelyen a nem-mágneses kritikus IF sugara egységnyi.

A kritikus  $R$ -típusú ionizációs frontnál a rekombináció nyilván kisebb hatású, mert ez a csillaghoz közelebbi állapot és viszonylag nagy fotonáramsűrűség kell hozzá. A kritikus  $D$ -típusú ionizációs frontoknál a rekombináció szűkebb tartományra húzza össze az IF sugarának változását, és a  $10^{-4}$  gauss erősségű mágneses tér hatására is alig negyedrésszére csökken a kritikus  $D$ -típusú IF sugara.

Ezúton fejezem ki köszönetemet *Marik Miklós* kandidátusnak, az ELTE Csillagászati Tanszéke docensének értékes tanácsaiért és szíves támogatásáért.



6. ábra A kritikus IF sugara ( $H=0$  esetén egységnyi) a mágneses télerősség függvényeként; fent  $D$ -típusra, lent  $R$ -típusra

## IRODALOM

1. Axford W. I., Phil. Trans. of the R. A. S. 253. A, 301, 1961.
2. Goldsworthy F. A., Phil Trans. of the R. A. S. 253. A, 277, 1961.
3. Kahn F. D., Bull. Astr. Inst. Netherl. 12. 187, 1954.
4. Landau L. D.—Lifshitz E. M.: Fluid Mechanics, 1959. Pergamon Press
5. Marik M.: Fejezetek az elméleti asztrofizikából. 1971. Tankönyvkiadó.
6. Mathews W. G.: Interstellar Ionized Hydrogen. 1968. Ed. Y. Terzian. W. A. Benjamin Inc.
7. Strömgren B. G., Astrophys. J. 108, 242, 1948.







# NEUTRONOK RUGALMAS SZÓRÁSÁNAK VIZSGÁLATA NEHÉZ MAGOKON\*

PÁLLA GABRIELLA

MTA Központi Fizikai Kutató Intézete Budapest

## TARTALOMJEGYZÉK

I. Bevezetés .....	119
II. A „kisszögű anomália” a neutronok rugalmas szórásában .....	122
III. Próbálkozások az anomália értelmezésére .....	124
1. Az elektromágneses kölcsönhatás járuléka a rugalmas szóráshoz .....	124
2. Speciális magreakciók járuléka a kisszögű rugalmas neutronszórásban .....	128
2.1. Az $^{238}\text{U}$ ( $n, \alpha n'$ ) $^{234}\text{Th}$ reakció vizsgálata polusközelítésben .....	128
IV. A $^{238}\text{U}$ ( $n, \alpha n'$ ) reakció kísérleti vizsgálata .....	130
1. A mérési módszer .....	131
2. A részecske detektorok .....	135
3. A regisztráló elektronika .....	138
4. Véletlen koincidenenciák .....	141
5. A mérőberendezés ellenőrzése a $^{238}\text{U}$ mag hasadásánál .....	142
6. A $^{238}\text{U}$ ( $n, \alpha n'$ ) reakció hatáskeresztmetszete .....	142
V. 14,7 MeV energiájú neutronok rugalmas szórásának kísérleti vizsgálata uránon .....	143
1. A négycsatornás gyors neutron repülési idő spektrométer .....	144
1.1. A neutronforrás és a detektorrendszer .....	144
1.2. A repülési idő spektrométer elektronikus rendszere .....	145
1.3. A spektrométer energiafelbontása .....	146
1.4. A spektrométer háttérproblémái .....	149
2. A $^{238}\text{U}$ ( $n, n$ ) folyamat differenciális hatáskeresztmetszetének mérése és kiértékelése .....	152
VI. Neutronok kisszögű szórása az optikai modell alapján. Az általánosított optikai modell, a csatolt egyenletek módszere .....	156
1. Az optikai potenciál .....	156
2. Az általánosított optikai modell, a csatornacsatolás módszere .....	162
VII. A rugalmas szórási kísérleti adatok optikai modell analízise. Az anomália értelmezése az általánosított optikai potenciál alapján .....	168
1. A $^{238}\text{U}$ ( $n, n$ ) folyamat optikai modell analízise .....	169
2. A $^{238}\text{U}$ ( $n, n$ ) folyamat analízise az általánosított optikai modell alapján .....	170
3. 15,2 MeV energiájú neutronok tóriumon való rugalmas szórásának analízise az általánosított optikai modell alapján .....	174
VIII. Összefoglalás .....	176
IX. Köszönetnyilvánítás .....	177
X. Irodalomjegyzék .....	177

## I. BEVEZETÉS

A rugalmas szórás a nukleon-mag ütközéseknél előforduló legegyszerűbb magreakció, mégis a folyamat pontos leírása gyakorlatilag lehetetlen, mivel a target-mag valamennyi nukleonja kölcsönhat egymással, valamint a bejövő nukleonnal és e nukleon-nukleon kölcsönhatások a centrális tagon kívül kicserélődési és tenzor-

\* Érkezett 1973. ápr. 8.



komponenseket tartalmaznak, amelyek a teljes kölcsönhatást rendkívül bonyolulttá teszik. Azért, hogy e komplikált ütközési soktest problémát leegyszerűsítsük, kéttest problémával helyettesítjük azt oly módon, hogy bevezetjük a magnak, mint egésznek a bejövő nukleonnal való kölcsönhatását. A kölcsönhatási kép ilyen leegyszerűsítésének elméleti megalapozását *Feshbach* adta meg 1958—62-ben írt dolgozataiban.

E kéttest kölcsönhatás megadásához két út kínálkozik. Az egyik út az elemi nukleon-nukleon kölcsönhatásokból kiindulva pl. *Feshbach* módszerének alkalmazása. A másik az ütközési probléma fenomenologikus tárgyalása, amelyben a potenciál alakját a nukleáris kölcsönhatások elméletének megfelelően vesszük fel, majd a tapasztalattal való összevetés segítségével határozzuk meg e potenciál optimális paramétereit.

A rugalmas szórás mellett a nukleon-mag ütközésnél még sok folyamat lehetséges. A rugalmas szórás tárgyalásánál a többi reakciót csak mint abszorpciót tekintjük és komplex potenciált vezetünk be. A rugalmas szórás ilyen alapon való értelmezése az optikai modell. A potenciál alakját általános fizikai megfontolások alapján adjuk meg, amely természetesen sok paramétert tartalmaz. E modell a tapasztalattal való összevetése során, a modell alapján számított és megfigyelt mennyiségek egyeztetetőségével nyer fizikai értelmet.

A rugalmas szórás optikai modell analízise, annak a potenciál modell alapján való értelmezése a magfizikai problémák szempontjából alapvetőnek bizonyult. A direkt reakciók DWBA elméletének például kritikus pontja a ki és bemenő csatornában a rugalmas kölcsönhatás korrekt leírása. A gyorsneutronokkal végzett szórás kísérletek kulcshelyzetet foglalnak el ezen a területen: az  $(n, n)$ ,  $(p, p)$  és  $(n, p)$  reakciók együttes vizsgálata alapján tisztázható csak az optikai potenciál izospinfüggése, valamint az ún. szimmetria potenciál komplex voltának kérdése. Az optikai potenciált általában gömbszimmetrikusnak tételezzük fel. Deformált magok esetén azonban eltér a gömbszimmetriától, új dinamikai változók lépnek be. Az optikai modell deformált és kollektív mozgásokra képes magokra való általánosítása a csatolt egyenletek módszere néven vált ismertté. Azt már tudjuk, hogy a potenciál nukleáris és Coulomb-kölcsönhatást leíró része nem gömbszimmetrikus, az azonban még nyitott kérdés, hogy a szimmetria potenciál és az egyes csatoló kölcsönhatások milyen mértékben és módon függnek a magszerkezettől. E kérdésekre válaszolni csak nagyon pontos proton és neutron szórási kísérletek és azok szisztematikus, precíz elméleti analízise alapján tudunk.

Azóta, hogy *Bethe* még 1938-ban felvetette a komplex potenciál gondolatát, az rendkívül gyümölcsözőnek bizonyult. *Feshbach*, *Porter* és *Weisskopf* már 1954-ben sikeresen alkalmazták az optikai modellt (négysszögpotenciál) rugalmas neutron-szórás értelmezésére. *Feshbach* elméleti munkái 1958—62-ben a modell fizikai megalapozását jelentették. 1962-ben *Perey* és *Buck* nem lokális optikai modellje váltott ki nagy érdeklődést és aratott nagy sikert. *Bohr* és *Mottelson* már 1953-ban felvetette a deformált optikai potenciál gondolatát. 1962-ben *Buck* kollektív tulajdonságú magokkal való kölcsönhatásra általánosította az optikai modellt, amely a rugalmas és direkt rugalmatlan szórás leírására igen eredményes volt.

Az elmélet fejlődésének e mérföldkövei és a gyakorlatilag teljes periódusos rendszerben, széles energiaintervallumban elvégzett rugalmas szórási optikai modell analízisek hosszú sora arról tanúskodnak, hogy az optikai a legsikeresebb reakció modell. Ezért nagy érdeklődést váltott ki az irodalomban az „anomális rugalmas szórás” problémájának felvetése, szovjet kutatók azon kísérleti tapasztalata, hogy



gyorsneutronok U, Th és Pu magokon való rugalmas szórásánál a kis szögek tartományában neutrontöbblet jelentkezik az egyéb magoknál sikeresen alkalmazott diffrakciós modell alapján számított hatáskeresztmetszet értékeihez képest. Tekintve, hogy kisszögű effektusról volt szó, feltételezték, hogy nem nukleáris eredetű.

E dolgozat célja az uránon való anomális rugalmas szórás problémájának vizsgálata és annak a kérdésnek az eldöntése, hogy 14 MeV bombázóenergiánál létezik-e az anomália.

A II. fejezetben ismertetem a probléma előzményeit, az anomális szórásra vonatkozó, az irodalomban található információkat.

A III. fejezetben azzal a kérdéssel kapcsolatos vizsgálatokat tekintem át, hogy hosszú hatótávolságú elektromágneses kölcsönhatással lehet-e értelmezni az anomáliát.

Felvetődött az irodalomban olyan gondolat is, hogy az anomáliát speciális magreakciók járuléka okozza a rugalmas szóráshoz. Feltételezték az urán mag gyorsneutronokkal indukált  $\alpha$ -bomlását: az  $^{238}\text{U}(n, \alpha n')^{234}\text{Th}$  reakciót, amelynek leírására a diszperziós elmélet összefüggéseit használták. A diszperziós elmélet instabil magokra való alkalmazása önmagában is újszerű, érdeklődésre tarthat számot. Az irodalomban semmilyen erre vonatkozó kísérleti információ nincs, ezért fokozott figyelmet szentelünk e kérdésnek. A IV. fejezetben a szóban forgó reakció elméletének rövid áttekintése után ismertetem 14,7 MeV energiájú neutronokkal végzett, e reakcióra vonatkozó kísérletünket, és megmutatom, hogy sem az „indukált  $\alpha$ -bomlással” sem az „indukált hasadással” nem magyarázható az anomália.

Tekintettel arra, hogy az eddigi próbálkozások az anomália értelmezésére sikertelenek voltak, a rugalmas szórás mérések és azok interpretációjának korrekt voltát vontuk kétségbe. Az V. fejezetben ismertetem 14,7 MeV energiájú neutronok természetes uránon való rugalmas szórásának differenciális hatáskeresztmetszetére vonatkozó mérésünket. A dolgozat e második kísérleti részében bemutatom a mérésnél használt gyorsneutron repülési idő spektrométert. Ennek kapcsán kitérek egyes, olyan kísérleti vonatkozású kérdésekre is, amelyeket sikerrel oldottunk meg és önmagukban is érdeklődésre tarthatnak számot.

Az urán és tórium magokon való rugalmas szórási kísérleti adatok többségét a „fekete mag” modell alapján interpretálták és ennek kapcsán született az „anomália”. Megvizsgálom, hogy az optikai modell és annak általánosított formája alkalmazható-e a kisszögű szórásra. Az optikai modellre vonatkozó alapvető ismereteinket a VI. fejezetben foglalom össze. Áttekintem a hagyományos és a kollektív tulajdonságú magokra általánosított optikai modell, a csatorna csatolás módszerének főbb kérdéseit.

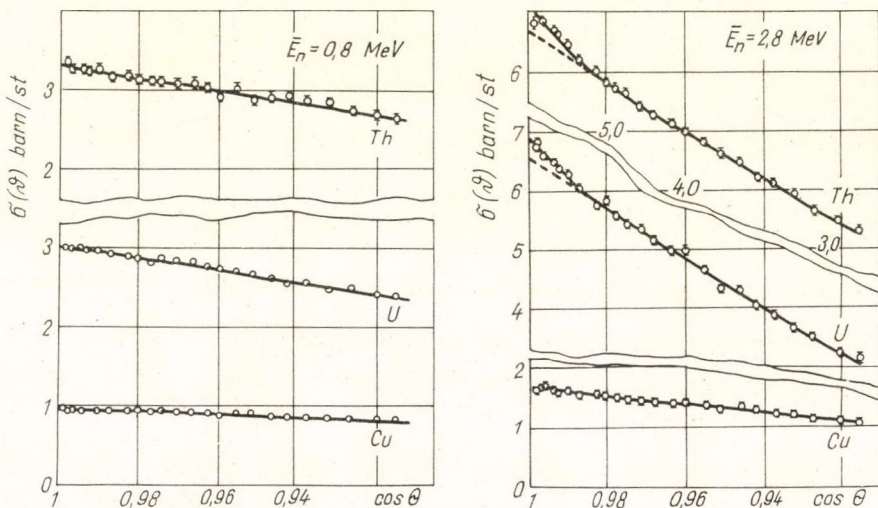
A VII. fejezetben ismertetem az uránra vonatkozó mérésünk és a tórium rugalmas szórására vonatkozó irodalmi kísérleti adatok optikai modell és csatorna csatlós analízisét. Eredményeim azt mutatják, hogy az általánosított optikai modell teljes mértékben képes értelmezni a rugalmas szórást. Anomália, legalábbis 14 MeV bombázóenergiánál sem az urán, sem a tórium magnál nincs.



## II. A „KISSZÖGŰ ANOMÁLIA” A NEUTRONOK RUGALMAS SZÓRÁSÁBAN

A hatvanas évekből nukleon rugalmas szórási kísérletek és azok optikai modell analízisének egész sorozatát ismerjük. 5–20 MeV energia tartományban, közepes és nehéz magoknál a teljes szögtartományra vonatkozó analízisek az optikai modell sikeréről tanúskodnak. Neutronok rugalmas szórásánál azonban szerepet játszhatnak a nukleon-mag kölcsönhatás nemcsak nukleáris eredetű komponensei is, amelyek feltehetően viszonylag kicsik. Kisszögű szórások, amelyekben a szóródó részecskék impulzusváltozása kicsi, alkalmasak lehetnek a neutron és mag közötti — esetleg gyengébb nem nukleáris eredetű kölcsönhatások tanulmányozására.

Elsőként *Alexandrov* és munkatársai végeztek gyors neutronokkal kisszögű szórás-kísérleteket Pu, U, Sn, Pb, Cu magokon  $4^\circ$ – $25^\circ$  szögtartományban [1]. A bombázó neutronnyalábot gyors reaktor szolgáltatta 1–5 MeV energiatartományban folytonos spektrummal, 2 MeV körüli átlagenergiával. U és Pu esetében  $9 < 10^\circ$  szögeknél jelentős növekedést találtak a „fekete mag” modell alapján számított differenciális hatáskeresztmetszethez képest, míg a többi vizsgált mag hatáskeresztmetszete, várakozásuknak megfelelően, e modell alapján számított értékekkel jó egyezést mutatott. A továbbiakban erre a jelenségre mindig, mint „kisszögű anomáliára” fogunk hivatkozni. Az elnevezés [1] szerzőitől ered.



1. ábra

Megismételték a kísérletet U, Th és Cu magokon jobb mérési feltételekkel [2]: gyors reaktor folytonos energiaspektrumából diszkrét energiatartományokat választottak ki 0,8 és 2,8 MeV átlagenergiával. Az utóbbinál méréseik ugyanolyan eredményre vezettek, mint a korábbiak, de 0,8 MeV bombázóenergiánál nem találtak neutrontöbbletet (1. ábra).



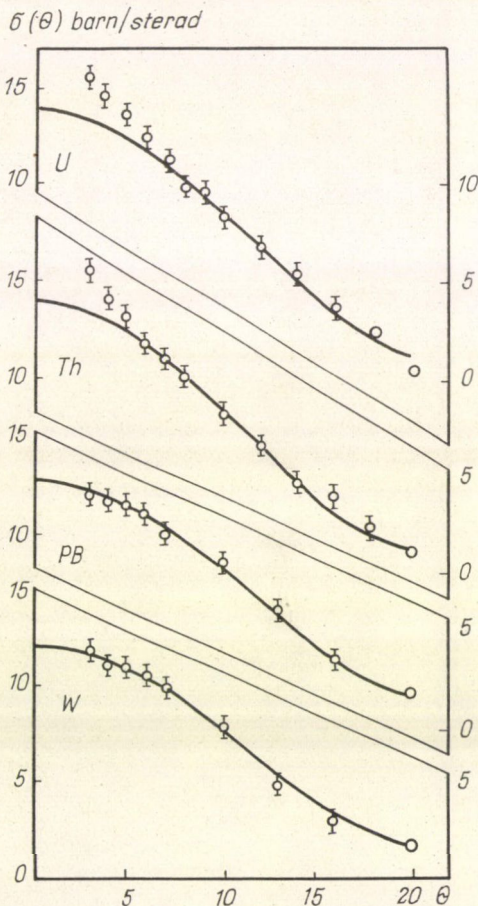
Monoenergiás, 14,2 MeV neutronokkal *Dukarjevics* és *Djumin* végzett rugalmas szórás kísérletet U, Th, Bi, W és Pb magokon [3].  $3^\circ$ – $20^\circ$  szögtartományban megmérték a differenciális hatáskeresztmetszetet,  $\Delta\vartheta = \pm 40'$  szög és  $\Delta E = 1,2$  MeV energia felbontás mellett. A szórt neutronokat repülési idejük mérése alapján regisztrálták. A kísérleti adatokat és a „fekete mag” modell alapján számított hatáskeresztmetszet görbét  $9 < 15^\circ$  szögeknél illesztették. Eredményeiket a 2. ábrán tüntettük fel, amely szerint U és Th magoknál anomáliát találtak, amely — a 0,8 és 2,8 MeV bombázó energiáknál kapott adatokhoz viszonyítva — növekszik az energiával.

Alacsony, 0,57 MeV neutronenergiaán *Walt* és *Fossan* [4] a korábbi méréseknél megvalósított energiafelbontásnál jobb felbontással és statisztikával mért, és az Uránon való szórás hatáskeresztmetszetében nem talált anomáliát. Az elméleti szögeloszlást az optikai modell alapján számította. (Analízisére az anomália értelmezésénél visszatérünk.)

*Elwyn* és munkatársai [5] 0,83 MeV neutronenergiaán végeztek nagy pontossággal kisszögű szórás kísérletet uránon. Megmérték a rugalmas szórás differenciális hatáskeresztmetszetét és a szórt neutronok polarizációját az  $1,65^\circ$ – $10^\circ$  szögtartományban. A neutronokat 0,45 MeV energiának megfelelő küszöbérzékenységű protonvisszalökéses detektorral regisztrálták. Ők is találtak anomáliát.

Az előzőekben ismertetett kísérleti eredmények 0,8 MeV neutronenergia felett, nevezetesen 0,83; 2,8 és 14,2 MeV energiákon az U, Th, Pu magokon való neutronsórásban fellépő anomáliáról tanúskodnak. Megjegyezzük, hogy *Alexandrov* 0,8 MeV átlagenergiájú neutronnyalábbal végzett szórás kísérlete nem mond ellent *Elwyn* monoenergiás 0,83 MeV-es neutronokkal végzett kísérletének, hiszen az energiatartomány alacsony energiájú részében az effektus *Walt* mérése szerint sem jelentkezik. Az eredő effektust az átlagolás elmoshatja.

Az effektus minden esetben  $\vartheta = 10^\circ$  szórási szög alatt jelentkezik és a szög növekedésével csökken, a bombázóenergiával nő. Más nehéz — Bi, Pb — vagy közepes magoknál — Cu — nem találtak ilyen jelenséget.



2. ábra



*Alexandrov* és munkatársainak az antwerpeni (1965) konferenciára beküldött előadáskivonatában arról tájékoztatnak, hogy újabb méréseket végeztek gyorsreaktorból vett 1—3 MeV energiaszórású neutronnyalábbal 0,5—8 MeV közötti átlagenergiákon.  $3^\circ$ — $24^\circ$  szögintervallumban mérték az urán és ólom magokon való rugalmas szórás differenciális hatáskeresztmetszetét. Az optikai modellt valamilyen nukleáris hosszú hatótávolságú komponenssel bővítve végeztek számításokat. A potenciál adatait nem közlik. Bizonyos interferenciatagok figyelembevételére hivatkoznak, aminek következtében egyes energiákon találtak, máshol — így pl. a 14 MeV-os adatokat tekintve — nem találtak anomáliát az uránon. Sajnos, azóta sem jelent meg e mérésükről és számításaikról a fentnél részletesebb beszámoló.

### III. PRÓBÁLKOZÁSOK AZ ANOMÁLIA ÉRTELMEZÉSÉRE

Annak ellenére, hogy a kisszögű kísérleti hatáskeresztmetszet adatok interpretációjának kérdése nem volt eléggé tisztázva, sokan kezdtek foglalkozni olyan jelenségek vizsgálatával, amelyek kis szögekben módosíthatják a rugalmas neutron szórás hatáskeresztmetszetét. Egyrészt hosszú hatótávolságú elektromágneses kölcsönhatás járulékának, neutronpolarizációs effektusnak, interferencia jelenségek következményének tulajdonították az anomáliát. Másrészt olyan speciális magreakciók fellépésében keresték a forrását, amelyben egy neutron nagy valószínűséggel „előre” lép ki a magból és energiája megegyezik a bombázó neutronéval.

#### III. 1. Az elektromágneses kölcsönhatás járulékai a rugalmas szóráshoz

A neutron, mint ismeretes, mágneses momentummal rendelkezik. Így kézenfekvőnek látszott az előreszóródó neutrontöbbslet forrását mint a legegyszerűbb, nem magerő eredetű szórási mechanizmusban, a mag Coulomb-tere és a neutron mágneses momentumának kölcsönhatása eredményeként fellépő ún. Schwinger-szórásban keresni. E kölcsönhatást leíró potenciál [7]

$$V_{em} = \mu_n \frac{e\hbar}{2m^2 c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} = \mu_n \frac{Zn^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \varphi(r) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}) = 2\gamma \varphi(r) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}) \quad (1)$$

alakú, ahol  $\mu_n$  a neutron mágneses momentuma,  $Z$  a mag rendszáma,  $\boldsymbol{\sigma}$  a Pauli-spinvektor,  $\mathbf{E}$  a Coulomb-tér erőssége,  $\mathbf{p}$  a neutron impulzusa. A radiális függés pontszerű töltéelosztást feltételezve

$$\varphi(r) = r^{-3} \quad (2)$$

alakú. Ha  $\varphi(r)$  adott, akkor  $r < r_s$ -nél annak megfelelő  $\varphi(r)$ , de  $r > r_s$ -nél mindig  $r^{-3}$  lefutású.  $r_s$  a szóró mag töltéelosztására jellemző, ún. „töltéssugár”. E potenciál okozta szórás [7] erősen előreirányul. A szórási amplitúdót *Schwinger* Born-közelítésben határozta meg, amely alacsony energián nem kielégítő speciális esetektől eltekintve, de tájékoztatásul bemutatjuk

$$f_{sch}(\vartheta) = -i\gamma (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{ctg} \vartheta/2, \quad (3)$$



ahol  $\mathbf{n} = (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{k})(|\mathbf{K}_0 \times \mathbf{K}|)^{-1}$ ,  $\mathbf{K}_0$  és  $\mathbf{k}$  a beeső és a szórt neutronok hullámszám vektora.

$$U^{238} \text{ magra } \gamma = 1,35 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$$

Ez a kölcsönhatás, első közelítésben, eltekintve a nukleáris kölcsönhatást leíró potenciál spinfüggésétől,

$$\sigma_{\text{sch}}(\vartheta) = \gamma^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta/2 \quad (4)$$

rugalmas járulékot ad, ami nem elégséges a kisszögű kísérleti adatok értelmezéséhez. (1) szerint a neutron és mag között fellépő hosszú hatótávolságú elektromágneses kölcsönhatás spin-pálya kölcsönhatás jellegű, de mint ismeretes, a nukleáris kölcsönhatást leíró optikai potenciálnak is van ilyen komponense:

$$V_n \approx V_{\text{opt}} = -VF(r) - iWG(r) + V_{\text{so}} \left( \frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} F(r) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}), \quad (5)$$

ahol  $F(r)$  és  $G(r)$  a potenciál valós és képzetes részét leíró formafaktorok  $V$ ,  $W$  és  $V_{\text{so}}$  a valós, képzetes és spin-pálya potenciál erőssége. Mivel az optikai potenciálon való szórás amplitúdója spin-pálya kölcsönhatás esetén

$$f_n(\vartheta) = f(\vartheta) + g(\vartheta)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}),$$

ezért a Schwinger-szórás a második tagot fogja módosítani, és a megfelelő tagok interferenciája miatt a differenciális hatáskeresztmetszet a következő alakban írható:

$$\sigma(\vartheta) = |f_n(\vartheta)|^2 + 2(\operatorname{Im} g(\vartheta)) \gamma \operatorname{ctg} \vartheta/2 + |f_{\text{sch}}(\vartheta)|^2. \quad (6)$$

Monahan és Elwyn [8] megmutatták, hogyha neutronszórást vizsgálunk, egy  $V(r)$  gömbszimmetrikus potenciálon, amely

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \quad (7)$$

alakban adható meg, ahol

$$V_1(r) = 0, \quad \text{ha } r \geq r_c,$$

$$V_2(r) = 0, \quad \text{ha } r < r_c.$$

$r_c$  alkalmasan választott levágási sugár, a  $V(r)$  potenciál és egyedül a  $V_1(r)$  potenciál okozta szórás jellemző fázisok között igen egyszerű kapcsolat adható meg, ha  $r_c$  sugár értékét elég nagyra választjuk ahhoz, hogy  $V_2$ -t perturbációnak tekinthetjük, a fázisokat másodrendű közelítésben kapjuk.

Redmond [9] az elektromágneses szórás, (6) és (4)-nél pontosabb elméleti adatok alapján való tanulmányozása céljából a  $V(r)$  potenciált (7) a következőképpen választotta meg:

$$\begin{aligned} V_1(r) &= V_{\text{opt}}(r) + V_{\text{em}}(r) & \text{ha } r < r_c, \\ V_2(r) &= V_{\text{em}}(r) & \text{ha } r \geq r_c. \end{aligned} \quad (8)$$

A számításaiban használt optikai potenciál paramétereit az irodalomból, [10]-ből vette. A parciális hullámok fázisainak viselkedését és az interferencia hatását tanulmányozta, különösen nagy  $l$ -eknél, hiszen kisszögű effektusra keres magyarázatot. A Born-közelítésben kapott fázistolások értékéhez képest jelentős korrekciót kapott, azt találta, hogy további, extrém nagy erősségű spin-pálya kölcsönhatás felvétele



esetén a fázistolások jelentősek lesznek / nagy értékeinél, kis szögekben az interferencia konstruktív, tehát a hatáskeresztmetszet növekedéséhez vezet a bombázó-energia emelésével egyre nagyobb mértékben. Ez a szokásostól eltérő, intenzív spin-pálya kölcsönhatás számot tudna adni a kisszögű anomáliáról. Ennek a fizikai feltételezésnek azonban ellentmondanak a neutron-polarizáció mérések, amelyek szerint a kísérleti adatok értelmezhetőek a szokásos spin-pálya erősséggel, nem indokolják annak extrém nagy erősségét [5].

Egy másik hosszú hatótávolságú, nem nukleáris kölcsönhatásra, amely a neutron elektromos polarizálhatóságából ered *Alexandrov* és *Bondarenko* [1] hívta fel a figyelmet.

Ugyanis a mag  $E$  erősségű Coulomb-terében a neutron  $p = \alpha_n E$  indukált elektromos dipólmomentumra tehet szert, ahol  $\alpha_n$  a neutron adiabatikus polarizálhatósága. Az indukált dipólmomentum és a Coulomb-tér kölcsönhatását leíró potenciál adiabatikus közelítésben

$$V_p(r) = \frac{-1}{2} \alpha_n E^2 = \frac{-1}{2} \alpha_n Z^2 e^2 \psi(r), \quad (9)$$

ahol a radiális függés

$$\psi(r) = r^{-4}, \quad \text{ha } r > r_s. \quad (10)$$

$r < r_s$ -nél a  $q(r)$  a töltéeloszlás szabja meg  $\psi(r)$ -t.

A „teljes”  $V_n + V_{em} + V_p$  kölcsönhatás következtében fellépő szórás amplitúdójában bonyolult interferencia tagok jelennek meg

$$\sigma(\vartheta) = |f_n(\vartheta)|^2 + 2(\text{Im } g(\vartheta)) \gamma \text{ctg } \vartheta |2 + |f_{sch}(\vartheta)|^2 + 2(\text{Re } f(\vartheta)) f_p(\vartheta) + |f_p(\vartheta)|^2. \quad (11)$$

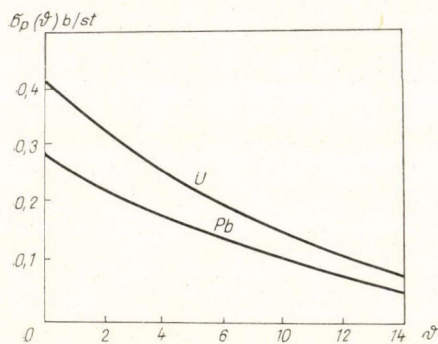
Szemléltetve közöljük a polarizációs szórás amplitúdóját Born-közelítésben

$$f_p(\vartheta) = \alpha_n Z^2 \frac{Mc^2}{\hbar R} \left| 1 - \frac{\pi}{4} qR + (qR)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (qR)^{2m}}{(2m+1)(2m+3)!} \right|, \quad (12)$$

ahol  $R$  a mag sugara  $q = 2k \sin \vartheta/2$ ,  $k$  pedig neutron hullámszáma.

*Alexandrov* és munkatársai a 2 MeV neutron energiánál végzett mérésük alapján, feltéve, hogy az interferenciatagok (11)-ben elhanyagolhatóak, a nukleáris szórás amplitúdóját diffrakciós szórás közelítésben számították a

$$\sigma_{\text{exp}} - \sigma_{\text{sch}} = \sigma_n + \sigma_p$$



3. ábra

összefüggés felhasználásával, U és Pu magoknál a neutron polarizálhatóságára  $\alpha_n = (8 \pm 3,5) \cdot 10^{-41} \text{ cm}^3$  értéket kaptak. A 3. ábrán  $\sigma_p(\vartheta)$ -t tüntettük fel  $\alpha_n = 2 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^3$  irreálisan magas értéknél. A (11) hatáskeresztmetszetből a Schwinger-szórás interferenciatagjának elhagyása — mint az előzőekben, Redmond vizsgálataiból láttuk — jogos, de a másik interferenciatagra nem tehetünk kijelentést. Ismeretes, hogy  $\text{Re } f(\vartheta)$  nehézmagoknál, MeV nagyságrendű energiákon,  $\vartheta < 15^\circ$  szögekben negatív [11],  $f_p(\vartheta)$  ugyanitt pozitív előjelű. Így a polarizálható



ság csak akkor növeli meg kis szögekben a szórási hatáskeresztmetszetet, ha

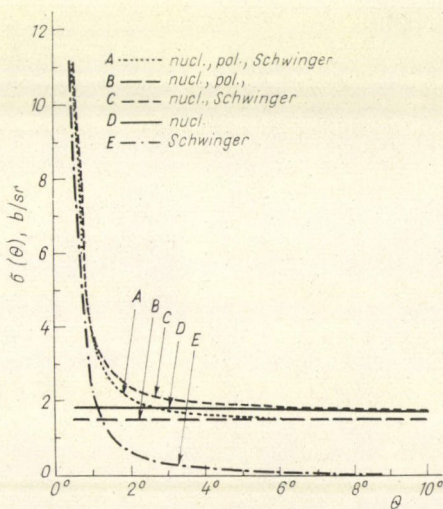
$$f_p(\vartheta)^2 > |2(\operatorname{Re} f(\vartheta))f_p(\vartheta)|. \quad (13)$$

Walt és Fossan [4] megmutatta, hogy (13) szerint  $\alpha_n = (8 \pm 3,5) \cdot 10^{-41} \text{ cm}^3$  helyett Alexandrov mérési eredményeinek az elektromos polarizálhatóság alapján való értelmezése csak  $\alpha_n > 5 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^3$  értékek esetén lehetséges (4. ábra). Az ő méréjük 570 keV-en  $\alpha_n < 2 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^3$  értékkel van összhangban.

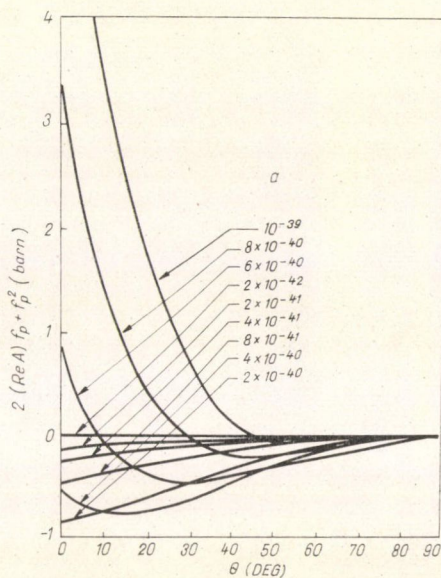
Elwyn és munkatársainak kisszögű szórás kísérletét [5] a perturbációs számítás második közelítésében számított fázisok segítségével értékelték ki. Az általuk kidolgozott számítási eljárásról korábban már említést tettünk [8]. A szórást létrehozó potenciált a nukleáris kölcsönhatást leíró optikai potenciál [10], a neutron mágneses momentumának, illetve indukált dipólmomentumának a Coulomb-térrel való kölcsönhatását leíró potenciálok összegével helyettesítették:

$$V_1(r) \approx V_{\text{opt}}(r) + V_{\text{em}}(r) + V_p(r), \quad \text{ha } r < r_c,$$

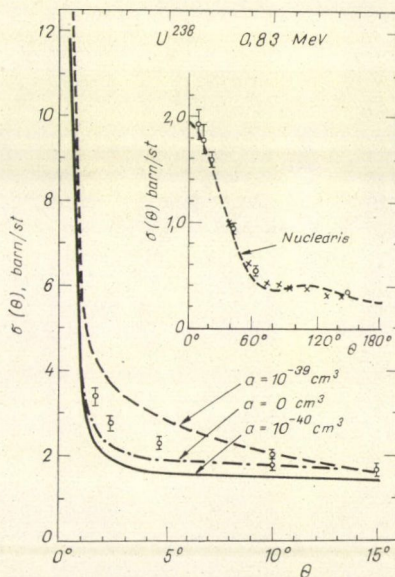
$$V_2(r) \approx V_{\text{em}}(r) + V_p(r) \quad \text{ha } r > r_c.$$



5. ábra



4. ábra



6. ábra



A differenciális hatáskeresztmetszet és a szórt neutronok polarizációjának számításánál minden interferenciátagot figyelembe vettek első rendben. Az 5. ábra a neutron és mag kölcsönhatásának egyes komponenseire számított szórési differenciális hatáskeresztmetszeteket szemlélteti. A mérési adatokat a különböző  $\alpha_n$  értékekre számított „teljes” differenciális hatáskeresztmetszetet a 6. ábrán tüntettük fel, amely szerint  $4 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2 < \alpha_n < 8 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2$ .

Alacsonyenergiájú neutronszórásból azonban [12]  $\alpha_n < 2 \cdot 10^{-41} \text{ cm}^2$  felső határ, mesonelméletből [13], pionok fotofelbomlásából [14]  $\alpha_n$ -re legalább egy nagyságrenddel kisebb érték adódik. Megállapíthatjuk, hogy neutronok és a mag Coulomb terének kölcsönhatása, amely a neutron mágneses momentuma és elektromos polarizálhatósága miatt lép fel, nem ad magyarázatot az anomáliára.

### III. 2. Speciális magreakciók járuléka a kisszögű rugalmas neutronszórásban

A kis szögekben jelentkező anomáliát tulajdoníthatjuk neutronok által keltett magreakció eredményének is abban az esetben, ha a reakció energiamérlege megengedi a rugalmas szórásnak megfelelő energiával való neutronemissziót a kívánt irányban. Milyen típusú reakciókra teljesülhet e kikötés?

Emlékeztetünk, hogy az anomáliát csak U, Th, Pu magokon észlelték, így célszerűnek látszott azt a kérdéses magok  $\alpha$ -bomlással szembeni instabilitásával kapcsolatba hozni. *Mraskó* és *Kövessy* feltételezték az urán mag neutronszórással indukált  $\alpha$ -bomlását, azaz az  $^{238}\text{U}(n, \alpha n')$  reakció bekövetkezését [15]. E magyarázat energetikailag lehetséges a magok instabilitása miatt. *Mraskó* és *Kövessy* a direkt reakciók diszperziós elméletének pólusközelítését alkalmazta radioaktív magokon végbemenő gyors neutron szórás esetére. A következőkben ezt az elméletet ismertetjük röviden.

#### III.2.1. Az $^{238}\text{U}(n, \alpha n')^{234}\text{Th}$ reakció vizsgálata pólusközelítésben

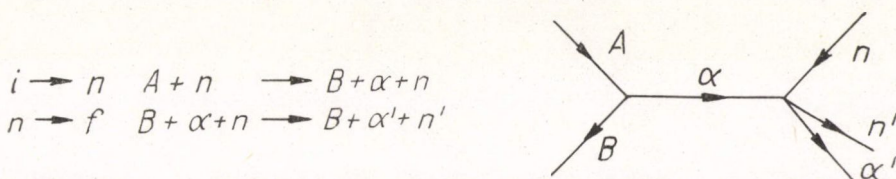
A direkt reakciók tárgyalására *Schapiro* [16] egy új módszert vezetett be 1961-ben, amely diszperziós elmélet, vagy diszperziós módszer néven ismert. A diszperziós elmélet ezen formáját, amely a direkt folyamatok leírásánál használható, az elemi részek erős kölcsönhatásának fizikájában alkalmazzák. E módszer segítségével kapott olyan összefüggések, amelyek a kísérleti adatokkal közvetlenül összehasonlíthatók, a reakció amplitúdóra vonatkozó nagyon általános feltételezéseken alapsznak: a reakció amplitúdók a komplex  $E$  síkon mindenütt analitikus függvények, kivéve a valós tengelyt, ahol a szingularitások helyezkednek el. Ha az unitaritási feltételben csak bizonyos típusú virtuális állapotokat veszünk figyelembe, akkor e közelítésnek megfelelő összefüggést kapunk a reakcióamplitúdóra. A legalacsonyabb rendű közelítéshez, a „pólusközelítéshez” olyan feltétel alapján jutunk el, hogy a virtuális állapotokat egyrészecske állapotokra korlátozzuk. Az így kapott reakcióamplitúdó viselkedését egyetlen pólus határozza meg. Ha a pólus elég közel van a fizikai tartományhoz remélhető, hogy a reakció amplitúdó többi szingularitásának járuléka kicsi, s mennél közelebb megyünk a pólushoz, annál inkább elhanyagolhatóak lesznek a kiválasztott pólus járuléka mellett, tehát a pólusközelítés „egyre jobbá” válik.



A diszperziós elméletben ahhoz, hogy végtelen nagy hatáskeresztmetszetek ne lépjenek fel, a fizikai tartományon kívül kell lenni az amplitúdó pólushelyének. Ezt a részecskék stabilitása biztosítja. Az

$$A + n \rightarrow B + n' + \alpha$$

típusú reakció differenciális hatáskeresztmetszete a diszperziós elmélet alapján számolható. Az amplitúdó pólus gráfja a 7. ábrán látható.



7. ábra

A megfelelő mátrixelem

$$M_{if} \sim \frac{M_{ia} M_{af}}{p_\alpha^2 - 2m_\alpha E_\alpha}, \quad (15)$$

ahol  $p_\alpha$  és  $E_\alpha$  a kezdeti és végállapot kinetikus energiái és impulzusainak függvénye, az energia és impulzus megmaradás alapján meghatározható. Ha a stabil A mag tömege nő, a pólus egyre közelebb kerül a fizikai tartományhoz, a közelítés jobb lesz, sőt ha

$$m_A > m_B + m_\alpha$$

teljesül, a pólus a fizikai tartományba megy, de formálisan az elmélet már nem alkalmazható.

Mrskó és Kövessy megfontolásai szerint az instabil tartományba való átmenetnél a tömegkülönbséget egy kis imaginárius rész hozzáadásával módosítani kell:

$$-i\gamma = -\frac{i\hbar}{2\tau}$$

ahol az A mag élettartama,  $\tau$  egy nagy szám. Ezen imaginárius rész bevezetése a pólus helyét a fizikai tartományon kívülre tolja, s mivel  $\tau$  nagy, a fizikai tartományhoz közel marad s várható, hogy a pólusközelítés jó eredményt ad.

A (15)-ben szereplő mátrixelemek meghatározásánál azt találták, hogy az  $A \rightarrow B + \alpha$  vertexben energia- és impulzus megmaradás miatt az  $A \rightarrow B + \alpha$  folyamatnak a pólusban számított mátrixeleme éppen az A mag bomlásáéval egyenlő, és a bomlási valószínűség négyzetével arányos. Az  $\alpha + n \rightarrow \alpha' + n'$  folyamat mátrixeleme pedig az  $\alpha(n, n')$  elasztikus szórás amplitúdó négyzetével arányos ( $|f(e, q)|^2$ ), amely a  $q^2 = (p_{n'} - p_n)^2$  átadott impulzusnál és a részecskék relatív mozgásának



$E$  energiájánál veendő. Az általuk így kapott differenciális hatáskeresztmetszet a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & (2\pi)^2 \left( \frac{m_n + m_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 |f(\varepsilon, q)|^2 \sqrt{\frac{E_\alpha E_{n'}}{QE_n}} \times \\ & \times \frac{\gamma}{\left[ Q - \frac{1}{2m_\alpha} (p_{n'} + p_{\alpha'} - p_n)^2 \right]^2 + \gamma^2} \times \\ & \times \delta(E_{n'} - E_{\alpha'} - E_n + Q) dE_{\alpha'} dE_n d\Omega_{\alpha'} d\Omega_{n'}. \end{aligned} \quad (16)$$

A (16) kifejezésből kiolvasható a reakcióból származó részecskék szög- és energieloszlásának néhány jellegzetes vonása:

a) a bombázó neutronirányhoz képest megválasztható olyan szög, ahol a szórt neutronok energiája a laboratóriumi koordináta rendszerben nagyobb, mint a bombázóneutronoké.

b) Rögzített  $p_n$  és  $p_{n'}$  mellett az alfarészecske a  $p_n - p_{n'}$  irányhoz képest csak egy meghatározott szög alatt repülhet. Mivel  $\gamma$  igen kis mennyiség, az alfarészecskék szögeloszlásának rendkívül éles csúcsa van.

c) A  $p_n = p_{n'}$  speciális esetben (16) kifejezésben a  $p_{\alpha'}$  irányára való kiintegrálás után egy  $\gamma^{-1}$  faktor lép fel. Tehát az alfa-bomló magokon rugalmasan szórt neutronok szögeloszlásában kis szögmértékeknél valóban várható növekedés a rugalmas szórás elméleti úton meghatározott differenciális hatáskeresztmetszetéhez képest.

#### IV. A $^{238}\text{U}(n, \alpha n')$ REAKCIÓ KÍSÉRLETI VIZSGÁLATA

14,7 MeV neutron energiánál kísérleti úton vizsgáltuk meg a feltételezett  $(n, \alpha n')$  reakció hatáskeresztmetszetét [17]. E reakció kimutatásához az szükséges, hogy adott irányban egy meghatározott energiával kirepülő neutronnal egy időben detektáljuk a keletkező társrészecskét. Ellenőrizni akarjuk, hogy a neutronok kis-szögű rugalmas szórásánál talált anomáliát a feltételezett reakció magyarázza-e. Ez esetben a folyamat hatáskeresztmetszetének *Dukárevics* és *Djumin* mérései alapján 10–20 mb-nak kell lenni. A rugalmas szórás energiájával  $0^\circ$  alatt lépnek ki az elmélet szerint a neutronok s a hozzájuk tartozó alfarészecskék energiája megegyezik az urán természetes alfabomlásánál felszabaduló energiával, és térbeni eloszlásuk gömbszimmetrikus.

Meg kell jegyezni, hogy csupán az effektus létezése úgyszintén eldönthető, hogy megmérjük a neutronok energiaspektrumát. A számítások alapján láttuk ugyanis, hogy  $E_n > E_0$  energiájú neutronok kilépésének is van valószínűsége ( $E_0$  a bombázó neutron energiája). Ahhoz, hogy az energiafelbontásunk kielégítő legyen nagy repülési távolságot kellene választani. Ezt a keresett folyamat hatáskeresztmetszetének feltehetően alacsony értéke nem teszi lehetővé.

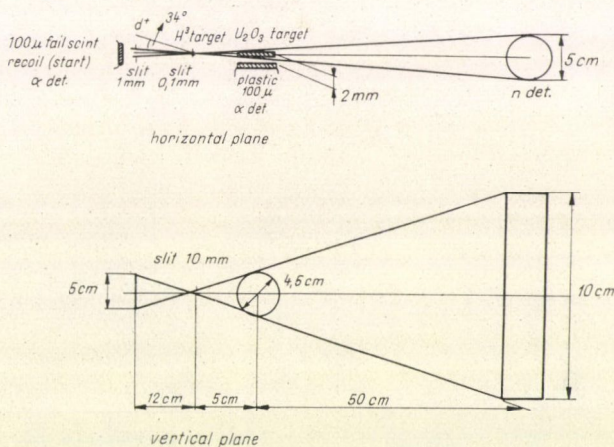


## IV. 1. A mérési módszer

Az urántargetet a  ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$  reakcióból kilépő 14,7 MeV energiájú neutronokkal bombáztuk. A neutronok számát, keletkezési idejét és kilépési irányát a forrásreakcióban visszalökött alfarészecske detektálásával határoztuk meg. Az  $\text{U}^{238}(n, \alpha n')$  reakció kimutatásához olyan eseményeket kerestünk, amikor a visszalökött alfarészecske detektálásával kijelölt időben, a bejövő irányhoz képest  $0^\circ$  körül repülő 14 MeV energiájú neutront és az uránból kilépő 3 MeV energiájú alfarészecskét detektáljuk.

Az  $\text{U}^{238}(n, \alpha n')$  reakcióban keletkező részecskéket plasztik szcintillációs számolóval detektáltuk. Az urántargetből kilépő 14 MeV energiájú neutronokat repülési idejük, míg az alfa társrészecskéket két módon, repülési idejük és a detektor energiamérésre szolgáló lassú ágbeli amplitúdóspektruma alapján választottuk ki.

A mérésnél használt target és detektor elrendezés a 8. ábrán látható.



8. ábra

Az urántarget alumínium fóliára felvitt  $\text{U}_2\text{O}_3$ . A neutron térszögben így  ${}^{238}\text{U}$ ,  ${}^{16}\text{O}$  és  ${}^{27}\text{Al}$  magok voltak jelen.

A 14 MeV bombázó energiánál lejátszódó reakcióknak többnyire jóval nagyobb a hatáskeresztmetszete mint a keresett reakcióé. Ezek közül biztonsággal kell kiválasztani az  ${}^{238}\text{U}(n, \alpha n'){}^{234}\text{Th}$  reakciót, oly módon, hogy a keletkező két reakció terméket egy időben detektáltuk a „start” alfarészecskével.

a) A kimutatandó reakció hatáskeresztmetszete  $\sigma = 15$  mb 14 MeV bombázó neutron energiánál. (Ezt az értéket Dukarjevics és Djumin mérése alapján határoztuk meg olyan feltétel alapján, hogy a rugalmas szórás hatáskeresztmetszetét ez a reakció növeli meg.)

Annak valószínűsége, hogy egy 14,7 MeV energiájú neutron a targetben előidézzé a reakciót

$$p = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{att}}} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{L}{\lambda_{\text{att}}} \right) \right],$$



ahol  $L$  a neutronok targetben megtett átlagos útja  $\sigma_{\text{att}}$ , illetve  $\lambda_{\text{att}}$  pedig a neutronnyaláb gyengülését figyelembe vevő hatáskeresztmetszet és attenuációs szabad úthossz. Tekintve, hogy a rugalmas szórás előre irányul  $\sigma'_{\text{att}} = \sigma'_t - \sigma_{\text{el}}$ . Az  $\text{U}_2\text{O}_3$  targetre vonatkozóan, amelyben  $N_u$  és  $N_0$  az urán és oxigén magok száma köbcénti méterenként

$$\sigma_{\text{att}} = \frac{(\sigma'_t - \sigma_{\text{el}})N_u + (\sigma'_t - \sigma_{\text{el}})N_0}{N_u + N_0} = 3,4b.$$

A reakció valószínűsége pedig  $p = 4,1 \cdot 10^{-3}$ . A reakcióban keletkező neutronok energiája 14 MeV az alfarészecskéké 4,2 MeV.

b) Az  $^{238}\text{U}$  mag alfabomlással szemben instabil, felezési ideje  $T_{1/2} = 4,49 \cdot 10^9$  év. Az általunk használt targetnél a természetes radioaktív bomlások száma  $4,9 \cdot 10^2/\text{sec}$ . Ezekhez az eseményekhez nem tartozik a neutron-térszögben neutron, illetve alfarészecske, így szisztematikus koincidenziát nem, csak véletlen koincidenziát okozhatnak.

c) Az  $^{238}\text{U}$  mag 14,7 MeV energiájú neutronok hatására hasad. E folyamat hatáskeresztmetszete  $\sigma = 1,15b$  [20], a hasadás bekövetkezésének valószínűsége a targetben  $p_h = 0,18$ . A hasadási termékek hatótávolsága kb. az urán 4,2 MeV energiájú alfarészecskéi hatótávolságával egyezik meg. A targetből kijutva tehát elérhetik az alfadetektort. Ehhez az eseményhez a startjel-detektor egy megszólalása tartozik, mivel a kijelölt neutron térszögben haladó neutron „hasította” az  $^{238}\text{U}$  magot. A hasadásnál átlagban 2,5 neutron és gamma-részecskék is keletkeznek. A hasadási neutronok és gammák is megszólaltatják a neutrontektort. Ez a reakció tehát hasonló típusú, mint amelyik kimutatása a feladatunk.

A hasadási neutronok energiaspektrumának maximuma 1 MeV energia közelében van. A 10 MeV-nél nagyobb energiájú neutronok kilépésének valószínűsége 2,5 nagyságrenddel kisebb, mint az 1 MeV energiájúaké [20].

Figyelembe véve, hogy hasadásnál két töltött részecske és átlagban 2,5 neutron keletkezik, amelyek a bejövő neutronirányhoz képest minden szög alatt egyforma valószínűséggel lépnek ki, a keresett effektustól várt hármas koincidenciaszámnál  $3 \cdot 10^2$ -szer kisebb lehet az a járulék, ami a hasadási eseményektől származik.

A hasadási gammarészecskékre nem teljesül a 14 MeV energiájú neutronok kiválasztásához jól beállított időfeltétel, így ezeket figyelmen kívül hagyhatjuk.

d) Az  $^{16}\text{O}$  mag 14 MeV energiájú neutronokkal való bombázásánál a következő reakciók jöhetnek létre:  $^{16}\text{O}(n, p)^{16}\text{N}$ ,  $\sigma = 80$  mb. A keletkező protonok energiája maximálisan 4 MeV. Az  $^{16}\text{N}$  mag gerjesztett állapotban marad vissza, majd gamma kibocsátás révén megy alapállapotba [19]. Bár két részecske keletkezik ez esetben is, de a gamma-részecske repüléséhez az időfeltétel nem teljesül, így szisztematikus hármas koincidenzia nincs.

Az  $^{16}\text{O}(n, \alpha)^{13}\text{C}$  reakció hatáskeresztmetszete  $\sigma = 60$  mb, az alfarészecskék energiája 4,1 MeV [19].

Az  $^{16}\text{O}(n, d)^{15}\text{N}$  reakcióban 3,8 MeV energiájú deuteronok lépnek ki. A folyamat hatáskeresztmetszete  $\sigma = 0,3$  b [19]. E két reakció termékei csak az alfadetektort szólaltatják meg, hármas koincidenziát csak véletlenszerűen hozhatnak létre.

e) A startjeldetektor térszögén belül van az  $\text{U}_2\text{O}_3$  réteget tartó alumíniumfólia is. Az  $^{27}\text{Al}(n, p)^{27}\text{Si}$  reakció hatáskeresztmetszete  $\sigma = 1b$  14 MeV neutron energiánál [19]. A kilépő protonok energiája 4,8 MeV. E protonok hatótávolsága nagyobb mint az



uránréteg vastagsága, így az alfadetektort megszólaltathatják, de a reakció hármas koincidenziát nem kelthet.

A neutrondetektor 14 MeV energiájú neutronra és az alfadetektornak a társ-részecskére való megszólalásait a részecskék repülési ideje alapján, azaz a startjel és a megfelelő részecskedetektor közötti gyors koincidenzia-egységgel választjuk ki.

A neutronok repülési idejének szórása a repülési út szórásából adódik: a neutron-keletkezés helyének bizonytalansága az urántargetben és a detektálás helyének bizonytalansága a plasztik szcintillátorban. Ezekből származó időszórás  $\Delta t < 1,1$   $\mu$ sec. Biztosan nem veszítünk ezen eseményekből, ha a koincidenzia időfelbontását  $2\tau = 3,6$   $\mu$ s értékűnek választjuk.  $L = 50$  cm repülési távolságnál  $t_r = (11,6 - 8)$   $\mu$ s repülési időintervallumot kijelölve a koincidenzia egységgel, a detektált neutronok energiája 10—22 MeV tartományba eshet. A gamma-részecskék repülési ideje ugyanakkor,  $t_\gamma = 1,6$   $\mu$ sec, az időkapun kívül van.

Az alfarészecskék repülési útja maximálisan 5 cm. Ennek megtételéhez az olyan alfarészecskéknek, amelyek a detektorba érkezéskor már 20% csak a maradék energiája  $t_r^a = 7,2$   $\mu$ s sec-ra van szükségük. Ha  $2\tau = 10$   $\mu$ sec időfelbontású koincidenzia egységet alkalmazunk, az alfarészecskékre vonatkozóan nincs számlálási veszteségünk.

A bombázó neutronok intenzitását úgy választottuk meg, hogy a véletlen koincidenziák száma elhanyagolható legyen a szisztematikus koincidenziákhoz képest.

$N_{\text{sziszt}}$  jelölje a vizsgálandó eseménytől származó hármas koincidenziák számát,

$$N_{\text{sziszt}} = \frac{N_0}{4\pi^2} \omega_t p \omega_a \varepsilon_n 1,1 \cdot 10^{-9} N_0,$$

ahol  $N_0$  a neutronhozam a teljes  $4\pi$  térszögben,  $\omega_t$  az urántarget térszöge a neutron-forrás targetre,  $\omega_a$  az alfadetektor térszöge az urántargetre vonatkozóan,  $\varepsilon_n$  a neutron-detektor hatásfoka 14 MeV energiájú neutronokra.

A véletlen koincidenziák  $N_v$  száma olyan eseményektől származik, amikor a három detektor közötti három koincidenziaegység közül kettő szisztematikusán szólal meg s a harmadik megszólalása véletlenszerű. Ha a neutron-startjel-koincidenzia megszólalása szisztematikus és az alfadetektorban tartozik hozzá véletlenül beütés, akkor

$$N_v^a = \frac{N_0}{2\pi} \omega_n \varepsilon_n n_a \tau_{a,st},$$

ahol  $\omega_n$  a neutrondetektor térszöge a forrástargetre,  $n_a$  az alfadetektor időegységre vonatkozó beütésszáma,  $\tau_{a,st} = 12$   $\mu$ sec a startjel-alfa koincidenzia felbontóképessége.

A startjel és neutrondetektor egyidejű megszólalását a primér neutronok okozák — mivel a detektor a kijelölt neutron térszögben van —, az alfadetektor megszólalásait pedig az urán radioaktív bomlásánál keletkező alfarészecskék  $n_a^r$ , a detektort érő primérneutronok és az urántargetből kilépő reakció termékek,

$$n_a = n_a^r + \frac{N_0}{4\pi} \omega_a^r \varepsilon_a^n + \frac{N_0}{4\pi} \omega_t \bar{p} \omega_a,$$



ahol  $\omega_\alpha$  az alfadetektornak a neutronforrás targetre vonatkozó térszöge,  $\epsilon_\alpha^n$  a detektor 14 MeV energiájú neutronokra vonatkozó hatásfoka,  $\bar{p}$  jelöli a bombázó-neutronok hatására a targetben történő töltött részecske keletkezésének valószínűségét.

Ha az alfa és startjel-detektor közötti koincidencia megszólalása szisztematikus és a startjel-neutron-koincidencia véletlenül ad jelet, akkor

$$N_n^v = \frac{N_0}{2\pi} \omega_t \bar{p} \omega_\alpha n_n \tau_{n, st}.$$

Itt  $n_n$  jelenti a neutrontetektor beütésszámát, amit zömmel a primér neutronok okoznak

$$n_n = \frac{N_0}{4\pi} \omega_n \epsilon_n.$$

A startjel-alfa és a startjel-neutrontetektorok közötti koincidenciák nem szólhatnak meg szisztematikusan, ha nincs hozzájuk tartozó startjel. Tehát

$$N^v = N_\alpha^v + N_n^v.$$

Így az

$$\frac{N_{sziszt}}{N^v} \cong 10$$

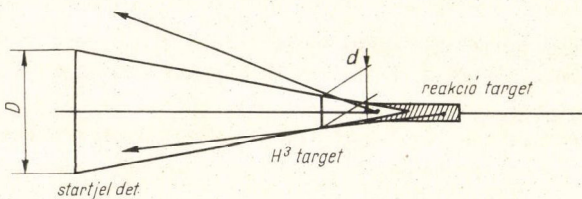
viszonyból adódik a méréshez használható neutronintenzitás felső korlátja:

$$N_0 \leq 1,4 \cdot 10^8 \text{ n/sec.}$$

Az urántarget vastagságának az alfarészek hatótávolsága szab határt. A 4 MeV energiájú alfarészeknél ez az érték  $10 \text{ mg/cm}^2$ . Az általunk használt target  $1,5 \text{ mg/cm}^2$  vastagságú 45 mm átmérőjű alumíniumfóliára szétterített  $2,5 \text{ mg/cm}^2$  természetes uránoxid. Az uránban  $U^{238}$  izotóp 98%-ban van jelen. A 8/a és 8/b ábra szerinti elrendezésben a neutronok átlagos repülési útja a kör alakú  $U_2O_3$  fóliában 3,8 cm.

A reakciotarget jobb kihasználása és a neutrontérszög optimális beállítása miatt a méréshez „vonalszerű” neutronforrást valósítottunk meg, amelynek mérete  $0,1 \times 10 \text{ mm}$ . Még ebben az esetben is a gyorsító  $10^8/\text{sec}$  neutronhozamot biztosított.

A reakciotargetet úgy kellett elhelyezni, hogy egyrészt a neutronforráshoz lehető legközelebb legyen, azaz a target helyén nagy legyen a neutronfluxus adott neutronhozam mellett. Másrészt, hogy a visszalökött alfarészek detektora



9. ábra

— startjel detektor — teljes egészében „lássa” az uránfóliát (9. ábra). Ez a követelmény egy minimális alfa-térszöget, azaz adott  $d$  mellett egy minimális  $D$ -t szab meg. Ugyanakkor a térszög további növelésével egy adott neutronintenzitás mellett csak a véletlen koincidencia-szintet növelnénk. Ilyen megfontolások alapján kapott,



technikailag megvalósítható optimális geometriai viszonyokat tüntettünk fel a 8/a és 8/b ábrán. A startjel-detektor térszöge  $\omega_{st}=3,8 \cdot 10^{-3}$ . Az urántarget térszöge pedig  $\omega_t=2,5 \cdot 10^{-5}$  értékűnek adódott. ( $\int d\omega=1$ .)

A target térszögének és elhelyezésének ellenőrzési módjára a későbbiekben visszatérünk.

#### IV. 2. A részecske detektorok

A startjelet adó alfarészecskéket 50 mm átmérőjű 100  $\mu$  vastagságú plasztikfólia és RCA 6810/A elektronsokszorozó detektálja. A gyorsítócső felől fényzárásról alumíniummal begőzölt műanyagfólia gondoskodik. A polietilén réteg vastagsága 6  $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ . A rágózott alumínium 3—5  $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ . A detektor elhelyezése olyan, hogy az alfarészecsek repülési iránya és bombázó deutériumnyaláb szöge 150°. Ekkor 160 keV bombázó deutérium energiánál a detektált alfarészecsekhez tartozó neutronok 34° alatt lépnek ki a bejövő irányhoz képest.

A startjel detektornak hármas feladata van:

- a) a repülési idő méréséhez startjel szolgáltatás,
- b) a neutrontérszög kijelölése,
- c) a neutronhozam mérése.

a) A neutronok repülési idejének meghatározása a neutronok indulási és érkezési időpontja között eltelt idő mérésével történik. A tríciumtargetből, vagy a szórótargetből való neutronkilépés, és az alfarészecske detektálása között állandó idő-késés van, ami meghatározható a részecskék repülési távolsága és energiája alapján. Az alfajel így betöltheti a startjel szerepét.

b) A gyorsneutronok repülési idő mérésének általunk használt módszerénél legdöntőbb előny, hogy felesleges kollimátor, illetve neutronnyaláb attenuátor alkalmazása. A visszalökött részecske és a neutron haladási iránya között egyértelmű kapcsolat van. Az alfatérszög kijelölése a neutronirány kijelölésével egyenértékű, a térszögön kívül haladó neutronok csak véletlen koincidenziát okozhatnak és a háttérrel képezik. A neutron-kollimálás elhagyása igen nagy előny, mert — amint az ismeretes — hatásos kollimálás, illetve attenuálás ilyen neutronenergiánál nehéz feladat. E módszernél az elmondottak miatt az alkalmazható neutronhozamot a véletlen koincidenziák korlátozzák. Adott feladathoz adott intenzitás tartozik, amelynél a mérési idő optimális.

c) A neutronhozam méréséhez biztosítani kell, hogy csak az alfarészecsből származó jeleket számolja az elektronika. Ez biztonsággal megvalósítható.

Az urántargetből kilépő töltött részecskéket 50 mm átmérőjű 100  $\mu$  vastagságú plasztikfólia és RCA 6810/A elektronsokszorozó detektálta. Ennek elhelyezése olyan volt, hogy az urántargetre vonatkozó térszöge maximális legyen, de a startjel detektor „ne lássa” a plasztikfóliát. Ha az uránfóliától 2 mm távolságra helyeztük el, már kívül esett a neutrontérszögön. Ellenkező esetben az a koincidenencia berendezés, amelyik az urán reakcióban keletkező alfarészecskéket repülési idejük alapján választja ki, szisztematikusan megszólal a 14 MeV energiájú primérneutronokra is.

A detektor urántargetre vonatkozó térszöge  $\omega_x=0,45$  és a forrásneutronokra  $\omega_x^n=8,7 \cdot 10^{-2}$ . A detektor töltött részecskékre vonatkozó hatásfoka egy.

A forrásneutronok is megszólaltatják az alfadetektort, de mivel ezekhez a startjel detektor megszólalása csak véletlenül tartozhat, csak háttérrel okoznak. A detek-



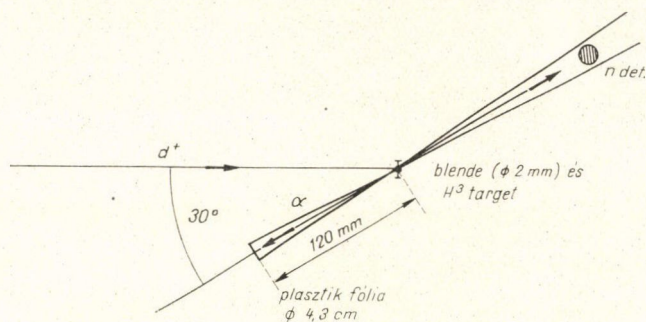
tor 14 MeV energiájú neutronokra vonatkozó hatásfoka meghatározható kísérleti úton a lassú ágbeli amplitúdó spektrumban kijelölt különböző „kapuk” esetén.

100 keV protonenergiának megfelelő küszöbnél a hatásfok értéke  $\varepsilon_n^p(0,1 \text{ MeV}) = 5 \cdot 10^{-5}$ , 0,5 MeV energiával egyenértékű küszöb feszültségnél  $\varepsilon_n^p(0,5 \text{ MeV}) = 5 \cdot 10^{-6}$ .

A neutronokat 5 cm átmérőjű 10 cm hosszúságú NE 102 típusú plastikszcintillátor és RCA 6810/A elektronsokszorozó detektálta. A jobb fénybegyűjtés érdekében a foszfort  $\text{TlO}_2$  reflektáló felülettel láttuk el. Az urántargettől 50 cm távolságban helyeztük el a detektort (8/a, 8/b ábra).

Szükségünk volt a neutrondetektor hatásfokának abszolút értékére és annak energiafüggésére.

A hatásfok abszolút értékét 14,7 MeV energiánál határoztuk meg a 10. ábrán látható target elrendezésben. A neutrondetektort úgy helyeztük el a startjel detektor



10. ábra

által kijelölt térszögben, hogy a detektorra eső 14,7 MeV energiájú neutronok mind-egyikéhez tartozzék alfajel. Meghatároztuk a neutronok repülési idő spektrumában a csúcsban levő beütések számát:  $N(14,7 \text{ MeV})$ . Ebből 14,7 MeV energiára vonatkozó hatásfok értéke

$$\varepsilon(14,7) = \frac{N(14,7)}{N_{st}} \frac{\omega_{st}}{\omega_d},$$

ahol  $\omega_{st}$  és  $\omega_d$  a startjel, illetve a neutrondetektor térszöge a neutronforrásból. A startjel detektorral való koincidencia biztosította, hogy csak a  $T(d, n) \text{ He}^4$  reakcióban keletkező neutronokat regisztráltuk.

A hatásfok görbe relatív menetének meghatározása két lépésben történt. A nagyenergiájú tartományban különböző szögeknél felvettük az izooktánról szóródó neutronok repülési idő spektrumát. A hidrogénen való szórással állítottuk elő a különböző energiájú neutronokat. Ekvivalens tiszta széntargettel megállapítottuk a szénről szórt neutronok számát is s ezt, valamint a véletlen koincidenciákat korrekcióba vettük. A széntarget méreteit úgy határoztuk meg, hogy a bombázó irányhoz képest  $105^\circ$ -os szögben ugyanannyi neutron szóródjon belőle, mint az izooktán targetből. Az  $E_n = E_0 \cos^2 \vartheta$  összefüggésnek megfelelő energiával rendelkező, hidrogénről szórt neutronok repülési időspektruma jól kiemelkedik a háttérből.

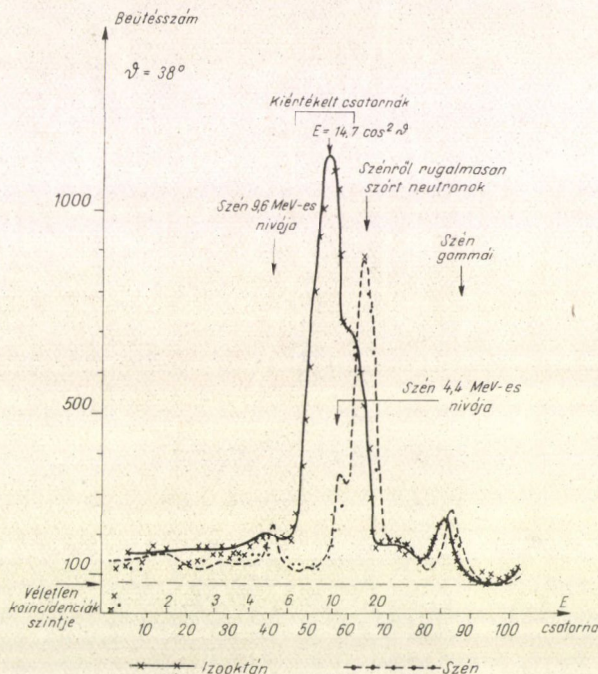
A 11. ábrán feltüntettünk egy adott szögnél izooktánról és szénről szórt neutron repülési idő-spektrumot.



A hatásfok kiszámításánál feltételeztük, hogy a meglökött protonok és meglökött szénatomok amplitúdó spektruma téglalap alakú. Ha a foszforban levő hidrogén és szén makroszkopikus hatáskeresztmetszete  $\Sigma_H$  és  $\Sigma_C$ , akkor az  $l$  hosszúságú plastikfoszfor hatásfokára

$$\varepsilon(E) = 1 + \exp \left[ l \left( \Sigma_H \frac{E - E_H}{E} + \Sigma_C \frac{E - \frac{169}{48} E_C}{E} \right) \right]$$

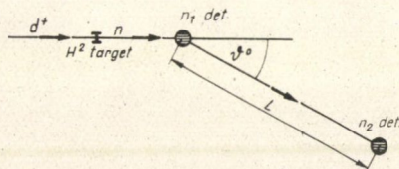
adódik, ahol  $E_H$  és  $E_C$  a protonra, illetve szénatomra vonatkozó energiaküszöb.



11. ábra

A téglalap feltételezés azonban csak nagy energiákon ad jó közelítést. Szerves foszforokban ugyanis a szcintilláció mechanizmusa olyan, hogy a fény-energia összefüggés nem lineáris.

Ez a körülmény szükségessé tette az alacsonyenergiájú tartományban külön a hatásfok menetének megállapítását. A két-három MeV-es tartományban — ahol a fenti eljárás még kielégítő — illesztettük a két görbét. A 13. ábrán feltüntetett elrendezésben mértük a  $D(d, n)\text{He}^3$  reakció három MeV energiájú neutronjainak hidrogénen való szórási spektrumát. Itt ugyanis a szénen való szórás nem játszik szerepet, mert a meglökött szén  $E$  energiája kicsi.

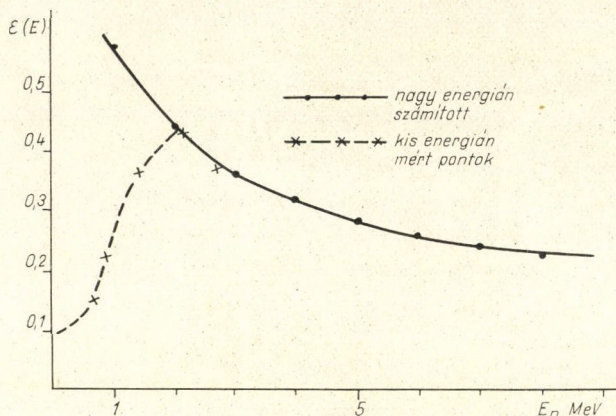


13. ábra



Ennél a neutronreakciónál nem alkalmazható a visszalökött részecske módszer. A  $D(d, n)$  és a  $D(d, p)$  reakció egyformán valószínűek, és az utóbbi protonjai mellett a  $\text{He}^3$  részecskék nem detektálhatóak.

A repülési időmérés startjelét itt a  $n_1$  detektorban meglökött protonok szolgáltatták. Különböző szögek alatt 0,5–2,65 MeV energiatarományban mértük a repülési időspektrumban a csúcsba eső beütésszámot. A 14. ábrán feltüntettük a hatás-



14. ábra

fok menetét ebben az energiatarományban. Az illesztés az  $E_n = 2,65$  és  $2,45$  MeV pontokban történt.

A hatásfok görbe, egy adott energiaérzékenység, azaz elektromos küszöb megadása mellett egyértelmű. A fenti görbénél ez az érték körülbelül 0,2 MeV protonenergia felel meg. Az érzékenységi küszöböt  $^{60}\text{Co}$  és  $^{137}\text{Cs}$  preparátumok gamma-spektrumaiból állapítottuk meg.

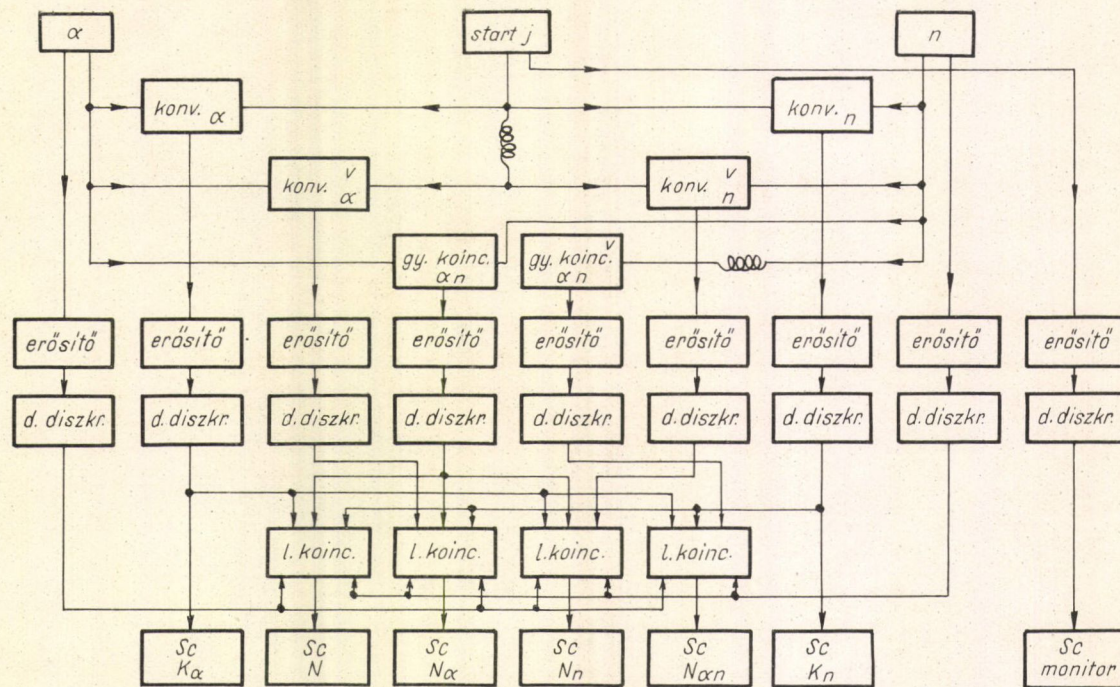
#### IV. 3. A regisztráló elektronika

A regisztráló elektronika blokkvázlata a 15. ábrán látható. A neutronok és alfarészek repülési idejének mérése  $\mu\text{secundumos}$  idő-amplitúdó konverterrel történik. A konverter átfedési elven működik.  $80 \mu\text{secundumos}$  időtarományban lineáris, pontosabban azt mondhatjuk, hogy ebben az intervallumban nonlinearitása  $< 1,5\%$ .

Azokat az eseményeket, amikor az urántargetből kilépő reakciótermékek a neutrondetektort és az alfadetektort is megszólaltatták,  $K_{\alpha n}$  gyorskoincidenca-körrel regisztráltuk.

A detektorok közvetlen energiamérésre szolgáló lassú ágában kiválasztottuk a kívánt amplitúdótarományt, ami az  $^{238}\text{U}$  alfarészecskéinek felel meg, illetve a neutrondetektor oldalon egy adott protonenergia szint fölött van. Ezeket a lassú ágakat és a gyorskoincidencaikat  $2 \cdot 10^{-6} \mu\text{secundum}$  felbontási idejű négyes koincidencaiba kapcsoltuk, és mértük ezek beütésszámát,  $N_{\alpha n}$ -t.





15. ábra



Megjegyezzük, hogy esetünkben a  $K_\alpha$ ,  $K_n$ ,  $K_{\alpha n}$  kettős gyorskoincidenenciáknak lassú koincidenenciába való kapcsolása egyenértékű az olyan hármass gyorskoincidenencia berendezés alkalmazásával, amely a startjel, az alfarészecske és neutrondetektorok megszólalásának egyidejűségét biztosítja. Az ekvivalens hármass koincidenencia időfelbontása pedig a következő kifejezéssel egyenlő

$$\tau_{ekv} = \sqrt{\frac{\tau_\alpha + \tau_n + \tau_{\alpha n}}{6}}.$$

A neutronhozam mérésére szolgáló monitor-rendszer a startjel detektor lassú ágának azokat a jeleit válaszotta ki és számlálta meg, amelyeket a  ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$  reakció alfarészecskéi keltettek. A monitor oldalról kapott automatikusan vezérlést a mérőrendszer valamennyi számlálója.

A 14 MeV energiájú neutronok repülési időmérés elvén történő kiválasztásánál használt  $K_n$  gyorskoincidenencia időfelbontása  $\tau_n = 1.8$   $\mu\text{s}$ . Beállítása a primérneutronokkal történt.

A  $K$  konverterrel választjuk ki az  ${}^{238}\text{U}(n, n'\alpha)$  reakció alfarészecskéit és az urántargetben neutronok által keltett egyéb magreakciók töltött részecske termékeit. Itt a repülési idő alapján ezek között szelekció nem történik. A gyorskoincidenencia beállításánál ezen részecskék repülési idő csúcsát vettük fel. Időfelbontása  $\tau_\alpha = 5$   $\mu\text{s}$ .

A  $K_{\alpha n}$  gyorskoincidenencia időfelbontása  $\tau_{\alpha n} = 10$   $\mu\text{s}$  volt. Beállítása a startjelhez viszonyítva az alfa- és neutronágakban megfelelő idejű késleltetéssel történt.

Az uránfólia elhelyezése 0,1 mm pontosságot kíván. A target helyén ugyanis a startjel detektor térszögének a vertikális síkba eső mérete 0,4 mm. A  $K_\alpha$  koincidenenciaszámot mérve, a targetfólia helyének módosításával beállíthattuk, illetve ellenőrizhettük a geometriát, hogy a targetfólia teljesen a térszögbe kerüljön úgy, hogy az alfadetektor plasztikfóliája pedig ezen kívül legyen.

A targetnek a neutronforrásra vonatkozó térszögértékét kísérleti úton ellenőriztük a hasadás, és az  ${}^{16}\text{O}(n, x)$  reakciók ismert hatáskeresztmetszete alapján. Megszámoltuk a  $K$  koincidenenciákat. A tartóanyagok jelenlétét úgy vettük figyelembe, hogy ugyanolyan, uránoxid réteg nélküli módon is mértük  $K_\alpha^h$ . A target térszögére az ellenőrző mérés alapján

$$\omega_t = \frac{K_\alpha - K_\alpha^h}{N_0(2P_H - P_0)\omega_\alpha} = 2,1 \cdot 10^{-5}$$

értéket kaptunk. A számított érték  $2,5 \cdot 10^{-5}$  volt. Itt  $P_H$  a hasadás,  $P_0$  pedig az  ${}^{16}\text{O}(n, \alpha)$  reakció valószínűsége a targetben. A többi reakció hatáskeresztmetszete ezek mellett elhanyagolható.

A térszög ilyen módon való meghatározása azonban csak akkor helyes, ha az uránréteg vastagságában nincsenek durva egyenetlenségek, azaz mindenütt elég vékony ahhoz, hogy a hasadási termékek és a 4 MeV energiájú alfarészek is kilépjenek belőle. Ez teljesült, amiről az ismert mennyiségű uránoxid természetes radioaktivitásából származó alfarészecskék megszámlálásával győződünk meg.



## IV. 4. Véletlen koincidenenciák

A szisztematikus koincidenenciaszám a bombázó neutronok intenzitásának lineáris függvénye. A véletlen koincidenenciák száma pedig

$$N_v = aN_0^k$$

alakú összefüggés szerint változik.  $k$  a különböző típusú véletlen eseményeknél más és más értéket vesz fel.

Ha a véletlen koincidenenciákat a mérésnél korrekcióba akarjuk venni, akkor az olyan beállításoknál, amelyeknél csak a különböző véletlen eseményeket regisztráljuk, mérjük a koincidenenciaszámot. Ahhoz azonban, hogy a koincidenenciaszám korrigálását a kívánt pontossággal hajthassuk végre, a neutronintenzitást egy adott intervallumon belül állandó értéken kell tartani a „valódi” és „véletlen” mérés teljes ideje alatt (nap nagyságrend). Az általunk használt neutronforrástarget geometriája és a kívánt  $10^7$ – $10^8$  neutron/sec. neutronhozam mellett ez komoly, nehezen megvalósítható feladat. Ezért a véletlen események számát párhuzamosan mértük a valódi koincidenenciákkal. Ezt a célt szolgálták a 15. ábrán feltüntetett  $K_\alpha^v$ ,  $K_n^v$ ,  $K_{\alpha n}^v$  gyorskoincidenencia egységek és a különböző, lassú koincidenenciák, amelyek beütése  $N_\alpha^v$ ,  $N_n^v$ ,  $N_{\alpha n}^v$  és  $N_{\alpha, n, \alpha n}^v$ .

A szisztematikus koincidenenciák meghatározásához osszuk fel a lassú koincidenencia szisztematikus és véletlen megszólalásait a következő, egymást kizáró, teljes rendszert alkotó eseményekre:

1. TÁBLÁZAT

$K$	Sz				$V$			
$K_n$	Sz		$V$		Sz		$V$	
Startjel	közös	más	közös	más	közös	más	közös	más
$K$	Sz $V$	Sz $V$	Sz $V$	Sz $V$	Sz $V$	Sz $V$	Sz $V$	Sz $V$
Startjel, koinc. szám	$n_a$ 0	0 $n_b$	0 $n_c$	0 $n_d$	0 $n_e$	0 $n_f$	$n_g$ $n_h$	0 $n_i$

Normális beállításban a szekundumonként mért koincidenenciaszám

$$N = n_a + n_b + n_c + n_d + n_e + n_f + n_g + n_h + n_i.$$

Azokban a lassú koincidenencia körökben mért beütésszám, amelyek a  $K_\alpha^v$  és  $K_n^v$  konverterek közül csak az egyiket tartalmazzák

$$N_\alpha^v = n_e + n_f + n_h + n_i,$$

$$N_n^v = n_c + n_d + n_h + n_i.$$

$N_\alpha^v$  azon eseményeknek a száma, amikor a  $K_\alpha$  konverter csak véletlenül,  $N_n^v$  pedig azoké, amikor  $K_n$  véletlenül szólalt meg.

Ha az alfa és neutrondetektor egy időben szólalt meg  $K_{\alpha n}$  szisztematikus koincidenenciát jelzett, de ehhez startjel nem tartozott, azaz  $K_\alpha$  és  $K_n$  véletlen eseményt



mért. A teljesen véletlen koincidenenciákat pedig akkor kapjuk, ha mindegyik gyors-koincidenencia megszólalása véletlen volt:

$$N_{\alpha, n, an}^v = n_h + n_i.$$

A mérési adatokból képezzük a következő mennyiséget:

$$N - N_{\alpha}^v - N_n^v - N_{an} + 2N_{\alpha, n, an} = n_a + n_b.$$

$n_b$  kifejezhető az alfa- és neutrondetektorok szisztematikus megszólalásaival és  $K_{an}$  felbontási idejével:

$$n_b = 2n_{\alpha}n_n\tau_{an}.$$

Esetünkben  $\tau_{an}=10$   $\mu$ sec., így ez  $n_b$  értékét a többiekhez képest elhanyagolhatóvá teszi. A tiszta véletlen események száma is kicsi ( $N_{\alpha, n, an}$ ), így ennek mérése is szükségtelen volt.

Az  $U^{238}(n, n'\alpha)$  reakcióból származó koincidenenciák száma, amit a mérés kiértékelésénél fel kell használnunk

$$N_u \equiv n_a = N - N^v.$$

#### IV. 5. A mérőberendezés ellenőrzése az $U^{238}$ mag hasadása segítségével

A teljes mérőberendezést az  $U^{238}$  mag 14 MeV energiájú neutronokra vonatkozó hasadási hatáskeresztmetszetének megmérésével ellenőriztük. A neutronokra vonatkozó időfeltételt ekkor úgy állítottuk be, hogy minden hasadásból származó neutront detektálni tudjunk. A detektor lassú ágában pedig gondoskodtunk arról, hogy a hasadási termékek számlálásában veszteség gyakorlatilag ne legyen.

Az így kapott hatáskeresztmetszet értéke 1,2b, amíg az irodalmi érték  $\sigma_h=1,1b$ .

#### IV. 6. Az $U^{238}(n, n'\alpha)$ reakció hatáshatáskeresztmetszete

Az adatbegyűjtést két napig folyamatosan végeztük. Ez idő alatt  $N=2140$  és  $N_v=137$  koincidenenciát kaptunk. Ezek a statisztikus hibán belül megegyeznek. A hiba alapján a keresett reakció hatáskeresztmetszetére egy korlát adható meg. A kétszeres statisztikus hibát tekintve már 90%-os biztonsággal tekinthető felső korlátnak. Tehát ha az effektus létezik, úgy a kérdéses reakciótól származó beütésszám

$$N_u \leq \sqrt{N}.$$

Ebből a reakció hatáskeresztmetszete

$$\sigma \leq 0,5 \text{ mb}$$

ellentétben a várt 15 mb értékkel.

Ebből következik, hogy ha az  $U^{238}(n, n'\alpha)$  reakció végbe is megy, nem tudja magyarázni az  $U^{238}$  magon a gyorsneutronok kisszögű rugalmas szórásánál talált anomáliát.



Az „anomálishan” viselkedő magok másik közös, de a vizsgált többi magtól eltérő tulajdonsága a hasadóképeség. Annak a tapasztalatnak a kapcsán, hogy az effektus 500 keV-on még nem jelentkezik és az energiával nő — legalábbis az uránnál, itt ismerünk különböző energiájú mérési adatokat — *Elwyn* és munkatársai [5] feltételezték, hogy a direkt ( $n, n'$ ) hasadási folyamat szolgáltatja a kérdéses neutronokat a rugalmas szóráshoz. Úgy gondolták, hogy az anomáliák a bombázóenergiával való változásában a hasadási hatáskeresztmetszet energiafüggése jelentkezik. A hasadási küszöb értéke, közelítőleg 0,6 MeV az  $^{238}\text{U}$  magnál, így magától értetődő lenne, hogy 500 keV-on miért nem találtak anomáliát.

Az ( $n, \alpha n'$ ) reakció kísérleti vizsgálatánál alkalmazott mérési módszerünk valamennyi olyan ( $n$ , töltött részecske  $n'$ ) típusú folyamat együttes hatáskeresztmetszetét szolgáltatta, amelyben a töltött részecske legalább a detektálás szempontjából  $E_p = 0,4$  MeV-al egyenértékű energiával rendelkezik, így a hasadási folyamatát is. A kontroll mérések során meg is győződünk róla, hogy a hasadási termékeket a detektorunk gyakorlatilag veszteség nélkül regisztrálta.

Kijelentjük, hogy az ( $n, \alpha n'$ ) reakció hatáskeresztmetszetére kapott felső korlát az olyan hasadási folyamatára is vonatkozik, ahol kis szögekben egy neutron  $E_n \cong 12$  MeV energiával lép ki. Így módunkban állt annak a lehetőségét is kizárni — legalábbis 14 MeV bombázóenergián, ahol az effektusnak legjobban kellene jelentkeznie —, hogy a direkt ( $n, n'$ ) hasadási folyamat felelős az anomáliáért [22].

## V. 14,7 MeV ENERGIÁJÚ NEUTRONOK RUGALMAS SZÓRÁSÁNAK KÍSÉRLETI VIZSGÁLATA URÁNON

Feltehetjük a kérdést, vajon az anomáliára tett kijelentések elég megalapozottak-e abban az értelemben, hogy a konkrét mérési eredményeket az azoknak megfelelő, elméleti értékekkel vetették-e össze. Az elméleti megfontolások mindig egy sor feltételezésen alapulnak, teljesülnek-e ezek az U ( $n, n$ ) folyamatban? A kísérleti eredmények többségét, a legpontosabb 14 MeV-os adatokat is, a „fekete mag” modell alapján interpretálták, amely ugyan egy sor atommagon való neutron szórás esetére jó eredményt adott, és az irodalomban több olyan munkát találunk, amelyben megmutatják a „fekete mag” modell használatának jogosságát MeV nagyságrendű bombázó energiánál,  $9 < 20$ — $25^\circ$  szögtartományban nehéz magokon történő neutron szórás leírására [34]. Ismeretes, hogy a  $^{238}\text{U}$  mag deformált, és rotációs állapotai nagy valószínűséggel gerjednek gyors neutron szórásban, amelyet kísérletileg, mérés-technikai okokból, nem tudunk különválasztani. Elegendő-e a rugalmatlan járulékok szempontjából *Dukárjevis* és munkatársainak az a megfontolása, amely szerint kis szögekben e járulékok elhanyagolható a rugalmatlan szóráshoz képest.

Az urán szórásproblémájának tisztázásához, a szórás precíz analíziséhez elégséges kísérleti adatokat nem találtunk az irodalomban. A rugalmas szórás differenciális hatáskeresztmetszetét különböző mérések szolgáltatták — esetleg különböző szisztematikus hibával a kis szögek [3] és  $9 > 15^\circ$  tartományban [23, 24] 1,5 és 1,8 MeV energiafelbontás mellett. A rugalmas szórási adatokhoz, különösen nehéz magoknál a rugalmatlan szórás is járulékot ad az energiafelbontás korlátai miatt, ami erősen deformált magoknál, az alacsonyban fekvő kollektív állapotok direkt kölcsönhatásban való intenzív gerjesztése miatt számottevő. *Coon* és *Hudson* [23, 24]-ben közölt optikai modell számításokat 14,2 és 15,2 MeV neutron energiánál. A mérési tartományuk-



ban illesztett optikai potenciál paramétereivel kiszámítottuk a differenciális hatáskeresztmetszetet kis szögekben. Ezt összevetve Dukárjevic kis szögű adataival, még erősebb eltérés mutatkozott, mint az általuk használt diffrakciós modell szerint (a VII. fejezet, 27. ábra).

Az urán rugalmas szórásának mérésénél még optimális esetben sem tudjuk az energiafelbontási korlátok miatt a rugalmas szórást elkülöníteni a szórási adatokban. Azt kell biztosítanunk, hogy csak azon állapotok gerjesztésére vezető rugalmatlan szórást mérjük együtt a rugalmassal, amelyek szerkezete a magspektroszkópiából, gerjesztési módja a reakciómechanizmusok vizsgálatából ismert. Arra törekedtünk tehát, hogy megmérjük 14,7 MeV energiájú neutronok rugalmas szórásának differenciális hatáskeresztmetszetét kis és nagy szögekben uránon oly módon, hogy a

$$\sigma_{\text{exp}}(\vartheta) = \sigma_{n,n}(\vartheta) + \sum_I \sigma_{n,n'}(\vartheta, 0^+ \rightarrow I^+)$$

kifejezésben az összegezést csak az alapállapotú rotációs sáv első  $2^+$ ,  $4^+$ ,  $6^+$  spin és paritású állapotaira korlátozzuk. A jobb oldalon álló mennyiség az általánosított optikai modell alapján csatornacsatolós módszerrel kiszámítható.

Röviden ismertetjük a neutronok szögeloszlásának vizsgálatánál használt mérőberendezést.

### V. 1. Négycsatornás gyors neutron repülési idő spektrométer

A neutronok repülési idejének mérésére az indulási időpont kijelölésének módjától függően két lehetőségünk van: a neutront keltő reakcióban visszalökött társrészecske detektálása [25], illetve a neutronok impulzus üzemben való előállítása [26] segítségével. A kísérleti feladat természetétől függően sok előny származik a két módszer kombinálásából [27]. Itt a mérésünkénél használt, csatolt részecske módszerrel működő spektrométerrel foglalkozunk bővebben, amellyel egyidejűleg négy szöghelyzetben mérhetünk.

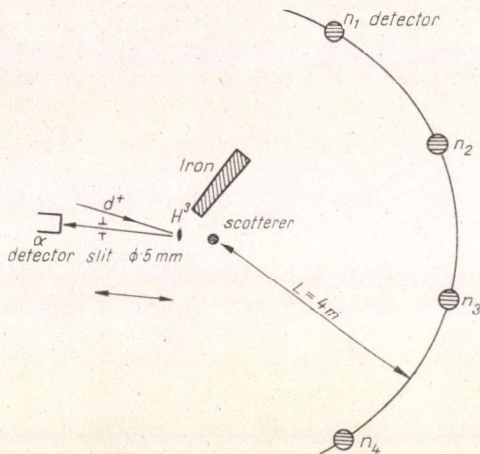
#### V.1.1. A neutronforrás és a detektorrendszer

Neutronforrásként a  ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$  magreakciót használtuk, amelyhez a bombázó deutériumnyaláb 200 keV-os Cockroft—Walton-féle gyorsító szolgáltatja. Az atomion komponens mágneses eltérítés, elektrosztatikus kvadrupól lencsékkel való fókuszálás után jut a tríciumtargetre. Lehetőség van a neutronok impulzusüzemben való előállítására is. E célból a nyaláb egy nagyfrekvenciás eltérítő lemezpáron halad át. A  ${}^3\text{H}$  target elé, a deuterium nyaláb útjába  $0,1 \times 0,5$  mm-es rést helyeztünk el. Hogy e blende, mint intenzív selbtarget, távol kerüljön a neutronforrástól, és egyben a selbtarget neutronoktól leárnyékoljuk a neutrondetektorokat. A neutronforrás méretét megszabó „blende” 50 cm hosszú, két 5 cm sugarú félhenger alakú vastömb volt, egymástól 0,5 mm távolságra helyezve.

A neutronreakcióban visszalökött  $\alpha$  részecskék detektálása hármas célt szolgál: a repülési idő kezdeti időpontját és a bombázó neutron térszöget jelöli ki, továbbá monitor szerepet tölt be. Az  $\alpha$  részecskékkel kijelölt neutronnyaláb irány szerinti szórását az  $\alpha$  detektor térszöge, és a neutronokat keltő deutériumnyaláb energiaszórása határozza meg.



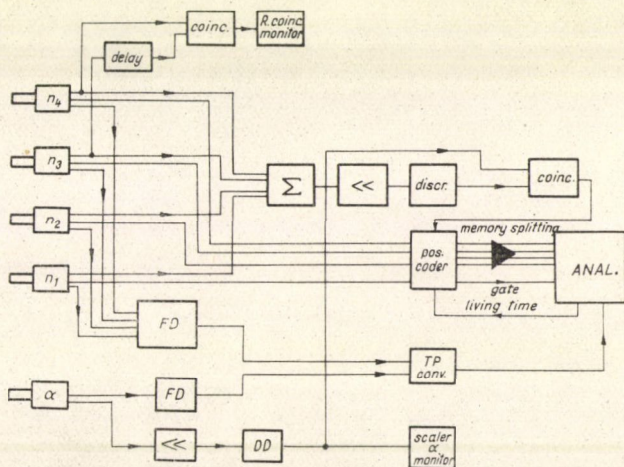
$\alpha$  detektorként 100  $\mu$  vastagságú plastik szcintillátor fólia és 56 AVP fotoelektronsokszorozó szolgál. A  $^3\text{H}$  target  $\beta$  részecskéinek és a szórt deutérium nyalábnak az abszorpciójáról alumíniummal begőzölt 3–5  $\mu\text{g}/\text{cm}^2$  polietilén fólia (6  $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ ) gondoskodik. A neutronokat négy darab, egyenként 5 cm átmérőjű, 10 cm hosszúságú NE 102 típusú plastik szcintillátor és 56 AVP fotoelektronsokszorozó detektálja. A jó fénybegyűjtés érdekében a foszfort  $\text{TiO}_2$  reflektáló felületi réteggel láttuk el. A neutrondetektorokat a  $\gamma$  háttérsugárzástól 3 cm vastag, a szórótárgyat felé nyitott ólomköpennyel, a direkt neutronoktól pedig 70 cm hosszúságú vas hasábbal árnyékoltuk le. A hasáb másik két méretét úgy választottuk meg, hogy annak a neutronforrásra való térszöge  $\Omega_s \approx \Omega_{d+pb}$  legyen, ahol  $\Omega_{d+pb}$  a detektor és ólom köpenyének a neutronforrásra vonatkozó térszöge. A padlón és környező falakon szóródott neutronok ellen külön árnyékolást nem alkalmaztunk. Ezekről lehetőleg távol (2–4 m) helyeztük el a detektorokat. A 16. ábrán egy tipikus, az urán szóráskísérletben alkalmazott detektor és targetelrendezést tüntetünk fel.



16. ábra

### V.1.2. A repülési idő spektrométer elektronikus rendszere

A mérőrendszer blokkvázlatát a 17. ábrán tüntettük fel. A részecske-detektorok az  $\alpha$ -detektorban levő „keményosztótól”, 2 mA átlagáramnak megfelelő terhelhetőségtől eltekintve azonos felépítésűek. A detektorok energiáival arányos — analóg —



17. ábra



ágában elhelyezett erősítőket a kellő linearitás biztosítása érdekében az utolsó előtti dinódáról vett jelekkel vezérleljük. Az analóg jeleket már az egyes detektorokban bifázisúra formáljuk és így a szinteltolódásból származó problémákat még viszonylag nagy beütésszámoknál ( $10^6/\text{sec}$ ) is sikerült elkerülni. A neutronok indulási, illetve érkezési jelét szolgáltató „gyors” ág változtatható érzékenységű formálókörét az utolsó dinóda jele vezérli. A neutrontektorok gyors jelei egy alacsony indulási szintű, gyors működésű, kis időszórású négy bemenetű integrál diszkriminátoron keresztül vezérlik az egyes csatornákra azonos átalakítási tényezőt biztosító átfedési elven működő konvertert. A konverziós jelek mind a négy csatornára vonatkozó optimális „kompenzálása” egy négy-bemenetű, csatornánként változtatható csillapítású passzív összegezővel történik. (A kompenzálás problémájára még visszatérünk.)

A véletlen koincidenciák számát egy alkalmas időfelbontású, a megválasztott konverziós időtartománnyal egyező késleltetésű koincidenciaegység a szimmetrikus konverziós görbe egyik monoton szakaszának kiválasztásával felére csökkenti.

Mivel a konverziós csatorna közös, a sokcsatornás amplitúdó analízátor tárolójának osztását a neutrontektorok analóg ágáról vezérleljük. Ezen ágakban jelentkező nagy beütésszámok okozta hibás szektorkijelölés elkerülése céljából a szektorválasztó az analízátor „élő idő” kimenetével mindaddig tiltva van, amíg az analízátor analóg bemenetére jel nem érkezik. További téves szektorkijelölés történhet az analízátor felfutás kivárása következtében, ha egy szisztematikus esemény előtt vagy után, adott időn ( $2\text{ }\mu\text{sec-on}$ ) belül valamely más neutrontektor is megszólalt. Ezen eseményeket egy  $2,5\text{ }\mu\text{sec}$  felbontási idejű, a 4 neutroncsatorna összes lehetséges kettős koincidenciáit vizsgáló áramkörrel tiltjuk ki az analízátor kapuzását végző áramkör antikoincidencia bemenetén. Ez a koincidencia-egység biztosítja azt is, hogy csak azon események kerüljenek tárolásra, amelyeknél az analógági kívánt amplitúdófeltételek teljesüljenek.

A vezérlő lehetőséget biztosít a mérés automatikus vezérlésére. Az ismételt több ciklusú mérési mód a teljes mérési idő szakaszokra bontásával lehetőséget nyújt arra, hogy a hosszú idejű instabilitásokat kiküszöböljük. Az automatikus üzemmódban „mérés” szüneteltetési lehetőség van biztosítva, amely pl. a gyorsító neutronhozamának megengedett értékhatáron túli ingadozásának időtartamára a mérést automatikusan szünetelteti. Az információkivétel az adattovábbítás és feldolgozás megkönnyítése érdekében telex-rendszerrel történik.

### V. 1.3. A spektrométer energiafelbontása

A repülési idő mérésén alapuló energia meghatározás elsőrendű problémája az időfelbontás. A repülési időből a neutronenergia a következő módon számítható

$$E = \left( \frac{72,3L}{t} \right)^2,$$

ahol  $E$  a neutronok energiája MeV-ben,  $t$  a repülési idejük  $\mu\text{secundumban}$  és  $L$  a megtett út méterben. A relatív energiabizonytalanság pedig

$$\frac{\Delta E}{E} = 2 \frac{\Delta t}{t}.$$

Az időmérés hibája tehát kétszeres súllyal lép fel az energiaszórásban.



Az energiafelbontás javítható a távolság növelésével ez azonban a mérési időt változtatlan szisztematikuss/véletlen koincidencia viszony mellett négyzetesen meghosszabbítja. Ezért célszerű az időmérés pontosságát, amennyire lehetséges fokozni.

A konverter időszórásának a forrása — kis hányadától eltekintve — a konvertert működtető jelek időszórása.

A  $H^3(d, n)He^4$  reakcióban visszamaradó alfarészek egy  $V_0$  amplitúdójú jelet, illetve a detektor felbontóképességének megfelelő  $V_0 \pm \Delta V$  intervallumba eső jelet keltenek. A neutrondetektorban pedig a protonok amplitúdó spektruma folytonos, a  $0 < V < V_0$  intervallumban közel egyforma a valószínűségük. Ebből eredő időszórás a domináló. A különböző amplitúdójú impulzusok felfutásának meredeksége különböző, ezért más és más időpontban érik el a rendszer indulási szintjét, ( $U_k$ ). Emiatt az egyszerre keletkező, de különböző nagyságú jeleket a konverter más időpontban észleli, ( $U_t$ ). Az időkéés nagysága  $\Delta t$  az impulzus meredeksétől, impulzus amplitúdójától, valamint a konverter indulási szintjétől függ, és néhány műsecundumot is elérhet.

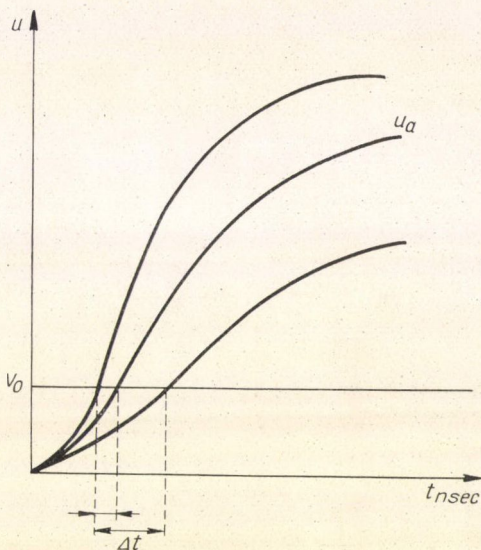
Ha kisenergiájú neutronokat is jó hatásfokkal akarjuk detektálni, akkor az összes fotoelektrontól származó töltést be kell gyűjteni. Ez esetben a formáló fokozat bemenetén az elektron-sokszorozó áramimpulzus-integráljával arányos jelet kapunk. Az impulzus  $V$  nagysága arányos az össztöltéssel, azaz a meglökött protonok  $E_p$  energiájával, felfutási ideje pedig gyakorlatilag a szcintilláció lecsengési idejének néhányszorosa ( $T$ ) (18. ábra). Ha felfutást közelítőleg lineárisnak vesszük, akkor a  $V$  nagyságú impulzus a  $V_0$  indulási szint miatt

$$\Delta t = T \frac{V_0}{V}$$

idővel később indítja a konvertert. Ezért a konverter kimenetén

$$\Delta U(V_0, V) = AT \frac{V_0}{V}$$

értékkel kisebb jelet kapunk, mint ami a valódi repülési időnek megfelelne (az  $A$  mennyiség, a konverter és az utána következő erősítő tulajdonságaitól függ a bemenő jelek közti 1 műsecundum időeltolódásának megfelelő kimenő feszültségkülönbség). Ha tehát a neutrondetektor  $V$  nagyságú jeléből képezett  $\Delta U$  feszültséget analízis előtt hozzáadjuk a konverter eredeti  $U$  kimenő jeléhez és az így kapott  $U' = U + \Delta U$

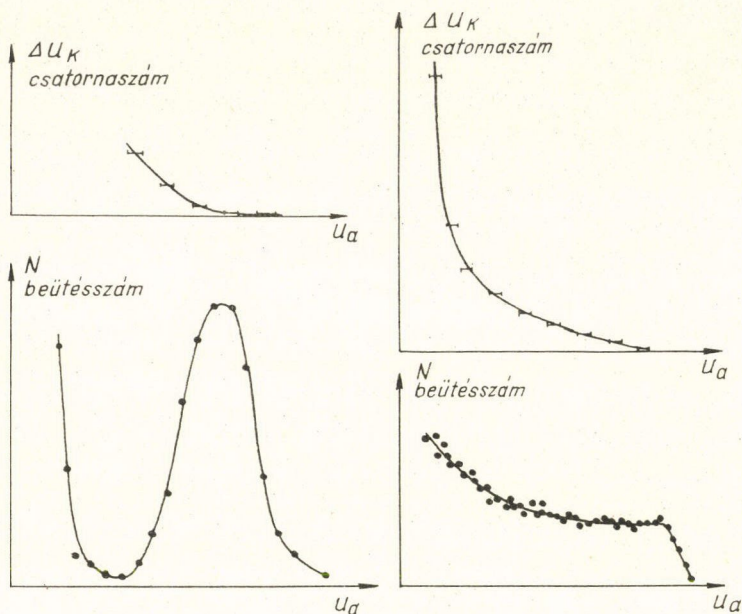


18. ábra



feszültségből állapíthatjuk meg a neutron energiáját, úgy ezt a típusú időbizonytalanságot kiküszöböltük.

A  $\Delta t(V_0, V)$ , illetve a  $\Delta U(V_0, V)$  függést a 14 MeV energiájú neutronok repülési időspektrumának analízisével ellenőrizhetjük. A detektor jeleinek amplitúdóspektrumából olyan szűk  $(V, V + \Delta V)$  intervallumot választunk ki, amelyre  $\Delta t(V)$  elhanyagolható, tehát e jelekhez tartozó repülési időspektrum mentes az amplitúdókülönbségtől származó időszórástól.



19. ábra

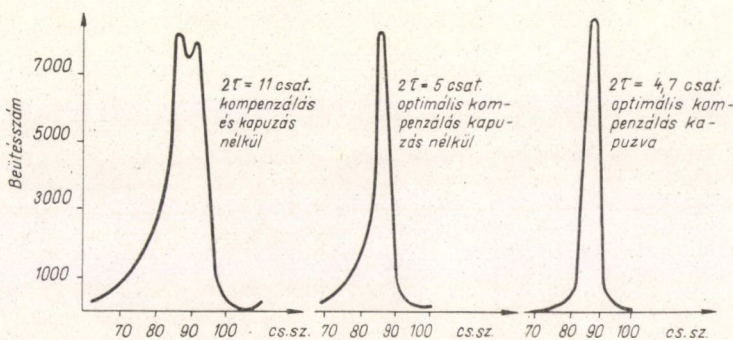
A  $\Delta U(V_0, V)$  függvény mérésel meghatározható. A 19. ábrán az  $\alpha$  és neutron-detektorok jeleitől származó időszórást mutatjuk be az amplitúdók függvényében.

A gyakorlati megvalósításnál nem szükséges a kompenzálást ilyen feszültségfüggvény szerint végezni. A korrekció lényege olyan, hogy nagy amplitúdójú jelhez kis, kicsihez viszont nagy korrekciót kell adnunk. Ezt ugyanis elérhetjük, hogy a konverter kimenő jeléhez hozzáadunk egy  $W$  állandó értéket és ebből kivonunk egy a detektor energiamérésre szolgáló lassú ágának jelével arányos mennyiséget.

A konverter időfelbontásának ily módon való korrigálását kísérleti úton állítottuk be, illetve ellenőriztük a felbontási idő csökkentésének mértékét. A 14,7 MeV energiájú forrásneutronok repülési idő csúcsát tüntettük fel a 20. ábrán kompenzálatlan, valamint kompenzált és a lassú ágról 0,5 MeV protonenergiának megfelelő szintről kapzott módon.

Az időfelbontás optimális értéke 3 MeV protonenergiának megfelelő küszöbérzékenységnél  $\tau = 1,3$   $\mu$ sec volt (félmagasban a teljes szélesség), amely az elektronika instabilitása miatt hosszú mérési idő alatt 1,8  $\mu$ sec-ra szélesedett.





20. ábra

Ha a neutronokat impulzus üzemben keltjük a targetben, az időmérés bizonytalanságához a fenti  $\tau$ -hoz egy további tényező, az áramimpulzus hossza  $\tau_p$  is hozzájárul. A spektrométer időfelbontását a

$$\tau = \sqrt{\tau^2 + \tau_p^2}$$

összefüggés szolgáltatja.

#### V. 1.4. A spektrométer háttérproblémái

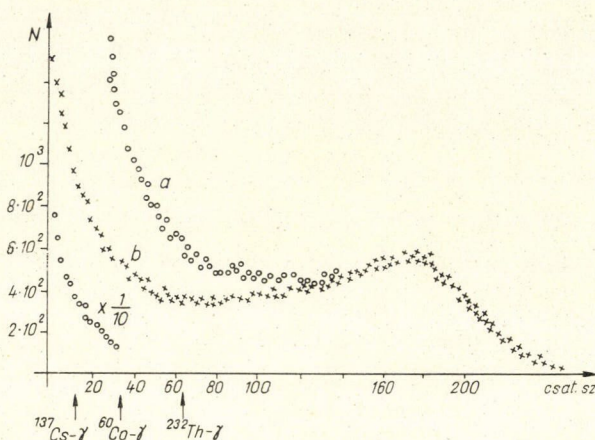
Mivel a gyors neutron kísérletek hosszú mérési időt igényelnek, fokozott figyelmet érdemel az elérhető jel/háttér viszony kérdése a repülési idő spektrométer egyes üzemmódjaiban (folytonos, pulzált vagy a társrészecske detektálása a pulzással összekapcsolva) jelentkező háttér egyes komponenseinek súlya, azok összehasonlítása. Az egyes módszerek különböznek a megvalósítható felbontás szempontjából is. Adott kísérleti feladatnál szükséges energiefelbontási igény kielégítése után ha szabadságunkban áll a mérési módszer megválasztása, célszerű a jel/háttér kérdés alapján tenni azt. Itt ehhez adunk meg az összehasonlításunkra alkalmas összefüggéseket.

A társrészecske detektálásának módszerénél a részecske számára kijelölt térszög ( $\Omega_n$ ) megszabja a bombázó neutron térszögét is. Az ezen kívül haladó neutronok ( $\bar{N}_0 \Omega_n$ , ahol  $\bar{N}_0$  a forrásból az egységnyi térszögben időegység alatt kilépő neutronok átlagos száma,  $\Omega_n$  a detektornak a forrásra vonatkozó térszöge) vagy direkt jutnak a detektorba, vagy  $\Omega_n$ -ben elhelyezett árnyékolás miatt csak  $\bar{N}_0 \Omega_n t$  ( $t < 1$ ) éri el a detektort. A forrásból kilépő neutronok a környező anyagokban (falak, padló, szerelvények, levegő) többszörös ütközéssel irány és energiacsökkenést szenvednek. A neutronok „bolyongását” az inelasztikus szóródások miatt  $\gamma$  emisszió kíséri.  $\varepsilon_0$  jelölje a detektor forrásneutronokra vonatkozó megszólalási valószínűségét. A  $t_{e0}$  mennyiség erősen függ a spektrométer küszöbérzékenységétől. Ha neutronforrás ( $d, n$ ) reakció, a gyorsítócső és a targetszerelvényeken való selfstarget képződés folytán további háttérneutronok jelentkeznek.

Jelölje  $\chi$  a detektorra eső háttér  $n$  és  $\gamma$  részecskék és a forrásból direkt a detektorba jutó neutronok számának viszonyát!  $\chi$ -t sok tényező befolyásolja, a távolság, környezet, a bombázó nyaláb fókuszáltsága stb. Legyen  $\bar{\varepsilon}$  a detektornak a háttér-részecskékre vonatkozó átlagos megszólalási valószínűsége.



$\chi$  jelentését és meghatározásának módját a 21. ábra szemlélteti, ahol a detektor amplitúdóspektrumát tüntettük fel, valamennyi (a) és a szisztematikus  $n-\alpha$  koincidencia alapján kiválasztott forrásneutronoktól származó (b) detektormegszólalásokra.

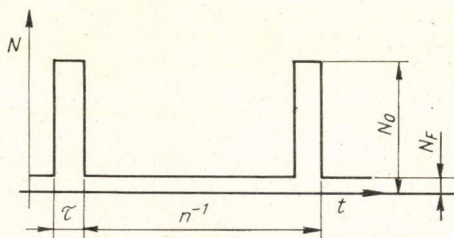


21. ábra

A háttér véletlen koincidenziák száma  $\Delta t$  időintervallumban egységnyi idő alatt

$$K_v^{\alpha} = N_0^2 \Omega_{\alpha} \Omega_n (\varepsilon_0 t + \bar{\varepsilon} \chi) \Delta t.$$

Pulzált üzemű neutronforrás hozamának időbeli eloszlását a 22. ábra szemlélteti. Tipikus értékek  $\tau = 2$  msec és  $n = 10$  MHz.



22. ábra

$N_F$ -t a targetáram folytonos komponense okozza, azon részecskék, amelyek a pulzálóegységen való áthaladásnál nem rendelkeztek töltéssel. Itt alkalmazott töltésválogatás — egyenfeszültségű eltérítés — segítségével  $N_F$ , tehát  $k$  csökkenthető.  $k$  értékét a gyorsító geometriája, ionoptikája, gyorsítócsőben levő nyomás szabja meg.  $k$  spektrométerünk jellemző néhány értékét a 2. táblázatban mutatjuk be.

Megjegyezzük, hogy ha az áramimpulzusokat gyorsítás előtti előpulzálással és sebességmodulációval állítjuk elő mind

$\chi$ , mind a  $k$  értéke jelentősen csökken. A véletlen koincidenziák száma az áramimpulzusnak megfelelő időintervallumban

$$K_{p,p}^v = N_0 \Omega_n [n \tau \varepsilon_0 + (\tau n + k) \chi \bar{\varepsilon} \tau n],$$

az áramimpulzusok között pedig

$$K_{p,k}^v = N_0 \Omega_n [n t k \varepsilon_0 + (\tau n + k) \chi \bar{\varepsilon} n] \Delta t.$$



## 2. TÁBLÁZAT

nyomás	$k$	
	$10^{-5}$ Hgmm	$10^{-4}$ Hgmm
egyszerű pulzálás	$2 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$
töltésválogatás a target előtt	$6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$
töltésválogatás a pulzáló egységben	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$

A társrészecske detektálás és pulzálás együttes alkalmazásánál pedig az impulzusban és impulzusközökben a véletlen koincidenciák számát

$$K_{\alpha+p,p}^v = N_0^2 \Omega_\alpha \Omega_n [t\varepsilon_0 + (n\tau + k) \bar{\varepsilon}\chi] \Delta t,$$

$$K_{\alpha+p,k}^v = N_0^2 \Omega_\alpha \Omega_n [kt\varepsilon_0 + (n\tau + k) \bar{\varepsilon}\chi] (n\tau + k) \Delta t$$

összefüggések adják meg.

Konkrét kísérleti feladatnál a mérés jellemzői a szükséges mérési idő és a jel/háttér viszony  $r$ .  $P$  jelölje annak valószínűségét, hogy a vizsgált reakció bekövetkezik a targetben és a szórt  $\bar{i}_n$  repülési idejű neutron a detektor által kijelölt irányba lép ki. Legyen  $\bar{i} \leq \bar{i}_n \leq \bar{i} + \Delta t$  és a detektor megszólalási valószínűsége a szórt neutronokra  $\varepsilon$ , a target neutronforrásra vonatkozó térszöge  $\Omega_t$  és  $\Omega_t = \Omega_\alpha$ . A megfelelő jel/háttér kifejezések:

$$r_\alpha = \frac{P}{\Delta t} \frac{1}{N_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 t + \bar{\varepsilon}\chi}.$$

Társrészecske módszernél:

$$r_\alpha = \frac{P}{\Delta t} \frac{1}{N_0} \frac{\varepsilon}{t\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}\chi}.$$

Pulzálásnál az impulzus alatt

$$r_{p,p} = \frac{P}{\Delta t} \Omega_t \tau \frac{\varepsilon}{t\varepsilon_0 + (n\tau + k) \bar{\varepsilon}\chi}.$$

Az impulzusok között:

$$r_{p,k} = \frac{P}{\Delta t} \Omega_t \tau \frac{\varepsilon}{kt\varepsilon_0 + (n\tau + k) \bar{\varepsilon}\chi}.$$

A két módszer kombinálásánál az impulzus alatt

$$r_{\alpha+p,p} = \frac{P}{\Delta t} \frac{1}{N_0} (n\tau + k) \frac{\varepsilon}{t\varepsilon_0 + (n\tau + k) \bar{\varepsilon}\chi}$$

az impulzusok között:

$$r_{\alpha+p,k} = \frac{P}{\Delta t} \frac{1}{N_0} \frac{\varepsilon}{kt\varepsilon_0 + (n\tau + k) \bar{\varepsilon}\chi}.$$

Mivel pulzálásnál a jel/háttér független a neutronintenzitástól, így a felső intenzitáshatárt  $N_0^{\max}$ -t a gyorsító teljesítőképessége szabja meg.

Rugalmas szórás-kísérletekben a szórt neutronok energiája megegyezik a bombázóneutronéval, tehát az időspektrumban az áramimpulzusnak megfelelő tarto-

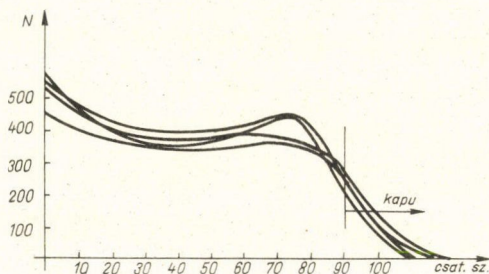


mányt vizsgáljuk. Ekkor  $r_\alpha$ ,  $r_p$ ,  $p$ , illetve  $r_{\alpha+p}$  alapján választjuk meg az előnyösebb módszert. Inelasztikus szórás,  $(n, 2n)$  reakciók vizsgálatánál pedig az effektus az impulzusok közötti tartományban jelentkezik, és itt  $r_\alpha$ ,  $r_{pk}$ , illetve  $r_{\alpha+pk}$  játszik szerepet az összehasonlításnál.

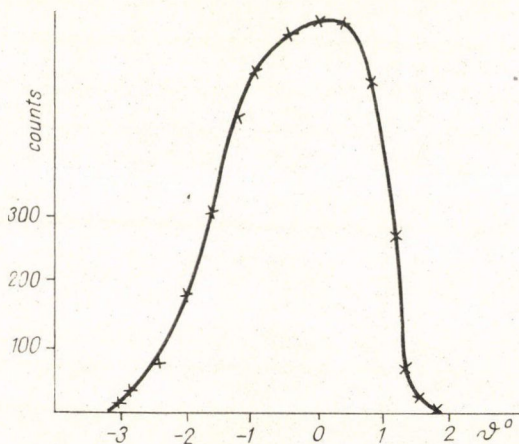
## V. 2. $^{238}\text{U}(n, n)$ folyamat differenciális hatáskeresztmetszetének mérése és kiértékelése

A szórt neutronok regisztrálása repülési idő spektrumuk felvételével történt, amelynél legfontosabb szempont a jó energiafelbontás volt. A háttér — a mérendő, viszonylag nagy hatáskeresztmetszetek miatt — csak másodrendű probléma volt. Ez a körülmény az  $\alpha$  visszalökéses repülési idő mérési módszer alkalmazását indokolta. A repülési távolságot 4 m-nek választottuk, ami 0,7 MeV energiafelbontást elejtett 14,7 MeV-en (az időfelbontás  $t = 1,6$   $\mu\text{sec}$ , mindkét megadott érték a teljes vonalszélességet jelenti félmagasságban).

A rendszer küszöbérzékenységét a neutrontektorok energiaarányos jeleket adó (analog) ágában elhelyezett diszkriminátor segítségével a  $^{60}\text{Co}-\gamma$  forrás spektrumának levágásához (1 MeV elektronenergia) kb. 3 MeV protonenergia



23. ábra



24. ábra

ra állítottuk be. Ezt a szintet találtuk optimálisnak adott forrás-erősségnél a jel/háttér viszony szempontjából a rugalmasan szórt neutronok regisztrálásához. A neutron detektorok analóg ági spektrumának „azonosságát”, a detektorok tápfeszültségének és az elektronsokszorozó fókuszáló elektródája feszültségének kis módosításával értük el, amelyre az elektronsokszorozókban és a fényre való illesztésekben levő eltérések miatt volt szükség (23. ábra).

Az idő-amplitúdó konverzió linearitását 10–100  $\mu\text{sec}$  intervallumban a primér neutronok repülési-idő csúcsának a repülési távolság változtatásával történő eltolásával, ismert felfutási idejű kábelekkal való késleltetéssel, valamint a véletlen-koincidenciák spektrumával ellenőriztük.

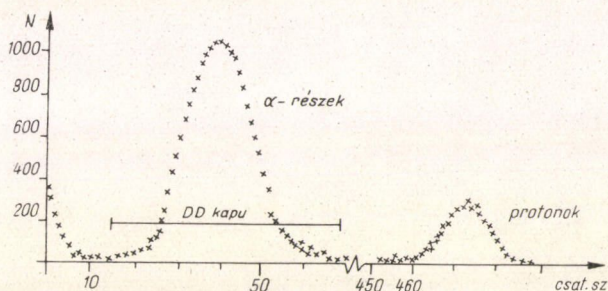
A 4 m távolságon a 14,7 MeV energiájú neutronok repülési ideje  $t_n = 74,8$   $\mu\text{sec}$  az inelasztikus  $\gamma$  részecskéké pedig  $t_\gamma = 13$   $\mu\text{sec}$ , így az időspektrumban a 20  $\mu\text{sec} <$



$<t<60$   $\mu$ sec intervallum szisztematikusan eseményektől mentes, tehát alkalmas az intenzitás négyzetével arányos véletlen háttéreseményeknek a mérésel egyidejűleg történő regisztrálására. A konverzió linearitása miatt jogos a repülési csúcs alatti háttérrel e csatornák tartalmával egyenlőnek venni.

A szög mérés pontosságát elsősorban a bombázó neutronnyaláb divergenciája, az  $\alpha$  detektor térszöge,  $\Omega_\alpha = 1,1 \cdot 10^{-4}$  szabta meg. A teljes szögfelbontás  $\Delta\theta = \pm 1,4^\circ$ , amelyet a primér neutronok repülési csúcsának a neutrondetektor különböző szöghelyzeteiben való felvételével állapítottunk meg (24. ábra).

Monitorozásra, abszolút hozzammérésre, az  $\alpha$ -detektort használtuk a 25. ábrán feltüntetett spektrumnak és kapunak megfelelően. A detektor megszólalási valószínűsége alfa részecskékre egy. Az ily módon való monitorozás háttérmentes.



25. ábra

A neutrondetektorok hatásfokát a bombázó neutronok repülési csúcsa alatti területből határoztuk meg. Ehhez az  $\alpha$ -tér szöget megnöveltük, hogy  $\Omega'_\alpha \gg \Omega_n$  teljesüljön. Ekkor a hatásfokot a következő összefüggés adja meg

$$\varepsilon(14,7) = \frac{\sum_i N_{ki}}{N_\alpha} \frac{\Omega'_\alpha}{\Omega_n},$$

ahol az összegezés a repülési csúcsnak megfelelő csatornákra vonatkozik.  $N_{ki}$  ezek tartalma,  $N_\alpha$  az  $\alpha$ -detektor beütésszáma. Majd a hatáskeresztmetszet mérésénél használt  $\Omega_\alpha$  térszögnél, kis repülési távolságnál,  $\Omega_n \gg \Omega_\alpha$  esetben ismét megállapítottuk az

$$\varepsilon'(14,7) = \frac{\sum_i N_{ki}}{N_\alpha}$$

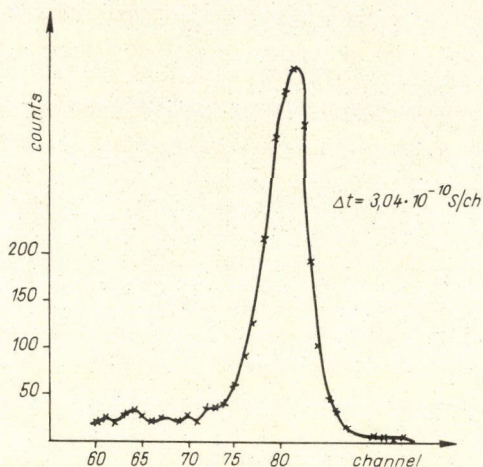
értéket, amely a szcintillációk helyének egy szűk sávra korlátozódása miatt eltérhet az előző értéktől. Esetünkben e különbség 8% volt csupán. Az  $\varepsilon$  és  $\varepsilon'$  pontos értékeire azért volt szükségünk, mert a mérés folyamán  $\varepsilon'$  alapján kontrolláltuk a teljes mérőrendszert. Az analóg ági érzékenység változását 50–100 órás mérési idők folyamán  $\varepsilon$  és  $\varepsilon'$  követi. Ezért 5–10 óránként mértük  $\varepsilon'$ -t, és az ennek megfelelő, mindenkor  $\varepsilon$  értékkel végeztük a kiértékelést. Illusztrációul közöljük egyik neutron detektor hatásfokának értékét 20 óra — két mérési periódusnak megfelelő — mérési időre átlagolva:  $\varepsilon = 1,48 \pm 0,06$ .



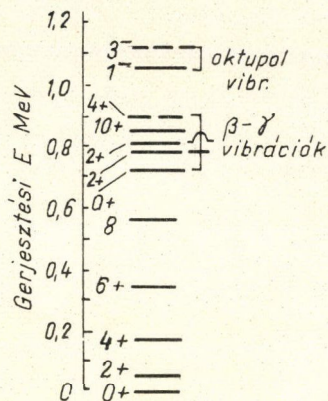
Az itt megadott hiba a hatáskeresztmetszet kiszámításához használt hatások hibájára felső határt jelent.

A szórótárgat  $l=1,6 \text{ cm} \approx \lambda_{\text{att}}/4$  átmérőjű henger volt, ahol  $\lambda_{\text{att}}$  az attenuációs szabad úthossz.  $^{238}\text{U}$ -ra értéke  $\sigma_{\text{att}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}} = 3,7\text{b}$ -ből  $\lambda_{\text{att}} = 5,56 \text{ cm}$  [29].

Ilyen targetméret mellett a többszörös szórás elhanyagolható. Mivel  $\vartheta > 30^\circ$  szórási szögekben elhelyezett detektorokat a neutron forrástól jövő direkt neutronok-



26. ábra



27. ábra

tól elárnyékoltuk, a szórótárgatet 10 cm távolságra helyeztük a neutron-forrástól. Ekkor is teljesült a target térszögére, hogy  $\Omega_t > \Omega_z$ , és a neutronoknak a targetben megtett átlagos útja  $l=l$  maradt.

A tríciumtarget hátlapja 1 mm vastagságú volfram lemez, mint szóróanyag volt jelen a neutrontérszögben, s mint háttérforrás a neutronspektrumban. Ezért felváltva mértünk szórótárgattal és anélkül.

3. TÁBLÁZAT

$\vartheta_{CM}^\circ$	$\sigma_{\text{exp}}(\vartheta) [\text{b/st}]$	$\vartheta_{CM}^\circ$	$\sigma_{\text{exp}}(\vartheta) [\text{b/st}]$
4	$14,5 \pm 0,5$	25	$(1,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-1}$
5	$13,8 \pm 0,5$	30	$(3,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-1}$
6	$12,2 \pm 0,6$	35	$(5,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-1}$
7	$11,6 \pm 0,5$	40	$(4,4 \pm 0,8) \cdot 10^{-1}$
8	$10,1 \pm 0,6$	50	$(6,6 \pm 1,0) \cdot 10^{-2}$
9	$8,5 \pm 0,6$	60	$(9,4 \pm 1,3) \cdot 10^{-2}$
10	$8,2 \pm 0,7$	70	$(8,0 \pm 1,4) \cdot 10^{-2}$
12	$6,6 \pm 0,5$	80	$(2,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-2}$
15	$3,7 \pm 0,4$	90	$(2,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-2}$
20	$(8,2 \pm 0,9) \cdot 10^{-1}$	100	$(1,98 \pm 0,4) \cdot 10^{-2}$



A differenciális hatáskeresztmetszet értékét a következő kifejezésből számítottuk

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{N_k - \frac{N_\alpha}{N_{\alpha h}} N_{kh} \exp\left(-\frac{l}{\lambda_{\text{att}}}\right)}{N_\alpha \Omega_n \varepsilon(E_n)} \cdot \frac{\sigma_{\text{att}}}{1 - \exp\left(\frac{l}{\lambda_{\text{att}}}\right)},$$

ahol  $N_k$  a repülési idő spektrumban a rugalmasan szórt neutronoknak megfelelő csúcs alatti terület, amely az időben egyenletes véletlen koincidencia háttérrel már nem tartalmazza,  $N_\alpha$  az  $\alpha$ -detektor beütésszáma. A  $h$  index ugyanezen mennyiségeknél a szórótárgy nélküli mérésekre vonatkozik.

A teljes mérőberendezést és a hatáskeresztmetszet kiértékelési eljárásunkat a  $^{12}\text{C}(n, n)$  irodalomban jól ismert, sokak által mért hatáskeresztmetszetének [30, 31, 32] reprodukálásával ellenőriztük  $L=2$  m repülési távolságon.

Az  $^{238}\text{U}(n, n)$  folyamatban szórt neutronok regisztrálásának illusztrációjául a 26. ábrán egy jellegzetes repülési idő spektrumot tüntettünk fel, melyet  $\vartheta=5^\circ$  szórési szögben mértünk. A differenciális hatáskeresztmetszet kísérleti értékeit,

$$\sigma_{\text{exp}}(\vartheta) = \sigma_{n, n}(\vartheta) + \sum_{I=2^+, 4^+} \sigma_{n, n'}^I(\vartheta)$$

a 3. táblázatban foglaltuk össze [33].

Minden egyes szög értéknél külön számítottuk ki a hiba nagyságát. A mérési hiba különböző komponenseinek átlagos értékét és azok forrását a 4. táblázatban tüntettük fel:

4. TÁBLÁZAT

A hiba forrása		hiba %
$\frac{\Delta N_k}{N_k}$	(statisztikus) $\vartheta \cong 15^\circ$	1,5
$\frac{\Delta N_k}{N_k}$	(statisztikus) $\vartheta \cong 20^\circ$	7,0
$\frac{\Delta N_{kh}}{N_k}$	(statisztikus) $\vartheta \cong 15^\circ$	0,4
$\frac{\Delta N_{kh}}{N_k}$	(statisztikus) $\vartheta \cong 20^\circ$	6,0
$N_\alpha$ és $N_{\alpha, h}$ (statisztikus)		0,01
hatásfok		4,0
attenuációs faktor		1,5



## VI. NEUTRONOK KISSZÖGŰ SZÓRÁSA AZ OPTIKAI MODELL ALAPJÁN. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT OPTIKAI MODELL, A CSATOLT EGYENLETEK MÓDSZERE

Az urán és tórium magokon való rugalmas szórás anomália fizikai alapjait kétségbe vontuk, illetve megkíséreltük a rugalmas szórás az optikai modell alapján értelmezni a magok deformációját is figyelembe véve. A továbbiakban áttekintjük az optikai modell, valamint a deformált magokra általánosított optikai modell főbb kérdéseit, a neutronok optikai potenciáljára és annak meghatározására vonatkozó jelenlegi ismereteinket, és arra törekszünk, hogy általánosságban, lehetőleg egyszerű összefüggésekkel, mint az energia és magtömeg függvényét ábrázoljuk azt.

Az optikai modell alkalmazhatóságának alapfeltétele, hogy a rugalmas szórás legyen a domináns folyamat a nukleonnak az atommaggal való kölcsönhatása eredményeként végbemenő magreakciók között, hogy mellette a többi csak mint abszorpció jelentkezzen. E feltétel nem teljesül, ha pl. izolált rezonanciák éles ugrásokat eredményeznek a hatáskeresztmetszetben ( $A < 20$  és  $E < \text{néhány MeV}$ ). A közbenső magon keresztül történő rugalmas szórásról, amelyet kísérletileg nem tudunk megkülönböztetni a potenciál szórástól, nem ad számot. Amennyiben e járulék lényeges — alacsony bombázóenergiánál, ahol a közbenső mag elbomlásához csak néhány csatorna nyitott —, a közbenső mag elméletének segítségével ki kell számítanunk e közbenső rugalmas szórás hatáskeresztmetszetét, és le kell vonni a kísérleti adatokból, mielőtt a szórás optikai modell analízisét elvégeznénk.

### VI. 1. Az optikai potenciál

A fenomenologikus optikai modell a potenciál centrális részének a következő alakot felelteti meg:

$$V(r) = -Uf(r) - iWg(r),$$

ahol  $U$  és  $W$  a valós és képzetes rész mélysége  $f(r)$  és  $g(r)$  a radiális függést leíró formafaktorok, amelyek több, ún. geometriai paramétert tartalmaznak. A potenciál valós része —  $Uf(r)$  — a héjmodell potenciállal van szoros kapcsolatban, annak pozitív energiákra való kiterjesztése, így várható, hogy radiális függése azéhoz hasonló alakú. Ezért a potenciál  $r$ -függésének leírására a gyakorlatban a Saxon—Woods-formafaktort használjuk:

$$f(r) = [1 + \exp(r - R)/a]^{-1},$$

ahol az  $R$  sugárparaméter a tapasztalat szerint a következőképpen függ a mag  $A$  tömegszámától:

$$R = r_0 A^{1/3},$$

$a$  pedig a magfelület diffuzitását jellemzi.  $r_0 = 1,3f$  és  $a = 0,5f$  körüli értékek. A rugalmas szórás kísérő folyamatok hatását a képzetes rész írja le. Radiális eloszlása a rugalmatlan folyamatok mechanizmusával áll kapcsolatban. Alacsony energián a Pauli-elv hatása miatt a rugalmatlan ütközések a mag felületi tartományára korlátozódnak, így a formafaktor maximumát a mag felületén veszi fel. Az energia növe-



lésével ( $E > 30$  MeV) ezek a mag belsejére is kiterjednek. A képzetes rész radiális függését éppen ezért Gauss-alakkal vagy a Saxon—Woods-formafaktor deriváltjával írjuk le alacsony, Saxon—Woods-formafaktorról magas bombázóenergiánál. Közepes energián a felületi és térfogati tagok megfelelően súlyozott, együttes felvétele bizonyult jónak, tehát az imaginárius potenciál általános alakja

$$W(r) = sW_v f(r) - 4a(1-s)W_s \frac{d}{dr} f(r),$$

ahol  $W_v$  és  $W_s$  a mélységeket jelentik,  $s$  pedig a térfogati komponens súlyfaktora. A szóródott neutronok polarizációjának leírására szokás az optikai potenciál spin-pálya tagját bevezetni

$$V_{so}(r) = (U_{so} + iW_{so})h(r)\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

ahol  $U_{so}$  és  $W_{so}$  a valós és képzetes mélységek,  $\mathbf{l}$  a nukleon impulzusmomentuma,  $\boldsymbol{\sigma}$  a Pauli-féle spin-operátor. Atomai analógiára általában  $h(r)$ -t a Thomas-relációnak választjuk:

$$h(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r).$$

Így a fenomenologikus optikai potenciál általános alakja:

$$\begin{aligned} V(r) = & -Uf(r) - isW_v f(r) + i4a(1-s)W_s \frac{d}{dr} f(r) - \\ & - (U_{so} + iW_{so}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (18)$$

Az  $U$ ,  $W_v$ ,  $W_s$ ,  $W_{so}$  mélységek, valamint  $r_0$  és a formafaktorparaméterek értéke nem származtatható direkt a kísérleti adatokból. A hatáskeresztmetszetek meghatározásánál a probléma Schrödinger-egyenletéből indulunk ki

$$\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi - [E - V(r)]\psi = 0$$

és olyan megoldásait keressük, amelyben a hullámfüggvény aszimptotikus alakja

$$\begin{aligned} \psi(r) \cong & \frac{2\pi}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left\{ \exp \left[ -i \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - S_l \exp \left[ i \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] \right\} P_l \cos \vartheta, \end{aligned}$$

ahol  $k = (2M_n E)^{1/2} / \hbar$ , az  $E$  energiájú részecske hullámszáma,  $P_l$  az  $l$ -edik Legendrepolinom,  $S_l$  a be- és kifutó hullámok amplitúdó viszonyát, az  $l$ -edik parciális hullám amplitúdóját és fázisát szabja meg.  $S_l$  a szórásmátrix  $l$  pályamomentumhoz tartozó diagonális eleme. Rugalmas szórásnál az  $S$  mátrixelemek egyszerűen írhatók fel:

$$S_l = \exp(2i\delta_l).$$



Ha rugalmatlan folyamatok is bekövetkeznek  $|S_l| < 1$  lesz. A „fekete mag” közelítésben minden  $S_l = 0$ , ha  $l < l_0$ , ahol

$$l_0 = \frac{R}{\lambda} + 1$$

egyébként  $S_l = 1$ . Itt  $R$  a mag sugara,  $\lambda$  pedig a részecske hullámhossza.

$S_l$  ismeretében a rugalmas szórás, a reakció és totális hatáskeresztmetszetek kiszámíthatók. Ezek számított értékeinek a kísérleti adatokhoz való optimális illesztésével határozzuk meg a potenciál paramétereinek értékét.

A numerikus eljárásokban a paraméterek értékét lépésenként változtatva, minden lépésben kiszámítjuk a kísérleti és a feltételezett optikai potenciállal  $\sigma_{elm}$  értékek eltérését  $(\delta\sigma_k)^{-2}$ -val súlyozva a

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_N \left( \frac{\sigma_k(\vartheta) - \sigma_{elm}(\vartheta)}{\delta\sigma_k} \right)^2$$

mennyiséget, amíg  $\chi^2$  minimális lesz.  $\sigma_k(\vartheta) \pm \delta\sigma_k$  az adott szögben mért hatáskeresztmetszetet, az összegezés pedig a mérési pontokra történik. Nehéz megadni  $\chi^2$  azon értékét, ahol az illesztést „jónak” tekintjük, általában  $\chi^2 \leq 10$  kielégítő. A paraméterek optimális értékét kereső programot ismertet pl. *Madison* és *Perey* [35–37].

Nagyon sok magon és bombázó energián végezték el a rugalmas neutron szórás optikai modell analízisét, amelynek során sikerült a paraméterek  $E$ -től és  $A$ -tól való szisztematikus függését megállapítani, amelytől egyes esetekben természetesen mutatkoznak eltérések. Amennyiben a modell szolgáltatja hatáskeresztmetszetek és a kísérleti adatok között nagyok az eltérések, ott arra kell következtetni, hogy a modell alapfeltevése nem teljesül.

A neutronpotenciálok paramétereinek változását 4,1–14,5 MeV energiatartományban elsőként *Bjorklund* és *Fernbach* vizsgálta [38]. Hat elemnél végezték el a rugalmas szórás optikai modell analízisét, amelyben Saxon–Woods-alakú valós és Gauss-alakú képzetes potenciál-formafaktort használtak. Az 5. táblázatban tüntettük fel az így kapott potenciál paraméterek értékeit.

5. TÁBLÁZAT

$E$ MeV	$U$ MeV	$W$ MeV	$U_{so}$ MeV	$r_0$ fermi	$a_u$ fermi	$a_w$ fermi
4,1	50	7	9,5	1,25	0,65	0,98
7	45,5	9,5	8,6	1,25	0,65	0,98
14	44	11	8,3	1,25	0,65	0,98

Az optikai potenciál energiafüggése részben a lokalitása feltételezésének következménye. A nukleáris kölcsönhatások elmélete alapján azt várjuk, hogy az optikai potenciál nem lokális. Meg lehet mutatni, hogy a nem lokális jelleg matematikailag sebességfüggéssel ekvivalens. Remélhető tehát, hogy egyetlen, nem lokális potenciál a kísérletekkel széles energiatartományban egyező eredményt szolgáltat.



Az optikai modell számítások lényegesen módosulnak a nem lokális jelleg figyelembevételével. Koordinátareprezentációban a nem lokális potenciáloperátor hatása a hullámfüggvényre a következő módon adható meg:

$$V\psi(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'.$$

Az integrál a teljes térre vonatkozik.  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  potenciál operátor magja szimmetrikus  $\mathbf{r}$  és  $\mathbf{r}'$ -ben, és  $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$  környezetére koncentrálódik. Bár a nemlokális nagyon bonyolult alakú [39], *Frahn* és *Lemmer* a következő egyszerű összefüggést tételezte fel:

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = U\left(\frac{1}{2}|\mathbf{r}+\mathbf{r}'|\right)(\pi\beta)^{-3/2}\exp\left[-\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\beta}\right)^2\right], \quad (20)$$

ahol  $\beta$  a nem lokális hatótávolsága ( $\sim 1f$ ) [40]. Látható, hogy

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad \text{ha } \beta \rightarrow 0.$$

A nem lokális potenciál a Schrödinger-egyenletet integrodifferenciál egyenletbe viszi át:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + E\right)\psi(\mathbf{r}) = -[(U_{so} + iW_{so})h(\mathbf{r})\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\psi(\mathbf{r}) + \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \quad (21)$$

*Perey* és *Buck* [41] a periódusos rendszer széles tartományában analizálták a neutron rugalmas szórás kísérleti adatokat a nem lokális modell alapján. *Saxon—Woods* és derivált *Saxon—Woods*-alakú  $r$ -függést tételeztek fel  $U(\mathbf{r}+\mathbf{r}')$ -re. Ha  $p=1/2|\mathbf{r}+\mathbf{r}'|$  jelölést vezetjük be, akkor

$$-U(p) = Vf(p, r_0, a_r) + i4W(p, r_0, a_i) \quad (22)$$

összefüggés kerül (20)-be. Valóban egyetlen, a (20) típusú potenciállal értelmezni tudták 1—25 MeV neutron energia tartományban a mért rugalmas szórás teljes és differenciális hatáskeresztmetszeteket.

Felmerül a kérdés, hogyan egyeztethető össze ezekkel az eredményekkel a lokális modell sikere. Pontosabban szólva, meg kell vizsgálni egyrészt, hogy a nem lokális modell alapján számított mennyiségek reprodukálhatók-e lokális modell számításokkal, másrészt ha az összehasonlítást különböző neutronenergiáknál végezzük el — ugyanolyan nem lokális potenciálparaméterek mellett — a megfelelő lokális potenciálparaméterek változása összhangban van-e a korábban talált empirikus értékekkel (5. táblázat).

*Perey* és *Buck* fenomenologikusan próbálták meghatározni a nemlokális potenciált. A  $^{56}\text{Fe}$  mag nem lokális potenciálparamétereit úgy választották meg, hogy a 14 MeV energiájú neutronok rugalmas szórás differenciális hatáskeresztmetszetét reprodukálja. E paraméterekkel 4,1; 7; 14 és 26 MeV neutronenergiáknál elvégzett nem lokális számításaik eredményét,  $d\sigma/d\Omega$ -t tekintették „kísérleti” adatoknak. Az adott energiákon az adatok szokásos optikai modell analízise az ekvivalens lokális potenciálparamétereket eredményezte, amelyeknek a megfelelő Bjorklund—Fernbach-féle potenciál értékkel való egyezése bizonyítja, hogy a nem lokális modell összhangban van a korábbi lokális modell analízisekkel. *Perey* és *Buck* egy közelítő



eljárást javasol, amelynek alapján meghatározható az ekvivalens lokális potenciál, amely a Schrödinger-egyenlet ugyanolyan aszimptotikus megoldásához vezet, mint a nem lokális potenciál. Ebben a közelítésben a lokális potenciál,  $U_L$  a nem lokális,  $U_{NL}$  implicit függvényeként állítható elő:

$$U_L(r) \exp \left\{ \frac{M\beta^2}{2\hbar^2} [E - U_L(r)] \right\} = U_{NL}(r).$$

$U_{NL}$  és  $U_L$  térfogati és felületi abszorpciót tartalmaznak. Hangsúlyozzuk, hogy az ekvivalencia csak a rugalmas szórás hatáskeresztmetszete, illetve a hullámfüggvény aszimptotikus alakja szempontjából áll fenn. A lokális és nem lokális hullámfüggvények — bár aszimptotikusan megegyeznek — a mag belsejében jelentősen eltérhetnek egymástól. E jelenség a Perey-effektus [42], lényeges lehet más magreakciók leírásában, ahol az átmeneti mátrixelem a kölcsönhatásba lépő részecskék hullámfüggvényeinek átfedési integráljával arányos [43, 44].

Az ekvivalens lokális optikai potenciál alakját Wilmore és Hodgson [45] vizsgálták. (23)-ból iterációval állították elő numerikus alakban (22)-höz hasonló, Saxon—Woods- és derivált S.W.-potenciállal —  $Vf(r) + iWg(r)$  — közelítették, ahol a formafaktorok

$$f(r, r_{0v}, a_v) = \{1 + \exp [(r - R)/a_v]\}^{-1} \quad (24)$$

$$g(r, r_{0i}, a_i) = \exp [(r - R)/a_i] [1 + \exp (r - R)/a_i]^{-2}$$

voltak. Előírták, hogy a mélységek azonosak legyenek, a valós potenciálok ugyanazokban a pontokban vegyék fel 0,1-; 0,5- és 0,9-szeres értékét, a képzetes rész maximumhelye és félértékszélessége megegyezzek. Legyen

$$U_L(r) = U'(r) + iW'(r).$$

Ekkor az

$$U'(0) = V, \quad W'_{\max} = W,$$

$$a_v = \frac{r_2 - r_1}{2 \log 9}.$$

Legyen

$$U'(r_1) = 0,1V \quad \text{és} \quad U'(r_2) = 0,9V,$$

$$U'(R_{1/2}) = V/2 \quad \text{és} \quad W'(R_W) = W,$$

$$a_i = \frac{r_3 - r_4}{\log \frac{3 + \sqrt{8}}{3 - \sqrt{8}}},$$

ahol

$$W(r_3) = W(r_4) = 1/2W$$

összefüggéseknek kell teljesülnie. A Si-tól az U-ig és 1—14 MeV energiatartományban végezték el az  $U_L(r)$  és a közelítő potenciál illesztését, és a következő, numerikus



összefüggéseket kapták, amelyek alkalmasak az ekvivalens lokális potenciált jól közelítő Saxon—Woods-alakú potenciál paramétereinek meghatározására:

$$U^{\text{MeV}} = 47,01 - 0,267 \cdot E^{\text{MeV}} - 0,00118 \cdot E^{\text{MeV}1/2},$$

$$W^{\text{MeV}} = 9,52 - 0,053 \cdot E^{\text{MeV}}$$

$$r_{0v}^f = 1,322 - 0,00076 \cdot A + 4 \cdot 10^{-6} \cdot A^2 - 8 \cdot 10^{-9} \cdot A^3,$$

$$r_{0i}^f = 1,266 - 0,00037 \cdot A + 2 \cdot 10^{-6} \cdot A^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot A^3,$$

$$a_v^f = 0,66,$$

$$a_i^f = 0,48.$$

Gersten [46] explicit kifejezést ad meg az ekvivalens lokális potenciálra,  $U_L$ -t mint a Perey—Buck-féle  $U_{NL}$  nem lokális potenciál (22) és (24) függvényét:

$$-U_L(r) = \frac{2\hbar^2}{\beta^2 M} \left[ \frac{U(r)}{U(r)+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{U(r)}{U(r)+1} \right)^3 \right], \quad (25)$$

ahol

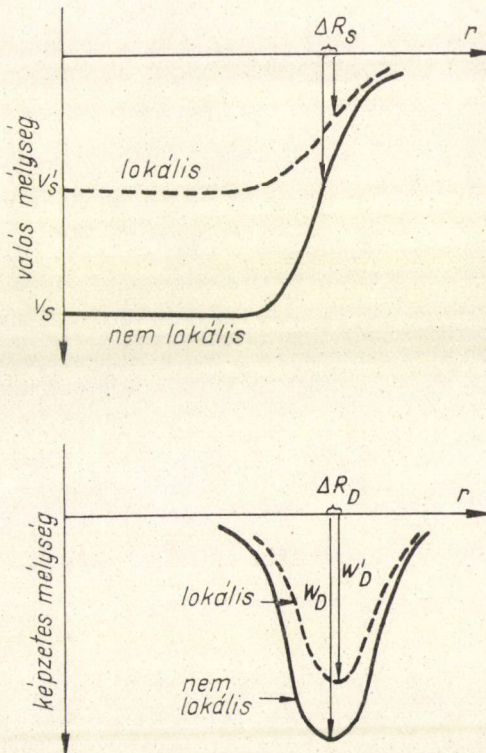
$$U(r) = \frac{M\beta^2}{2\hbar^2} \exp \left( \frac{M\beta^2}{2\hbar^2} E \right) U_{NL}.$$

Ha  $U_L(r)$ -t (24) alakban keressük, akkor egyszerű összefüggést kapunk (25) alapján a lokális és nem lokális paraméterek között. A 28. ábrán a nem lokális és az ekvivalens lokális függvényalakok láthatók. A Wilmore—Hodgson- vagy Gersten-potenciálok ismeretében csak lokális potenciált tartalmazó Schrödinger-egyenletet kell megoldanunk az integrodifferenciál egyenlet helyett.

Több jelenségcsoport, a magok szimmetriaenergiája, a targetmag izobár analóg nívóira vezető kicserélődési szórás  $[(p, n)$  reakciók], a neutron és proton rugalmas szórási adatok eltérése, mind arra utalnak, hogy az optikai potenciál izospinfüggő komponenst tartalmaz. Elméletileg várható ilyen tag fellépése, mint azt Lane megmutatta, mivel a kettést erők Heisenberg-komponensének Fermi-gázra való átlagolásából adódik első közelítésben a potenciál

$$U_1 A^{-1}(t \cdot T)$$

szimmetria tagja, ahol  $t$  a beeső nuk-



28. ábra



leon,  $T$  a targetmag izospinoperátora, s ennek megfelelően a neutron és proton potenciál az  $n$  és  $p$  csatornára átlagolva

$$U_n = U_0 + 1/4 U_1 \alpha$$

$$U_p = U_0 - 1/4 U_1 \alpha - U_c.$$

$\alpha = (N - Z)/A$  a targetmag szimmetriaparamétere, az  $U_c$  korrekció a Coulomb-tér protonokra gyakorolt fékező hatása miatt lép fel a potenciál energiafüggésének következtében. Mivel  $Z/A^{1/3} \approx (N - Z)/A$  a periódusos rendszer egészében teljesül, a Coulomb-korrekció a szimmetriatagtól nem választható külön kísérletileg, míg a szimmetriatag a neutronpotenciálban tisztán van jelen. Feltételezhetjük, hogy  $U_1$  is, mint az optikai potenciál többi tagja komplex

$$U_p(r) = (V_0 + \alpha V_1 + V_c)f(r) + i[W_0 g_0(r) + \alpha W_1 g_1(r) + W_c],$$

$$U_n(r) = (V_0 - \alpha V_1)f(r) + i[W_0 g_0(r) - \alpha W_1 g_1(r)].$$

Ismeretes, hogy a potenciálparaméterek — a periódusos rendszerben haladva — fluktuálnak, amit a magok eltérő szerkezete vagy a mérési és számítástechnikai módszerek különbözősége okozhat. Olyan finomabb effektusoknál, mint a szimmetriatag, anomális szórás kimutatása a fluktuációkat „minimalizálni” kell, úgy hogy azonos mérési módszerrel kapott kísérleti adatokat hasonlítunk össze, ahol a szisztematikus hiba, ha van, nem okoz fluktuációt. Proton [42, 47] és neutronszerzési analízisek [48] igazolták a szimmetriatag jelenlétét, de szignifikánsan csak a valós része volt kimutatható, az imaginárius részre — a rendelkezésre álló kísérleti adatokból nem lehet következtetni [49, 50].

Mindez pontosabb méréseket és precízebb optikai modell analíziseket követel.

## VI. 2. Az általánosított optikai modell.

### A csatornacsatolás módszere

A rugalmatlan szórás hatáskeresztmetszet értéke bizonyos esetekben igen nagy, s ez arra utal, hogy a csatoló kölcsönhatás nagyon erős. Ha a rugalmas szórás tekintjük, nem elég a rugalmatlan csatornákat csak az optikai potenciál képzetes tagjával figyelembe venni, hiszen a rugalmatlan csatornák a rugalmas szórásra visszahatnak. A rugalmas és rugalmatlan szórás amplitúdókhoz csatolt egyenletrendszer megoldásával jutunk. A rugalmatlan csatornáknak a rugalmashoz való csatolódása különösen erős lehet akkor, ha a mag deformált, vagy deformálható, tehát rotációs, vagy vibrációs kollektív mozgások gerjeszthetők a magban. Megjegyezzük, hogy a szórás folyamatok leírásában a csatornacsatolás jelentőségére kollektív tulajdonságokkal rendelkező magok esetén Bohr és Mottelson mutatott rá elsőnek [51], majd különböző részecskék rugalmas [52, 53, 54] és rugalmatlan szórás analízisének egész sorozatát végezték el a csatornacsatolás módszerének segítségével [43, 55–59].

Röviden áttekintjük a modell rugalmas, és kollektív magállapotok gerjesztésére vezető direkt rugalmatlan szórásra való alkalmazását.

A kölcsönhatásban levő rendszer Hamilton-operátorát a relatív mozgás kinetikus energiája, a mag belső mozgásának Hamilton-operátora és a potenciális energia összegeként írhatjuk fel:

$$H = T - H_T(\zeta) + V(r, \zeta) \quad (26)$$



ahol  $\mathbf{r}$  a bombázó részecske koordinátája,  $\zeta$  pedig a target mag belső koordinátáit jelöli. A szórási probléma Schrödinger-egyenlete

$$H\Psi(\mathbf{r}, \zeta) = E\Psi(\mathbf{r}, \zeta), \quad (27)$$

ahol  $\Psi(\mathbf{r}, \zeta)$  a teljes hullámfüggvény,  $E$  a rendszer energiája.  $\Psi$  kifejezhető a rendszer  $J$  teljes impulzusmomentumának sajátállapotai szerint

$$\Psi(\mathbf{r}, \zeta) = \sum_{JK} a_{JK} \psi_J^K(\mathbf{r}, \zeta), \quad (28)$$

ahol  $K$  a  $J$  impulzusmomentum  $Z$  irányú vetülete. A  $\psi_J^K$  függvény rugalmas és rugalmatlan szórási állapotok szuperpozíciójaként állítható elő. Tehát

$$\psi_J^K(\mathbf{r}, \zeta) = \frac{1}{r} \sum_{Ilj} F_{Ilj}(r)^J \Phi_{Ilj}^{JK}(\omega, \zeta). \quad (29)$$

Az  $F_{Ilj}^J(r)$  az  $I$  impulzusmomentumú magállapotról szóródott  $s$  spinű részecske ( $j, l$ ) parciális hullámának radiális része, ( $l$  a pályamomentum,  $j = l + s$ ) mint sorfejllesztési együtthatók lépnek fel. A szóródott részecske szögkoordinátáit  $\omega$ -val és  $\mathbf{r}$  abszolútértékét  $r$ -rel jelöltük. A  $\Phi_{Ilj}^{JK}(\omega, \zeta)$  függvény az impulzusmomentum kvantumelméletéből ismert vektoraddíciós tétel szerint felbontható  $\varphi_I^M(\zeta)$  maghullámfüggvénynek és a részecske teljes impulzusmomentumának saját állapotai  $y_{ji}^m(\omega)$  szorzatára

$$\begin{aligned} \Phi_{Ilj}^{JK}(\omega, \zeta) &= \sum_M \langle IjMm|JK \rangle y_{ji}^m(\omega) \varphi_I^M(\zeta) = \\ &= \sum_{M\lambda\mu} \langle IjMm|JK \rangle \langle ls\lambda\mu|jm \rangle \times \\ &\times Y_l^\lambda(\omega) \chi_s^\mu \varphi_I^M(\zeta). \end{aligned} \quad (30)$$

$\chi_s^\mu$  a részecske spinhullámfüggvénye. Definíció szerint

$$H_T \varphi_I^M(\zeta) = \varepsilon_I \varphi_I^M(\zeta). \quad (31)$$

$\varepsilon_I$  a targetmag  $I$  impulzusmomentumú állapotának energiája.

Feltételezzük, hogy a részecske-mag kölcsönhatást teljes egészében a  $V(r, \theta, \varphi)$  optikai potenciál írja le, s az optikai potenciál követi a mag alakját, így rotáció esetén statikusan, az  $r=R$  magfelület vibrációjánál dinamikusan eltér a gömb-szimmetriától:

$$R = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\theta, \Phi) \right]. \quad (32)$$

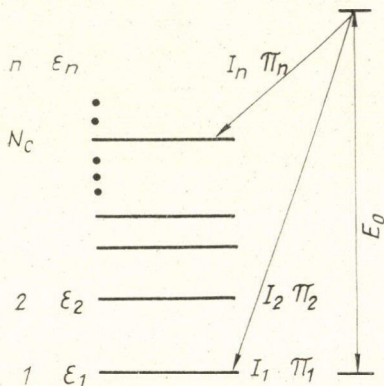
Ha a targetmag stabilan deformált, akkor (32)-ben szereplő  $\alpha_{\lambda\mu}$  mennyiségek a deformációt jellemző számok. Axiálszimmetria esetén  $\mu=0$  valósulhat csak meg, s ekkor  $\alpha_{\lambda\mu} \equiv \beta_\lambda$  a mag deformációs paramétere. Ha a gömbfelület vibrál,  $\alpha_{\lambda\mu} - k$  a mozgás dinamikus változói.

A  $V(\mathbf{r}, \zeta)$  kölcsönhatási potenciált az  $\alpha_{\lambda\mu}$ -k szerint haladó Taylor-sorával állítjuk elő felhasználva a (32) összefüggést:

$$V(\mathbf{r}, \zeta) = U(\mathbf{r}, R_0) + R_0 \left[ \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\theta, \Phi) \right] \frac{\partial U(R, \mathbf{r})}{\partial R} + \dots \quad (33)$$



Ha  $U(r, R)$  csak a magfelülettől való távolság,  $R-r$  függvénye, az általánosan használt Saxon—Woods-potenciál alaknál  $\partial U/\partial R = -\partial U/\partial r$ . A sor nulladik tagjának a mag állapotait leíró hullámfüggvények terében csak diagonális, a sor további tagjainak jó közelítéssel csak diagonálison kívüli mátrixelemei vannak. Az előbbi a gömbszimmetrikus komplex optikai potenciállal azonosíthatjuk, amely általában spin-pálya tagot tartalmaz. Az utóbbiról a csatornák közötti csatoló kölcsönhatásról feltételezzük, hogy nem függ a nukleon spin és izospin-koordinátáitól.



29. ábra

$$V(r, \zeta) = V_{opt} + V_c. \quad (34)$$

A teljes kölcsönhatási operátor általánosan irreducibilis tenzoroperátorok sorozatával állítható elő:

$$V(r, \zeta) = \sum_{Qq} Y_Q^q(\omega)^* T_Q^q(\zeta, r). \quad (35)$$

Itt  $Q$  a kölcsönhatásban átadott impulzusmomentum,  $q$  pedig a vetülete.

Legyen a targetmagban az  $n$ -edik állapot spinje, paritása és energiája rendre  $I_n$ ;  $\pi_n$  és  $\varepsilon_n$  (29. ábra). Ha a bombázó részecske energiája a tömegközépponti rendszerben  $E_1$ , akkor a szóródott részecske, amely a targetmagot az  $n$ -edik

állapotban hagyta vissza, kilépés után  $E_n = E_1 - \varepsilon_n$  energiával rendelkezik.

Tekintsük a targetmag  $n$ -edik állapotának megfelelő csatornában az  $s$  spinű  $l_n$  pálya- és  $j_n$  teljes impulzusmomentumú részecske parciális hullámát.

Definiáljuk a teljes rendszer impulzusmomentumát  $j_n$  és  $I_n$  vektori összegeként

$$J = j_n + I_n, \quad (36)$$

és a rendszer paritását

$$\pi = \pi_n (-1)^{l_n}.$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (35) alakú kölcsönhatás esetén az  $I_n$ ,  $j_n$ ,  $I_n$ ,  $\pi_n$  vagy  $(-1)^{l_n}$  nem, míg  $J$  és  $\pi$  jó kvantumszámok. Az a néhány parciális hullám, amelyek  $l_n$  és  $j_n$  kvantumszámai  $I$  és  $\pi$  adott értékénél, eleget tesznek (36)-nak és a csatolást létesítő potenciál (35) alakban adható meg, csatolt differenciálegyenletrendszert elégítenek ki.  $N_c^n$  ezek lehetséges maximális száma az  $n$ -edik,  $I_n$ -spinű nívóra vonatkozóan

$$N_c^{(n)} = I_n + 1 \quad \text{ha } s = 0 \quad \text{és } I_n \text{ egész,}$$

$$N_c^{(n)} = I_n + 1/2 \quad \text{ha } s = 0 \quad \text{és } I_n \text{ félegész,}$$

$$N_c^{(n)} = 2 I_n + 1 \quad \text{ha } s = 1/2 \quad \text{minden } I\text{-re,}$$

$$N_c^{(n)} = 3 I_n + 1 \quad \text{ha } s = 1 \quad \text{és } I_n \text{ egész,}$$

$$N_c^{(n)} = 3 I_n + 3/2 \quad \text{ha } s = 1 \quad \text{és } I_n \text{ félegész.}$$



Ha a  $V_c$  potenciál  $N_s$  számú állapotot csatol az alapállapothoz, akkor

$$N_c = \sum_{n=1}^{N_s} N_c^{(n)}$$

egy adott  $J$  és  $\pi$ -re vonatkozó csatolt egyenletek számát jelenti.

Az aktuális numerikus számításokban  $J$ ,  $\pi$  mindkét értékénél egy  $J_{\min}$  minimális értékről — amely a 0 vagy  $1/2$  lehet attól függően, hogy  $I_n + s$  egész vagy félegész — a maximális  $J_{\max}$  értékig változik, ahol  $J_{\max} = I_1 + j_{1\max}$  annak a parciális hullámnak a  $j_1$  teljes impulzusmomentumát jelenti, amelyik járuléka a rugalmas szóráshoz még nem elhanyagolható.

A többi, nem csatolt rugalmatlan csatorna hatása csak a komplex optikai potenciál képzetes tagján,  $W_c$ -n keresztül, mint abszorpció jelentkezik.

Megjegyezzük, hogy a csatolásmentes esetben érvényes  $W_{ncp} > W_{cp}$ , mivel  $W_{ncp}$  egy részét, bizonyos rugalmatlan kölcsönhatásokat most egzakt vettük figyelembe.  $W_{cp}$  aktuális értéke tehát a csatolási sémáktól függ.

A (27), és (29, 30, 33) összefüggésekből egyszerű helyettesítés és átalakítás után a következő  $N_c$  csatolt differenciálegyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} T_{l_n} - E_n + \langle \Phi_{I_n j_n l_n}^{JK} | V_{opt} | \Phi_{I_n j_n l_n}^{JK} \rangle F_{I_n j_n l_n}^J(r) + \\ + \sum_{I'_n j'_n l'_n} \langle \Phi_{I_n j_n l_n}^{JK} | V_c | \Phi_{I'_n j'_n l'_n}^{JK} \rangle F_{I'_n j'_n l'_n}^J(r) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$T_{l_n} = \frac{\hbar^2}{2M} \left[ \frac{l_n(l_n+1)}{r^2} - \frac{d^2}{dr^2} \right],$$

ahol  $M$  a bombázó részecske redukált tömege,  $I_n, j_n, l_n$  és  $I'_n, j'_n, l'_n$  a (36)-t kielégítő értékeket veszik fel. A (37) egyenlet egészen általános. A magstruktúrára való feltevések csak a csatoló potenciál mátrixelemeiben jelentkeznek. Éppen ezért a számítások legkritikusabb pontja ezen mátrixelemek valamely magmodell alapján való meghatározása. (37) egyenletekben szereplő mátrixelemnek a teljesen általános (35) alakú kölcsönhatási potenciál felvételénél a megfelelő reakció formafaktorra vezethető vissza

$$V_{I' j' l'; I j l}^J(r) = \sum_{Qq} A'(I', l, j', j, Q) \frac{(-1)^I (2I' + 1)^{1/2}}{(4\pi)^{1/2}} \langle \varphi_{I' M'} | T_Q^J | \varphi_{I M} \rangle.$$

Az  $A'$  számfaktort az argumentumában feltüntetett kvantumszámok értéke határozza meg.

A reakció formafaktor a Wigner—Eckart-tétel alkalmazása után

$$V_{I' j' l'; I j l}^J(r) = \sum_{Qq} A(Q) \langle I Q M q | I' M' \rangle \langle I \| T_Q^J \| I \rangle. \quad (38)$$

$Q$  a kölcsönhatás során átadott impulzusmomentum. Mivel a csatolópotenciál spin- és izospinfüggetlen, az átmenetre  $\Delta T_0 = 0$  és  $\Delta \pi = (-1)^Q$  kiválasztási szabályok érvényesek. Tehát a nem normális paritású állapotok  $[(-1)^{Q+1}]$  direkt gerjesztése kizárt.



Írjuk fel a csatoló kölcsönhatás konkrét összefüggését az általánosított optikai modell alapján vibrációs gerjesztésekre. Ha a magfelület oszcillációi nem túl nagyok, (33)-ban  $\alpha_{\lambda\mu}$ -ben magasabb rendű tagokat elhagyjuk

$$V_c^{vibr}(r) = \sum_{\lambda\mu} v_{\lambda}^{vibr}(r) \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda}^{\mu} + \sum_{\lambda\lambda_1\lambda_2\mu\mu_1\mu_2} v_{\lambda\lambda_1\lambda_2}^{vibr}(r) \alpha_{\lambda_1\mu_1} \alpha_{\lambda_2\mu_2} Y_{\lambda}^{\mu} + \dots \quad (39)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy az optikai potenciál képzetes része is követi a magfelület változásait, akkor  $V_c$  potenciál, valamint a  $v_{\lambda}(r)$  csatolási formafaktorok komplexek lesznek. A potenciál mátrixa nem diagonális részének képzetes tagja azokat az eseményeket veszi figyelembe, amikor a csatolásban résztvevő csatornák-ból más, ezektől eltérő csatornába történik átmenet.

Tekintsük azt az esetet, amikor a rugalmatlan szórás egyfononos quadrupól vibrációt gerjeszt. A (39) sorfejtésben egyszerűség kedvéért csak az  $\alpha_{\lambda\mu}$ -ben elsőrendű tagokat tartjuk meg.

$$V_c^{vibr(2)}(r) = \frac{R_v V_v}{a_v} g_v(r) \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y_2^{\mu}(\theta, \Phi).$$

$R_v$  és  $a_v$  a Saxon—Woods-formafaktorok geometriai paraméterei,  $V_v$  a valós potenciálmélység. A permanens deformáció analógiájára bevezetjük a dinamikus deformációs paramétert, mint az  $\alpha_{\lambda\mu}$  változó négyzetének várható értékét a mag  $|IM\rangle$  alapállapotában

$$\beta_2^2 \equiv \langle IM | \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 | IM \rangle.$$

A kollektív modellből ismert módon  $\alpha_{\lambda\mu}$  felírható, mint (kvadrupól) fonon keltő  $b_{\lambda\mu}^+$  és eltüntető operátorok  $b_{\lambda\mu}$  lineárkombinációja

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{\beta_{\lambda}}{(2\lambda+1)^{1/2}} [b_{\lambda\mu} + b_{\lambda-\mu}^+ (-1)^{\mu}].$$

A vibrációs modellben az egy kvadrupólfononos állapot hullámfüggvénye

$$\varphi_2^M = |1:2M\rangle = b_{2M}^+ |0\rangle.$$

Így a kérdéses redukált mátrixelemnek

$$\begin{aligned} \langle 0 || T_2 || 2 \rangle &= \langle 2 || T_2 || 0 \rangle = \frac{\beta_2}{\sqrt{5}} \\ \langle 2 || T_2 || 2 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ha a targetmag deformált és axiálszimmetrikus, akkor a mag felületét a következő kifejezés adja meg

$$R(\theta, \Phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} \beta_{\lambda} D_{\mu 0}^{\lambda}(\theta', \Phi') Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \Phi) \right),$$

ahol  $\theta', \Phi'$  a mag szimmetriatengelyeinek polárszögei egy a térben rögzített koordinárendszerben. Hasonlóan eljárva, mint a vibrációs csatolás erősségének meghatározásánál kapjuk  $V_c^{rot}$ -ra:

$$V_c^{rot}(r) = \sum_{\lambda\mu} v_{\mu}^{rot}(r) \beta_{\lambda} D_{\mu 0}^{\lambda}(\theta', \Phi') Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \Phi). \quad (40)$$



Ismét kvadrupól deformációra ( $\beta_2 > 0$  zsemlye alak,  $\beta_2 < 0$  szivar alak) és valós csatolópotenciálra szorítkozunk:

$$V_c^{rot(2)}(r) = \frac{\beta_2 R_v V_v}{a_v} g_v(r) \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{\mu} Y_2^{\mu*}(\theta, \Phi) D_{\mu 0}^2(\theta', \Phi').$$

Az alapállapotra épülő rotációs sávban a  $2^+$  állapot hullámfüggvénye

$$\varphi_2^M(\theta', \Phi') = \sqrt{\frac{5}{8\pi^2}} D_{M 0}^2(\theta', \Phi').$$

Tehát a rotációs gerjesztés keresett redukált mátrixelemei

$$\langle 2 \| T_2 \| 0 \rangle = \frac{\beta_2}{\sqrt{5}},$$

$$\langle 2 \| T_2 \| 2 \rangle = -\sqrt{\frac{10}{7}} \frac{\beta_2}{\sqrt{5}}.$$

A vizsgált probléma mátrixelemeinek birtokában a (37) differenciálegyenletekből álló csatolt rendszer megoldását adott  $J$ -re numerikus módszerrel, számológép segítségével állíthatjuk elő. Az így kapott független radiális-hullámfüggvények szuperpozíciója szolgáltatja a valódi hullámfüggvényt. A megoldások aszimptotikus alakjának ismeretével megkapjuk a rugalmas és rugalmatlan szórás  $S$  mátrixelemeit, amelyeknek birtokában a megfelelő hatáskeresztmetszetek kiszámíthatók.

A csatornacsatolások számításokban bizonyos esetekben adiabatikus közelítést alkalmazhatunk. E közelítés is jó eredményeket ad, ha az alábbi feltételek teljesülnek: 1. A targetmag erősen deformált. 2. A bombázó energia sokkal nagyobb, mint a rotációs sáv gerjesztési energiái. 3. Csak az alapállapotra épülő rotációs sáv gerjesztése után érdeklődünk. Ekkor a csatolt egyenletrendszert a maghoz rögzített koordináta rendszerben írjuk fel, a csatoló potenciál (40) helyett

$$V_c^{rot}(r) = \sum_{\lambda} v^{rot}(r) \beta_{\lambda} Y_{\lambda}^0(\theta, \Phi),$$

ahol  $\theta, \Phi$  a maghoz rögzített koordinátarendszerben mért polárszögek (40) és (47)-ből a megfelelő hullámfüggvény és egyenletrendszer formálisan  $\bar{m}_j \rightarrow J$  helyettesítéssel adódik, ahol  $\bar{m}_j$  a  $j$  impulzusmomentumnak a mag szimmetriatengelyére való vetületét jelenti. A különböző  $m_j$  parciális hullámok között nem lép fel csatolás. Az egyenletek száma így lecsökken. A probléma leegyszerűsödése az adiabatikus közelítés következménye, amely szerint a targetmag mozgása elhanyagolható.

Csatornacsatolások elvégzésére alkalmas, a fenti formalizmusra alapozott számológépi programot  $T. Tamura$  készített, amely az irodalomban JUPITOR néven ismeretes (CDC-FORTRAN—63 kódban). Méréseink kiértékelésénél ennek ICT verzióját használtuk.

A deformációs paraméterek értéke más úton is, az elektromágneses átmeneti valószínűségekből,  $B(E\lambda)$ -ból meghatározható. Példának okáért  $\beta_2$  a mag  $Q_0$  belső



quadrupólmomentumából vagy a redukált elektromos quadrupól átmeneti valószínűségből határozható meg a következő összefüggés alapján

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} Z^2 r_0^2 A^{2/3} \beta_2 (1 + 0,16\beta_2),$$

$$B(E2; 0^+ \rightarrow 2^+) = \frac{5}{16\pi} e^2 Q_0^2,$$

ahol  $Z$  a mag rendszáma.

Fontos magszerkezeti információkat nyerhetünk a szórás csatornacsatolásos analíziséből és az elektromágneses átmeneti valószínűségek vizsgálatánál kapott  $\beta$  értékek összehasonlításával. Így pl. az egy és kétfononos vibrációs állapotok gerjesztését analizálva azt találjuk, hogy a kétfononos állapotok ( $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$ ) csatolásánál a  $\beta_{2,2} > \beta_2$ .  $\beta_2$  a  $0^+ \rightarrow 2^+$  alap- és egyfononos állapot csatolását írja le. Így  $\beta_{2,2}^2/\beta_2^2$  szolgáltatja azt a redukciós faktort, amellyel  $B(E\lambda)$  érték különbözik az egy és kétfononos állapotokról történő átmeneteknél. Egyben mércéül szolgálhat az egyszerű harmonikus modell elégtelenségére is. Ilyen redukcióra korábban csak a Coulomb-gerjesztések tanulmányozása alapján következtettek.

E két módon származtatott deformációs paraméter egyezése nem szükségszerű, hiszen a nukleon szórásból kapott paraméter a mag tömeg, míg az  $EM$  átmenetek szolgáltatja paraméter a töltés eloszlására jellemző. Az eddigi mérési pontosság által megszabott határokon belül e két módon meghatározott deformációs paraméterek egyezést mutatnak.

## VII. A RUGALMAS SZÓRÁSI KÍSÉRLETI ADATOK OPTIKAI MODELL ANALÍZISE. AZ ANOMÁLIA ÉRTELMEZÉSE AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT OPTIKAI POTENCIÁL ALAPJÁN

Analízisünkben a 14,7 MeV energiájú neutronok  $^{238}\text{U}$  magon való rugalmas szórásának differenciális hatáskeresztmetszetére vonatkozó mérési adatainkat használtuk fel, a totális hatáskeresztmetszet adatot, amelynek a számított értékkel való jó egyezését is megköveteltük, az irodalomból vettük [29].

Egy másik, szintén „anomálishan” viselkedő magra, a  $^{232}\text{Th}$ -ra is elvégeztük a rugalmas szórás analízist. Ehhez Hudson és munkatársainak [24] 15,2 MeV bombázó energiánál,  $\vartheta > 10^\circ$  szórési szögekben mért differenciális hatáskeresztmetszet adatait, valamint Dukárjevic és munkatársai által 14,2 MeV energián mért,  $\vartheta < 20^\circ$  szórési szögekre vonatkozó differenciális hatáskeresztmetszet adatokat használtuk fel. E két adatcsoportnak a  $10^\circ \leq \vartheta \leq 20^\circ$  szögtartományban való egyezése alapján a két független adatsorozat együttesét tekintettük analízisünk alapjának. A tórium totális hatáskeresztmetszetének kísérleti értékét is az irodalomból, [29]-ből vettük.



VIII. 1. A  $^{238}\text{U}$  ( $n, n$ ) folyamat optikai modell analízise

Elsőnek azt a kérdést tettük fel, vajon az uránon történő kisszögű rugalmas szórás anomáliája a hagyományos optikai modell keretein belül is jelentkezik-e.

Ismeretes az irodalomban *Coon* és munkatársainak 14,2 MeV bombázó energián végzett rugalmas neutron szórás kísérlete és annak optikai modell analízise [23]. Az optikai potenciálban felületi abszorpciót tételeztek fel. A formafaktorok geometriai paraméterei a Bjorklund—Fernbach neutron potenciálnak megfelelő paraméterek voltak. Az általuk kapott optimális potenciál erőssége a következők:

$$V_v = 44 \text{ MeV} \quad W_D = 11 \text{ MeV} \quad V_{so} = 8,3 \text{ MeV}.$$

E potenciálnak megfelelő, számított rugalmas szórási differenciális hatáskeresztmetszetet a 30. ábrán tüntettük fel. A kisszögű tartományban Dukárjevics mérési adatait és saját adatainkat tekintve is jelentkezik az anomália.

A számított és kísérleti totális hatáskeresztmetszetek a következők:

$$\sigma_{tot}^{exp} = (5,8 \pm 0,2)b \quad \sigma_{tot}^{elm} = 5,4b.$$

Ennek az analízisnek az eredményét azonban nem fogadhatjuk el maradéktalanul a következő negatív vonásai miatt:

1. Az analízisben nem a kísérleti adatoknak megfelelő számított mennyiségeket hasonlították össze.

2. A totális hatáskeresztmetszetek egyezése nem kielégítő.

A differenciális hatáskeresztmetszet a diffrakciós minimumokban nagyon eltér a kísérleti adatoktól, nagyobb szögekben a 2. és 3. diffrakciós maximumban, a mérési pontok felett megy az elméleti görbe. A valódi eltérés még nagyobb a rugalmas adatokban jelenlevő rugalmatlan járulék miatt.

Analízisünkben e hiányosságok kiküszöbölésére fordítottuk figyelmünket. Az optikai potenciálban térfogati abszorpciót is megengedtünk. A legjobb egyezést az

$$U(r) = (V + iW_v)f(r) + V_{so} \frac{\hbar}{r} \frac{d}{dr} f(r) \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

potenciálnál értük el, ahol  $f(r)$  a Saxon—Woods-formafaktor. A potenciál paraméterei a következők voltak:

$$V = 43 \text{ MeV}$$

$$W_v = 8,3 \text{ MeV}$$

$$V_{so} = 8,8 \text{ MeV}$$

$$a_v = 0,65f$$

$$a_w = 0,47f$$

$$r_0 = 1,25f$$

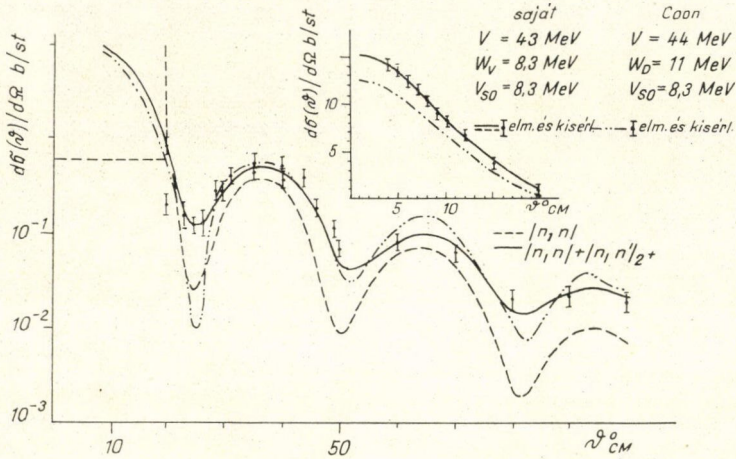
Az illesztési eljárásnál figyelembe vettük az urán első nívójának gerjesztésére vonatkozó rugalmatlan szórás ([39]-ből), mivel az a mért adatainkban is jelen volt. E járulék kis szögekben nem, de másutt, különösen a diffrakciós minimumokban jelentős volt, és befolyásolta az illesztés jószágát és így a paraméterek értékét [61].



## A totális hatáskeresztmetszetek egyezése

$$\sigma_{tot}^{exp} = (5,8 \pm 0,2)b \quad \sigma_{tot}^{elm} = 6b$$

kielégítő. A differenciális hatáskeresztmetszetre vonatkozó eredményeinket a 30. ábra szemlélteti, amely szerint már ennél az egyszerű analízisnél is megállapíthatjuk, hogy nincs anomália kis szögekben.



30. ábra

Az urán mag deformált, melynek következtében a rugalmas és rugalmatlan csatornák között erős a csatolás. Ezért az analízis ezen hagyományos módszerével nem elégszünk meg. Megjegyezzük továbbá, hogy amint az ismeretes, alacsony energiánál a Pauli-elv miatt a kölcsönhatás a mag felületi tartományában valószínű, ezért az optikai potenciálban realisabb az abszorpciót formailag is a felületre korlátozni a mag térfogatának egésze helyett. Az abszorpciónak a mag felületére való korlátozódását  $E < 20$  MeV esetén a nukleonszórás és a magreakcióvizsgálatok egész sora igazolja. Vizsgálatainkból ezt a problémát is ki akartuk küszöbölni, s ezért a realisztikusabb kölcsönhatási potenciál és reakciómodell keretein belül akarjuk az uránon való rugalmas szórást értelmezni.

## VII. 2. A $^{238}\text{U}$ ( $n, n$ ) folyamat analízise az általánosított optikai modell alapján

A szórás kísérleti adatainkat a csatolt egyenletek módszerével, néhány csatorna csatolására korlátozó közelítésben analizáltuk. Most a valóságot jobban közelítve, abból a magspektroszkópiai tapasztalatból indulunk ki, hogy az urán mag nem gömbszimmetrikus, és a mag neutronnal való kölcsönhatását leíró potenciálban figyelembe vesszük annak intenzív kvadrupól deformációját. A mag felületét az

$$R = R_0(1 + \beta_2 Y_2(\theta, \Phi))$$



összefüggéssel jellemezzük az általánosított optikai potenciálban (32), amelynek diagonális és csatolási részre bontása után

$$V(r, \theta, \Phi) = V_{\text{diag}} + V_c$$

a diagonális, a gömbszimmetrikus optikai potenciálnak megfelelő tagjában

$$V_{\text{opt}}(r) = Vf(r) + iW_D g(r) + V_{s0} \frac{\hbar^2}{r} g(r) l \cdot \sigma$$

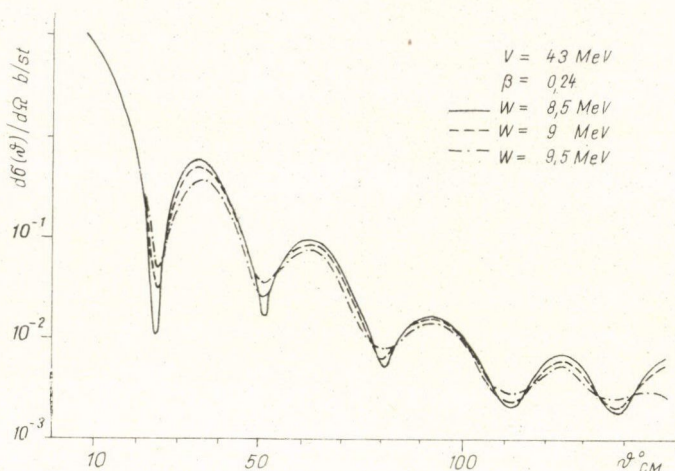
-ban a helyfüggést Saxon—Woods és derivált Saxon—Woods-forma faktorokkal írjuk le. Megjegyezzük, hogy  $V_c$ -nek is van diagonális mátrix eleme deformált magoknál, amely  $\beta^2$ -tel arányos. A  $V_c$  csatoló potenciált valósnak tételezzük fel. Analízisünk során arra törekszünk, hogy az urán szórásproblémáját ne egyedi jelenségként kezeljük. Ezért a széles tömegszám tartományban és energia intervallumban alkalmazható, a nem lokális potenciállal ekvivalens Wilmore—Hodgson lokális neutron potenciálból indulunk ki, a paramétereket annak megfelelően

$$\begin{aligned} V &= 43 \text{ MeV} \\ W_D &= 9,1 \text{ MeV} \\ V_{s0} &= 8,3 \text{ MeV} \\ r_0 &= 1,25 f \\ a_V &= 0,66 f \\ a_W &= 0,48 f \end{aligned} \tag{41}$$

értékűeknek vesszük fel. A deformációs paramétert  $\beta_2=0,24$ -nek, a Coulomb-gerjesztési kísérletekből ismert értékűnek tételezzük fel [62]. Feltesszük továbbá, hogy az alapállapotú rotációs sáv  $2^+$ ,  $4^+$  spin és paritású tagjainak csatolási effektusa mellett a többi állapoté elhanyagolható, azok gerjesztését a  $V_{\text{opt}}$  imaginárius részében vesszük figyelembe. Az  $(n, n)$ ,  $(n, n')$  és totális hatáskeresztmetszet számításokat a korábban említett JUPITOR programmal az ICT 1905-típusú számítógépen végeztük. A  $W_D$  és  $\beta_2$  paraméterek optimális értékének megkeresésénél az egyes lépésekben adiabatikus közelítést alkalmaztunk, amely a használt bombázóenergiánál, és csatolási sémánál jó közelítést ad a rugalmas szórási hatáskeresztmetszetre.

Először csatolásmentes és  $\beta_2=0$  esetben számítottuk ki  $\sigma(9)$ -t a (41) potenciállal. Ha  $\beta_2 \neq 0$ , de még a csatolástól eltekintünk  $\sigma(9)$  már függni fog a mag deformációjától  $V_c$  diagonális mátrixelemén keresztül, mivel a (38) redukált mátrixelem:  $\langle 2^+ \| T_2 \| 2^+ \rangle \sim \beta^2$ . Ha a csatolást is tekintjük  $W_D$  értéket a „tisza” rugalmasszórásnak megfelelő (41) értékhez képest csökkenteni kell, mivel most a csatolt csatornákat egzakt vesszük figyelembe, tehát a potenciál abszorpciós részéből ki kell hagyni járulékokat. A 31. ábrán a felületi potenciál erőssége változtatásának a rugalmas szórás szögeloszlására gyakorolt hatását szemléltetjük. A minimumok és maximumok helyét változatlanul hagyja, csak azok nagysága változik, kivéve az első maximumot, amelyre  $W_d$ -nek a 8,5—9,5 MeV intervallumban való változása hatástalan.



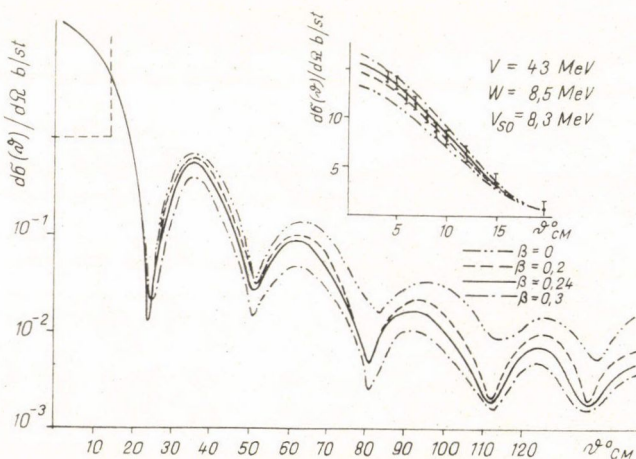


31. ábra

A 32. ábrán  $\sigma_{n,n}(\theta)$   $\beta_2$ -től való függését szemléltetjük, amely a kisszögű anomália szempontjából különösen fontos információt tartalmaz.  $\beta_2$  növekvő értékével a rugalmas szórás differenciális hatáskeresztmetszete az első diffrakciós maximumtól a növekvő szögek irányában haladva, egyre csökken mind a minimumokban, mind pedig a maximumokban. Ellentétes jellegű azonban a hatáskeresztmetszet kis szögekbeni viselkedése, ahol a  $\beta_2$ -vel való változása ellenkező értelmű mint az első minimumhelyet meghaladó szögeértékeknél.

Kísérleti adatainkhoz a mérési körülményeinknek megfelelő

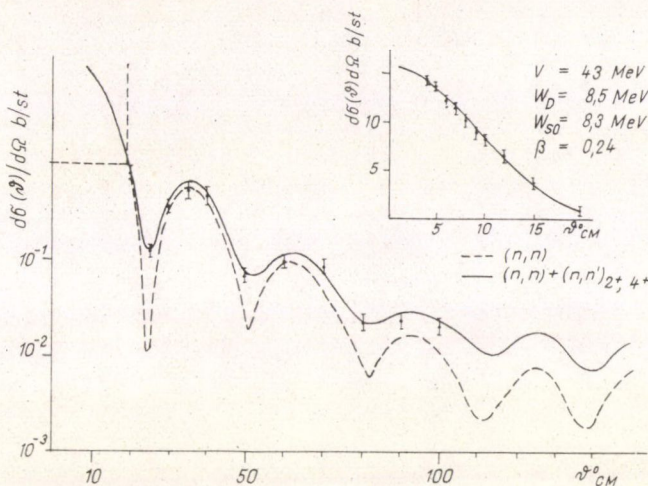
$$\sigma_{(n,n)}(\theta) + \sigma_{(n,n')}^{2+}(\theta) + \sigma_{(n,n')}^{4+}(\theta) \quad (42)$$



32. ábra



összeget illesztünk  $W_D$  és  $\beta_2$  változtatásával. Ezt az eljárást a deformált magok kollektív modellből ismert azon tulajdonságára alapozzuk, amely szerint a csatolási sémánkban szereplő alapállapotú rotációs sáv esetében az egyes csatornák közötti csatolás erősségét ugyanazon  $\beta_2$  deformációs paraméter szabja meg. Emlékeztetünk, hogy a kísérleti adataink a  $2^+$ ,  $4^+$ ,  $6^+$  spin és paritású állapotok gerjesztésére vezető



33. ábra

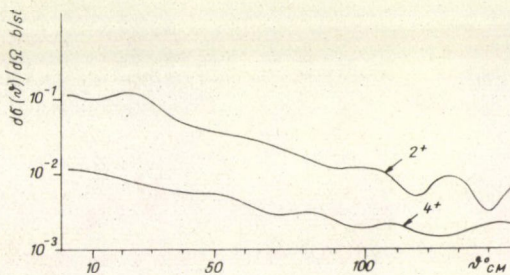
rugalmatlan szórás járulékát tartalmazzák. Mivel a  $6^+$  állapot gerjesztése egy nagyságrenddel kisebb valószínűségű, mint a  $4^+$  állapoté, a differenciális hatáskeresztmetszetek illesztésénél, a számított hatáskeresztmetszet összegben a  $6^+$ -os állapotnak megfelelő tagot elhanyagoltuk.

A 33. ábrán és a 6. táblázatban a  $W_D = 8,5$  MeV és  $\beta_2 = 0,24$  optimális értékkel számított differenciális hatáskeresztmetszetet és a mérési adatokat tüntettük fel. A  $2^+$  és  $4^+$  állapot gerjesztésére vezető rugalmatlan szórási hatáskeresztmetszetek, amelyekre (42)-ben hivatkozunk, a 34. ábrán láthatók. A megfelelő totális hatáskeresztmetszet értékek a következők:

$$\sigma_{tot}^{exp} = (5,8 \pm 0,2)b \quad \sigma_{tot}^{elm} = 5,79b.$$

Mind a differenciális szórási, mind a totális hatáskeresztmetszet elméleti és kísérleti értékeinek itt bemutatott jó egyezése azt bizonyítja, hogy az általánosított optikai modell teljes mértékben leírja a  $^{238}\text{U}(n, n)$  folyamatot.

Felvetődhet a kérdés, miként egyeztetjük össze az optikai és az általánosított optikai modell alapján kapott eredményeinket, konkrétan az optikai potenciálban



34. ábra



6. TÁBLÁZAT

$\vartheta_{CM}^0$	$\sigma_{exp}(\vartheta) [b/st]$	$\sigma_{(n,n)}^{elm}(\vartheta) [b/st]$	$\sum_{0^+ 2^+ 4^+} \sigma_{(n,n'), l}^{elm}(\vartheta)$
4	14,5 $\pm$ 0,5	14,3	14,3
5	13,8 $\pm$ 0,5		
6	12,2 $\pm$ 0,6	12,6	12,7
7	11,6 $\pm$ 0,5		
8	10,1 $\pm$ 0,6	10,6	10,7
9	8,5 $\pm$ 0,6		
10	8,2 $\pm$ 0,7	8,49	8,52
12	6,6 $\pm$ 0,5	6,3	6,42
15	3,7 $\pm$ 0,4		
20	(8,2 $\pm$ 0,9) $\cdot 10^{-1}$	6,47 $\cdot 10^{-1}$	7,62 $\cdot 10^{-1}$
25	(1,2 $\pm$ 0,2) $\cdot 10^{-1}$	1,08 $\cdot 10^{-2}$	1,25 $\cdot 10^{-1}$
30	(3,6 $\pm$ 0,5) $\cdot 10^{-1}$	3,36 $\cdot 10^{-1}$	4,35 $\cdot 10^{-1}$
35	(5,0 $\pm$ 0,8) $\cdot 10^{-1}$	5,44 $\cdot 10^{-1}$	6,10 $\cdot 10^{-1}$
40	(4,4 $\pm$ 0,8) $\cdot 10^{-1}$	3,91 $\cdot 10^{-1}$	4,45 $\cdot 10^{-1}$
50	(6,6 $\pm$ 1,0) $\cdot 10^{-2}$	3,19 $\cdot 10^{-2}$	7,40 $\cdot 10^{-2}$
60	(9,4 $\pm$ 1,4) $\cdot 10^{-2}$	8,68 $\cdot 10^{-2}$	1,11 $\cdot 10^{-1}$
70	(8,0 $\pm$ 1,4) $\cdot 10^{-2}$	4,66 $\cdot 10^{-2}$	7,21 $\cdot 10^{-2}$
80	(2,0 $\pm$ 0,4) $\cdot 10^{-2}$	7,12 $\cdot 10^{-3}$	2,26 $\cdot 10^{-2}$
90	(2,2 $\pm$ 0,4) $\cdot 10^{-2}$	1,59 $\cdot 10^{-2}$	2,70 $\cdot 10^{-2}$
100	(1,98 $\pm$ 0,4) $\cdot 10^{-2}$	1,12 $\cdot 10^{-2}$	2,29 $\cdot 10^{-2}$

az abszorpció radiális függésének eltérését. Stripping reakciók csatorna csatolás módszerével való tárgyalása során rámutattak arra, hogy a csatornák közötti csatolás fellépése úgy hat, mintha a kölcsönhatás a mag teljes térfogatára eloszlana [63]. Nem „véletlen” tehát, hogy a csatornák közötti csatolás figyelmen kívül hagyása esetén éppen térfogati abszorpció feltételezésével sikerült a rugalmas szórás kísérleti adatokat reprodukálni.

### VII. 3. 15,2 MeV energiájú neutronok tóriumon való rugalmas szórásának analízise az általánosított optikai modell alapján

Az uránon történő rugalmas szórás értelmezésére itt alkalmazott gondolatmenetünket azzal is ellenőrizzük, hogy az irodalom szerint az uránhoz hasonlóan „anomálishan” viselkedő tóriumra is alkalmaztuk azt.

Hudson és munkatársai elvégezték a rugalmas szórás adatok hagyományos optikai modell analízisét (37. ábra). Az általuk használt potenciál paraméterei a következők voltak:

$$V = 44 \text{ MeV} \quad a_V = 0,65 f$$

$$W_D = 11 \text{ MeV} \quad a_W = 1 f$$

$$V_{so} = 8,3 \text{ MeV} \quad r_0 = 1,25 f$$



E potenciállal számított differenciális hatáskeresztmetszet, valamint *Dukárjevic* és munkatársai kísérleti adatainak összevetéséből e magnál is anomáliára következtethetünk a kis szórési szögekben. A második diffrakciós maximumot kivéve nem sikerült e potenciállal reprodukálni a kísérleti adatokat. Várható, hogy a tórium mag deformációját figyelembe véve, az  $^{238}\text{U}$  mag rugalmas szórásához hasonlóan „eltűnik” az anomália.

A  $^{232}\text{Th}$  mag nívósémáját a 35. ábrán tüntettük fel. A szórási kísérletben a rugalmasan szórt neutronok regisztrálásánál használt energiefeltöltés 1,2 MeV volt. Tehát alapállapotú rotációs sáv tagjain kívül a  $\beta$  és  $\gamma$ , továbbá az oktopol vibrációs állapotok gerjesztésére vezető rugalmatlan szórás járulékát is magukban foglalják a kísérleti adatok. Ez utóbbiak figyelembevételére az illesztési eljárásunk során nem volt lehetőségünk (a számológép memória kapacitásának korlátai miatt).

A csatorna csatolásos számításainkban a  $0^+$ ,  $2^+$  és  $4^+$  állapotoknak megfelelő csatornák közti csatolást vettük figyelembe egzaktt, a többi rugalmatlan folyamatot csak az optikai potenciál képzetes részén keresztül.

A kiindulási, Wilmore—Hodgson-potenciál paraméterek a következők voltak:

$$V = 43 \text{ MeV}$$

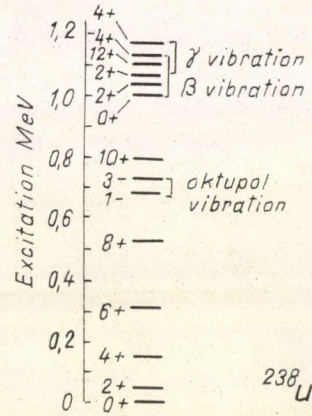
$$W_D = 8,8 \text{ MeV}$$

$$V_{so} = 8,3 \text{ MeV}$$

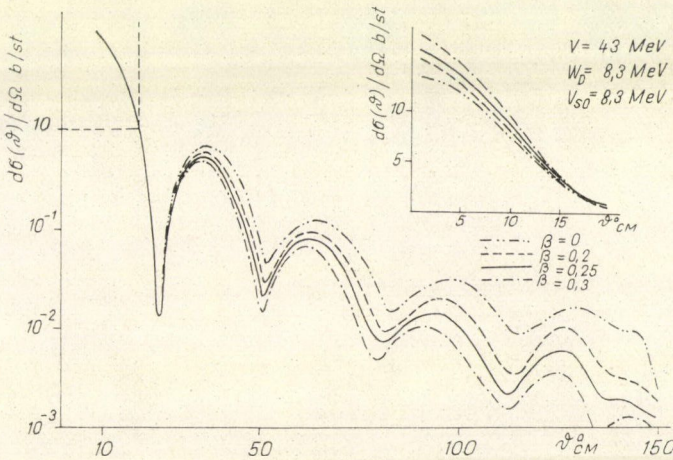
$$a_V = 0,66f$$

$$a_W = 0,48f$$

$$r_0 = 1,25f$$



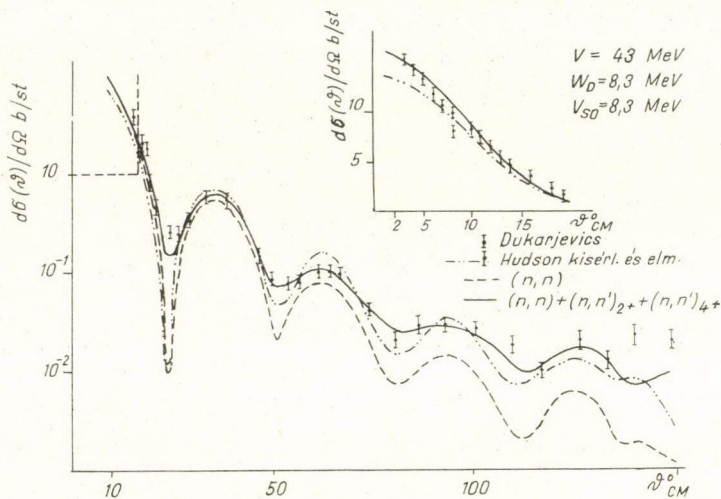
35. ábra



36. ábra



A  $\beta_2=0,25$  értéket Coulomb-gerjesztési kísérletekből vettük [62]. A képzetes potenciál és a deformációs paraméter optimális értékét a (42)-nek megfelelő összeg kísérleti adatokhoz való illesztésével határoztuk meg. A deformációtól való függést a 36. ábrán szemléltettük. A rugalmas szórás szögeloszlását a  $\beta_2$  paraméter változása az urán rugalmas szórásához hasonlóan módosítja. A kísérleti adatokkal való leg-



37. ábra

jobb egyezést  $W_D=8,3$  MeV és  $\beta_2=0,25$ -nél értük el (37. ábra). Ekkor a totális hatáskeresztmetszetek is jól megegyeztek:

$$\sigma_{tot}^{exp} = (6 \pm 0,15)b \quad \sigma_{tot}^{elm} = 5,9b.$$

Várakozásunknak megfelelően a teljes szögtartományban sikerült az általánosított optikai modell segítségével jól reprodukálni a kísérleti adatokat, anomáliát kis szögekben sem találtunk.

## VIII. ÖSSZEFOGLALÁS

Alexandrov és munkatársai gyors neutronok nehéz magokon való rugalmas szórásában anomáliát észleltek. Hasonló jelenséget találtak Dukarjevics, Elwyn és munkatársaik különböző neutronenergiáknál.

Anomália jelentkezése a rugalmas neutronszórásban nagy érdeklődést váltott ki világszerte. Sok próbálkozás történt különböző módon való értelmezésére: Hosszú hatótávolságú elektromágneses kölcsönhatás járulékanak tulajdonították, de sem a neutron mágneses momentumának, sem a feltételezett indukált dipolmomentumának a magok Coulomb-terével való kölcsönhatása alapján nem sikerült értelmezni.

Felvetődött olyan gondolat is, hogy speciális magreakciók járuléka okozza a rugalmas szórás anomáliáját. E feltételezés ellenőrzésére kísérletet végeztünk és



megmutattuk, hogy 14 MeV energián sem a  $^{238}\text{U}(n, \alpha n')$   $^{232}\text{Th}$  reakció, sem a  $^{238}\text{U}(n, nf)$  hasadási folyamat fellépésével nem magyarázható az anomália.

A kisszögű anomália eredetének tisztázása érdekében precíz rugalmas szórás kísérletet végeztünk és 14,7 MeV bombázóenergiánál megmértük a rugalmas szórás differenciális hatáskeresztmetszetét.

A rugalmas szórás kísérleti adatokat az optikai modell és a kollektív tulajdonságokkal rendelkező magokra általánosított optikai modell alapján, korszerű reakciómodell segítségével teljes mértékben sikerült értelmezni:

1. Megmutattuk, hogy 14,7 MeV neutron energiánál a  $^{238}\text{U}(n, n)$  folyamat hagyományos optikai modell analízisével reprodukálhatóak a rugalmas szórás kísérleti adatok. Már ennek az egyszerű modellnek a keretei között is sikerült megmutatni, hogy a kisszögű szórásban nincs anomália.

2. A  $^{238}\text{U}(n, n)$  folyamat csatorna csatolás módszerével végzett analízisében megmutattuk a kisszögű rugalmas szórásnak a mag deformációs paraméterétől való függését. Sikerült a teljes szögterületben reprodukálni a 14,7 MeV bombázó energiára vonatkozó kísérleti adatokat, és magyarázni a korábbi analízisek során az anomália jelentkezését.

3. A  $^{232}\text{Th}(n, n)$  folyamatnak az általánosított optikai modell alapján való analízisével is jó egyezést értünk el az elméleti és kísérleti adatok között a teljes szögterületben, anomália fellépését itt is kizártuk.

Hangsúlyozzuk, hogy a rugalmas szórás analízisünk során sem a  $^{238}\text{U}$ , sem a  $^{232}\text{Th}$  magon való szórás nem kezeltük speciális problémaként, a széles körben használt csatorna csatolás módszerének alkalmazásával sikerült az anomália problémáját feloldani, és legalábbis 14,7 MeV bombázóenergián a  $^{238}\text{U}$  és  $^{232}\text{Th}$  magokon való rugalmas szórásban kizárni a kisszögű anomália fellépését.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton mondok köszönetet *Ádám András*, a fizikai tudományok doktorának, aki mindvégig figyelemmel kísérte munkámat, és hasznos tanácsokkal látott el, továbbá csoportja tagjainak, akikkel együtt végeztük a kísérleti munkákat, *Graskó Péter* tudományos munkatársnak a diszperziós elméleti kérdések, *Bencze Gyula*, a fizikai tudományok kandidátusának a csatorna csatolásos analízissel kapcsolatos problémák diszkutálásában nyújtott segítségével, *Deák Ferenc* egyetemi tanársegédnek, aki a csatorna csatolásos programot ICT-re adaptálta, *Veress Imre* és csoportjának a neutrongenerátor gondos üzemeltetéséért.

## IRODALOM

1. Alexandrov, Y. A., Bondarenko, I. I., ZsETF 31, 726, 1956.  
Alexandrov, Y. A., ZsETF 32, 115, 1957 és 33, 294, 1957.
2. Alexandrov, I. A., Anikin, G. V., Szoldatov, A. Sz., ZsETF 40, 1878, 1961 és PTE 5, 34, 1961.
3. Dukarjevics, U. V., Djumin, A. N., ZsEFT 44, 130, 1963.
4. Fossan, D. B., Walt, M., Phys. Rev. Letters 12, 672, 1964 és Phys. Rev. 137, B629, 1965.
5. Elwyn, A. J., Monahan, J. E., Lane, R. O., Langsdorf, A. Jr., Mooring, F. P., Phys. Rev. 142, B758, 1966. Internat. Conf. on the Study of Nuclear Structure with Neutrons, Antwerpen 1965 p. 150.



6. *Anikin, G. V., Alexandrov, Y. A., Soldatov, A. S.*, Internat. Conf. on the Study of Nuclear Structure with Neutrons, Antwerpen 1965 p. 196.
7. *Schwinger, J.*, Phys. Rev. 73, 407, 1948.
8. *Monahan, J. E., Elwyn, A. J.*, Phys. Rev. 136, B1678, 1964.
9. *Redmond, R. F.*, Phys. Rev. 140, B1267, 1965. Internat. Conf. on the Study of Nuclear Structure with Neutrons, Antwerpen 1965 p. 153.
10. *Moore, S. O., Auerbach, E. H.*, BNL 818 report és Phys. Rev. 135, B895, 1964.
11. *Weisskopf, V., Feshbach, H.*, Phys. Rev. 114, 827, 1959.
12. *Thaler, R. M.*, Phys. Rev. 114, 827, 1965.
- Langsdorf, A. Jr., Lane, R. O., Monahan, J. E.*, Phys. Rev. 107, 1077, 1957.
13. *Barasenkov, V. S. Barabaskov, B. M.*, Nucl. Phys. 9, 926, 1958.
14. *Breit, G. Rustgi, M. L.*, Phys. Rev. 114, 830, 1959.
15. *Hraskó P., Kövessy Zs.*, Acta Phys. Hung. XX. 285, 1966.
16. *Schapiro, I. Sz.*, ZsETF 41, 244, 1961,  
Nucl. Phys. 28, 244, 1961.  
Selected Topics in Nuclear Theory International  
Summer School Low Tatra Mountains 1962.
17. *Ádám A., Pálka G., Quittner P.*, Acta Phys. Hung. 20, 227, 1966.
18. *Pálka G.*: Előadás a II. Magyar Magfizikai Nyári Iskolán, Sárospatak, 1967.
19. *Smith, A. G., Henkel, R., Nobles, J. J.*, Bull. Am. Phys. Soc. II. 2, 196, 1957.
20. *Leachmann.*: Genfi Konferencia 1956 Vol. 2.
21. *Hughes, R. J., Schwartz, R. B.*, Neutron Cross Sections Brookhaven Nat. Lab. 1958
22. *Ádám A., Hraskó P., Pálka G.*, Phys. Letters 22, 475, 1966.
23. *Coon, J. H., Davis, R. W., Felthausen, H. F., Nicodemus, D. B.*, Phys. Rev. 3, 250, 1958
24. *Hudson, C. J., Walker, W. S., Berko S.*, Phys. Rev. 128, 1271, 1962.
25. *Ádám A., Quittner P., Pálka G.*, Acta Phys. Hung. 17, 353, 1964.
26. *Neszmélyi A., Pálka G.*, Internat. Conf. on Nuclear Phys. Balatonöszöd, 1960.  
KFKI Közl. 8, 275, 1960.
27. *Ádám A., Pálka G., Quittner P., Pásztor E.*, Nucl. Instr. and Meth. 25, 365, 1964.
28. *Ádám A., Quittner P., Pálka G.*, PTE 4, 49, 1964.
29. *Howerton, R. J.*, UCLR—5226, UCRL—6351
30. *Clarke, R. L., Cross, W. G.*, Nucl. Phys. 53, 177, 1964.
31. *Anderson, J. D., Gardner, C. C., Nakada, M. P., Wong C.*, Phys. Rev. 110, 1439, 1958.
32. *Coon, J. H., Davis, R. W., Felthausen H. E., Nicodemus D. B.*, Phys. Rev. 111, 250, 1958.
33. *Ádám A., Deák F., Hraskó P., Kiss Á., Jéki L., Kövessy Zs., Pálka G.*, Acta Phys. Hung. 25, 261, 1968.
34. *Barasenkov, V., Kaiser, H.*, Fortsshr. Phys. 10, 33, 1962.
35. *Maddison, R. N.*, Proc. Phys. Soc. London 79, 264, 1962.
36. *Perey, F. G.*, Phys. Rev. 131, 745, 1963.
37. *Melkanoff, M. A., Sawada, T., Raynal, J.*, Nuclear Optical Model Calculations. In VOL V. of Methods in Computational Physics. Ed. by Alder, B. at. al. Academic Press, New-York and London, 1966.
38. *Bjorklund, F. B., Fernbach, S.*, Phys. Rev. 109, 1295, 1958.
39. *Brueckner, K. A., Gammel, J. L., Weitzner, M.*, Phys. Rev. 110, 431, 1958.
40. *Frahn, W. E., Lemmer, R. H.*, Nuovo Cimento 5, 1967.
41. *Perey, F. G., Buck, B.*, Nucl. Phys. 32, 353, 1962.
42. *Perey, F. G.*, Phys. Rev. 131, 745, 1963.
43. *Tamura, T.*, Rev. Mod. Phys. 37, 679, 1965.
44. *Bencze Gy.*, Phys. Letters 23, 713, 1966.
45. *Wilmore, D., Hodgson, P. E.*, Nucl. Phys. 55, 673, 1964. Intern. Conf. on the Study of Nuclear Structure with Neutrons (Antwerpen) 1965. No 155.
46. *Gersten, A.*, Nucl. Phys. A95, 288 1967.
47. *Satchler, G. R.*, Nucl. Phys. A92, 273, 1967.
48. *Hodgson, P. E.*, Nucl. Phys. A103, 127, 1967.
49. *Hodgson, P. E.*, Can. J. Phys. 449, 1967.
50. *Hodgson, P. E.*, Nucl. Phys. A150. 1, 1970.
51. *Bohr, A., Mottelson, B. R.*, Mat. Phys. Medd. 16, 27, 1953.
52. *Baldoni, B., Saruis, A.*, Nuovo Cimento 33, 1145, 1964.
53. *Zuffi L.*, Intern. Conference on Nuclear Data, Paris 1966.



54. *Baldoni, B., Benzi, V.*, Internat. Conf. on the Study of Nuclear Structure with Neutrons Antwerpen (No 145) 1965.
55. *Buck, B.*, Phys. Rev. *130*, 712, 1963.
56. *Holmquist, B., Wiedling, T., Benzi, V., Zuffi L.*, Annual Progress Report, Studtsvik 1970. 2nd Intern. Conf. on Nuclear Data for Reactors. 1970.
57. *Fasoli, U., Sambo, P., Toniolo, D., Zago, G., Zuffi, L.*, Nucl. Phys. *A133*, 572, 1969.
58. *Fasoli, U., Toniolo, D., Benzi, V., Zago, G.*, Nucl. Phys. *A125*, 227, 1969.
59. *Ádám A., Deák F., Kecskeméti J., Konc P., Pálka G.*, megjelenés alatt
60. *Tamura, T.*: Computer Program JUPITOR-1 for Coupled-Channel Calculations ORNL-4152, 1967.
61. *Ádám A., Deák F., Jéki L., Kiss Á., Kövessy Zs., Hraskó P., Pálka G.*, Jagyernaja Fizika, 439, 1968.  
Internat. Symposium on Nuclear Structure Dubna, 1968 p. 126.
62. *Fuller, G. H., Cohen, L. W.*, Nuclear Data Tables *A5*, 433. 1969.
63. *Bencze Gy.*, magán információ







## Külföldi publikációk

### A MTA LUMINESZCENCIA ÉS FÉLVEZETŐ TANSZÉKI KUTATÓ CSOPORT TAGJAINAK 1972-BEN KÜLFÖLDI FOLYÓIRATOKBAN MEGJELENT DOLGOZATAINAK ADATAI

1. *Hevesi János—Kozma László*: O szvjazi teplovogo izlucsenija i ljumineszcencii. Optika i Szpektroszk. 32, 891, 1972.
2. *Ketskemény István—Kozma László*: Über den Schwellenwert der Pumpenenergie von Flüssigkeitslasern im quasistationären Betrieb. Z. Naturforschg. 27a, 1685, 1972.
3. *Ketskemény István—Kozma László—Farkas Éva*: Szpektrofotometriceszkie iszszleaovanija rasztvorov organicseszkih kraszitelej v dalekoj antisztokszovoj oblaszti. Zs. Prikl. Szpektroszk. 17, 59, 1972.
4. *Kispéter József—Gombay Lajos—Lang János*: Untersuchungen zum Kristallisationsprozess in Selenpresskörpern. Z. Naturforschg. 27a, 1124, 1972.
5. *Kozma László—Ketskemény István—Farkas Éva*: K opredeleniju csasztot csiszto élektroonnüh perehodov rasztvorov organicseszkih kraszitelej. Zs. Prikl. Szpektroszk. 16, 724, 1972.
6. *Lehoczki Endre—Bálint Erzsébet—Hevesi János*: Vlijanie temperaturü na migraciju vozbuždajuschej energii v model'nych szisztemah. Zs. Prikl. Szpektroszk. 16, 97, 1972.
7. *Lehoczki Endre—Hevesi János—Bálint Erzsébet*: Izucsenie szvjazi mezsdu teplovüm izlucseniem i ljumineszcencnüm iszpuszkaniem v rasztvorah kraszitel'—detergent. Zs. Prikl. Szpektroszk. 16, 1008, 1972.
8. *Lehoczki Endre—Hevesi János*: O proceszszah aggregacii kraszitelej v rasztvorah detergenta. Dokl. Akad. Nauk SzSzSzR 206, 1158, 1972.
9. *Gajszin, V. A.—Nánai László—Nedzveckij, D. Sz.*, Szpektrü pogloszcenija i ljumineszcencii krasznoj monookszi szvinca, Fiz. Tverdого Tela 14, 2752, 1972.
10. *Rác BÉla—Ketskemény István—Kozma László*: Generacija szmesannüh rasztvorov organicseszkih kraszitelej. Zs. Prikl. Szpektroszk. 16, 914, 1972.
11. *Bauer, R. K.—Szalay László—Tombácz Erzsébet*: Migration of Electronic Energy from Chlorophyll-a in Solutions. Biophys. J. 12, 731, 1972.







# A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

## A GALILEI-CSOPORT ÁBRÁZOLÁSAI\*

ERDAL INÖNÜ ÉS WIGNER JENŐ

**Összefoglalás.** — Amíg a mozgó koordinátarendszerre való áttérés  $(x \rightarrow x+vt, t \rightarrow t)$  a klasszikus mechanikában kommutál az eltolásokkal  $(x \rightarrow x+a, t \rightarrow t)$ , a megfelelő operációk Schrödinger nemrelativisztikus hullámmechanikájában nem kommutálnak. Ha a két operációt először az egyik, azután a másik sorrendben alkalmazzuk, a két eredmény az  $\exp [imv \cdot a/h]$  tényezőben különbözik. Ebben a dolgozatban olyan nemrelativisztikus kvantummechanika lehetőségét vizsgáljuk, amelyben a hullámfüggvény transzformációi ugyanazon felcserélési összefüggéseknek tesznek eleget, mint maguk a transzformációk. Kitűnik, hogy az ilyen mechanikában a hely- és impulzus-operátorok csak akkor létezhetnek, ha az reducibilis, azaz ha az összes állapot rendszere felbontható olyan részrendszerekre, melyek magukban invariánsak a klasszikus mechanika valamennyi megengedett transzformációjával szemben (elforgatások, eltolások, szoros értelemben vett Galilei-transzformációk).

### Bevezetés

Jól ismert, hogy minden relativisztikusan invariáns hullámegyenlet az inhomogén Lorentz-csoportnak (vagy Poincaré-csoportnak) egy-egy unitér ábrázolását definiálja [1]. Megfordítva azonban nem igaz, hogy ezen csoport minden unitér ábrázolásának megfelel egy-egy fizikailag értelmes elmélet. Ténylegesen úgy látszik, hogy a térszerű impulzusvektorral rendelkező részecskék létezése (az [1] dolgozatban a 4. eset, 186. old.) ellentmondana a kauzalitás elvének, és hogy az olyan hullámfüggvények rendszere, amelyek mind külön-külön invariánsak eltolásokkal szemben (az [1] dolgozatban a 3. eset), nem írhatnak le részecskéket.

Ezen dolgozat célja: megvizsgálni a nemrelativisztikus mechanika szimmetriacsoportjának (a Galilei-csoportnak) az ábrázolásait, és tisztázni, hogy ezen ábrázolások közül melyek felelhetnek meg fizikailag értelmes elméleteknek. E kérdésre nyilvánvaló a válasz azon ábrázolások esetében, amelyek a nemrelativisztikus Schrödinger-egyenletnek felelnek meg. Ezek az ábrázolások tényező erejéig meghatározott ábrázolások: jóllehet a mozgó koordinátarendszerre való áttérésnek megfelelő szimmetriatranszformációk az eltolásnak megfelelő transzformációkkal kommutálnak, az  $\exp [imv \cdot x/h]$  és  $x \rightarrow x+a$  operátorok, amelyek ezen szimmetriatranszformációknak megfelelnek, nem felcserélhetők. Különböző sorrendben képezett szorzataik az  $\exp [imv \cdot a/h]$  tényezőben különböznek. V. Bargmann megmutatta továbbá [2], hogy ezek az ábrázolások lényegében az egyedüli „tényező erejéig meghatározott” ábrázolások. Ez okból a jelen dolgozat a Galilei-csoport igazi ábrázolásainak vizsgálatára korlátozódik. Az első szakaszban leírjuk a csoportot és meghatározzuk ábrázolásait. A második szakaszban megkíséreljük, hogy fizikai értelmezést találjunk ezen egyenletek számára. A következtetés, amelyre eljutunk, az, hogy ezeknek

\* Il Nuovo Cimento 9, 705, 1952.



az ábrázolásoknak nem felelnek meg részecskéket leíró egyenletek. Vizsgálataink folyamán ki fogunk térni az egy pontban lokalizált állapotok, a minden irányban meghatározott sebességkomponensekkel jellemzett állapotok, és a csak egy irány mentén meghatározott sebességgel jellemzett állapotok felkutatására.

## 1. A Galilei-csoport

### A) A Definíció és elemi tulajdonságok

A valódi Galilei-csoport tartalmazza a térbeli és az időbeli eltolásokat, az elforgatásokat és az áttérést egyenletesen mozgó koordináta-rendszerekre (szoros értelemben vett Galilei-transzformációk vagy akcelerációk). A csoport általános elemének jele legyen  $G=(a, b, v, R)$ , ahol  $a$  az  $x' = x + a$  térbeli eltolást,  $b$  a  $t' = t + b$  időbeli eltolást,  $v$  az  $x' = x + vt$  akcelerációt,  $R$  pedig az  $x' = Rx$  elforgatást jelöli. A transzformációkat abban a sorrendben kell alkalmazni, amelyben jobbról balra haladva követik egymást. Az elemi transzformációk között a következő relációk állnak fenn:

$$(a_1)(a_2) = (a_2)(a_1) = (a_1 + a_2), \quad (1)$$

$$(b_1)(b_2) = (b_2)(b_1) = (b_1 + b_2), \quad (2)$$

$$(v_1)(v_2) = (v_2)(v_1) = (v_1 + v_2), \quad (3)$$

$$(R_1)(R_2) = (R_1 R_2), \quad (4)$$

$$(a)(b) = (b)(a), \quad (5)$$

$$(a)(v) = (v)(a), \quad (6)$$

$$(R)(a) = (a')(R), \quad \text{ahol } a' = Ra, \quad (7)$$

$$(v)(b) = (b)(a)(v), \quad \text{ahol } a = bv, \quad (8)$$

$$(b)(R) = (R)(b), \quad (9)$$

$$(R)(v) = (v')(R), \quad \text{ahol } v' = Rv. \quad (10)$$

Megjegyezzük a következőket:

a) A térbeli és az időbeli eltolások egymás között, valamint egymással kommutálnak. Ugyanez igaz a térbeli eltolásokra és az akcelerációkra is.

b) Az akcelerációk nem kommutálnak az időbeli eltolásokkal. Az elforgatásokkal kapcsolatban hasonlóan viselkednek a térbeli eltolásokhoz.

Az (1)–(10) összefüggések felhasználásával könnyen kiszámítható két inhomogén Galilei-transzformáció szorzata:

$$(a_1, b_1, v_1, R_1)(a_2, b_2, v_2, R_2) = (a, b, v, R), \quad (11)$$

ahol

$$a = a_1 + b_2 v_1 + R_1 a_2,$$

$$b = b_1 + b_2,$$

$$v = v_1 + R_1 v_2,$$

$$R = R_1 R_2.$$



Az inverz

$$(a, b, v, R)^{-1} = (R^{-1}(bv - a), -b, -R^{-1}v, R^{-1}), \quad (12)$$

az egységelem pedig  $(O, O, O, E)$ .

### B) Az irreducibilis ábrázolások meghatározása

Legyenek  $T(a)$ ,  $\mathfrak{G}(b)$ ,  $G(v)$ ,  $O(R)$  rendre az elemi transzformációknak megfelelő operátorok; ekkor  $U(G) = T(a)\mathfrak{G}(b)G(v)O(R)$  az általános Galilei-transzformációnak felel meg. Ha valamely állapotot a  $g$  rendszerben a  $\psi_g$  hullámfüggvény ír le, akkor a  $\psi_g$  függvény, amelyet valamely operátor, mondjuk  $T(a)$  alkalmazásának eredményeként kapunk, ugyanazt az állapotot írja le a  $g' = (a)g$  rendszerben. Más szavakkal, a  $\psi_g$  hullámfüggvényen az  $x', t'$  pontban elvégzett mérés ugyanazt az eredményt fogja adni, mint a  $\psi_g$  hullámfüggvényen az  $x, t$  pontban végzett mérés, ahol  $x' = x + a$  és  $t' = t$ . Megjegyezzük itt, hogy mindvégig időtől független hullámfüggvényekkel fogunk dolgozni (Heisenberg-kép); ezek tekinthetők az időtől függő hullámfüggvény  $t=0$  mellett felvett értékeinek. Az állapot időbeli változását a  $\mathfrak{G}(b)$  operátor segítségével fogjuk leírni. Eszerint az időtől függő hullámfüggvény értékét a  $t=t_0$  időpontban

$$\psi(t_0) = \mathfrak{G}(-t_0)\psi$$

adja meg (itt  $\psi$  az időtől független hullámfüggvény), minthogy  $\mathfrak{G}(-t_0)$  abba a rendszerbe transzformál, amelyben  $t' = t - t_0$ , és  $t' = 0$  azt jelenti, hogy  $t = t_0$ .

Ahhoz, hogy az  $U(G)$  operátorok igazi ábrázolást képezzenek, teljesíteniük kell az

$$U(G_1)U(G_2) = U(G_1G_2) \quad (13)$$

összefüggést, ahol a  $G_1G_2$  szorzatot (11) határozza meg; vagy mivel az (1)–(10) összefüggések ekvivalensek (11)-gyel, a  $T(a)$ ,  $\mathfrak{G}(b)$ ,  $G(v)$  és  $O(R)$  elemi operátoroknak teljesíteniük kell az (1)–(10) relációkat, ahol is az egyes transzformációk helyére a megfelelő operátorok helyettesítendők. Az ábrázolásokat Frobenius módszerével fogjuk meghatározni, amely az egész csoport ábrázolásait egy invariáns alcsoport ábrázolásából építi fel a „kis csoport” segítségével. Ezen módszer alkalmazásával történt korábban az inhomogén Lorentz-csoport ábrázolásainak a meghatározása [1].

Invariáns alcsoportnak választhatjuk a térbeli és időbeli eltolások csoportját vagy a térbeli eltolások és az akcelerációk csoportját. Célszerűbbnek látszik az utóbbit használni. Minthogy a  $T(a)$  és  $G(v)$  operátorok mind egymással, mind pedig egymás között felcserélhetők, a Hilbert-térben bevezethető olyan koordináta-rendszer, hogy a  $\psi(p, q, \zeta)$  hullámfüggvények a  $p, q$  vektoroktól s egy  $\zeta$  diszkrét változótól függjenek, és teljesüljenek rájuk a

$$T(a)\psi(p, q, \zeta) = \exp[ip \cdot a]\psi(p, q, \zeta), \quad (14)$$

$$G(v)\psi(p, q, \zeta) = \exp[iq \cdot v]\psi(p, q, \zeta) \quad (15)$$

relációk.

Definiáljuk a  $P(b)$  operátort a

$$P(b)\psi(p, q, \zeta) = \psi(p, q - bp, \zeta) \quad (16)$$



egyenlet segítségével. Eszerint a  $\varphi = P(b)\psi$  függvény a  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta)$  pontban azt az értéket veszi fel, amit a  $\psi$  függvény a  $(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \zeta)$  pontban. Ekkor fennáll:

$$G(\mathbf{v})P(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}]P(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}]\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \zeta).$$

Hasonló módon kiszámítható a  $P(b)T(b\mathbf{v})G(\mathbf{v})\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta)$  függvény is, és eredményül a

$$G(\mathbf{v})P(b) = P(b)T(b\mathbf{v})G(\mathbf{v}) \quad (17)$$

egyenlőséget kapjuk. Ez, valamint a

$$P(b)^{-1} = P(-b) \quad \text{és a} \quad P(b)T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{a})P(b) \quad (18)$$

összefüggés, azt mutatja, hogy  $P(b)$  ugyanazon egyenlőségeknek tesz eleget, amelyeket (5) és (8) szerint  $\mathcal{P}(b)$  tartozik teljesíteni. Így tehát  $\mathcal{P}(b)P(b)^{-1}$  felcserélhető a  $G(\mathbf{v})$  és  $T(\mathbf{a})$  operátorok mindegyikével, s ennél fogva  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{p}$  bármely függvényével. Írható tehát:

$$\mathcal{P}(b) = V(b)P(b), \quad (19)$$

ahol  $V(b)$  csak  $\zeta$ -ra hat, jóllehet függhet  $\mathbf{p}$ -től és  $\mathbf{q}$ -től:

$$\mathcal{P}(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \sum_{\eta} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, b)_{\zeta\eta} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q} - b\mathbf{p}, \eta). \quad (20)$$

Definiáljuk most az  $Y(R)$  operátort az

$$Y(R)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \psi(R^{-1}\mathbf{p}, R^{-1}\mathbf{q}, \zeta)$$

képlettel. Felhasználva a (7), (10) képleteket, hasonló okoskodással meg lehet mutatni, hogy  $O(R)Y(R)^{-1}$  nem hat  $\mathbf{p}$ -re és  $\mathbf{q}$ -ra, úgyhogy

$$O(R)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \zeta) = \sum_{\eta} Z(\mathbf{p}, \mathbf{q}, R)_{\zeta\eta} \psi(R^{-1}\mathbf{p}, R^{-1}\mathbf{q}, \eta). \quad (21)$$

A (14), (15), (20), (21) alatt meghatározott  $T(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{P}(b)$ ,  $G(\mathbf{v})$ ,  $O(R)$  operátorok teljesítik az (1)–(10) alatt felírt felcserélési összefüggéseket, a (2), (4) és (9) relációk kivételével. Mielőtt meghatároznánk  $V$ -t és  $Z$ -t ezen összefüggések alapján, határozzuk meg azt a tartományt, amelyben a  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  vektorok változhatnak. Ez a Galilei-csoport különböző ábrázolásai esetében más és más lesz.

Ha a  $T(\mathbf{a})$ ,  $G(\mathbf{v})$  operátorok képeznek a teljes csoportot, a  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  vektorpár változásának tartományát egyetlen pontra korlátozhatnánk:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$  és az irreducibilis ábrázolások mind egydimenziósak lennének. Az  $(R)$  és  $(b)$  csoportelemekre való tekintettel ez nem lehetséges: (20) és (21) azt mutatja, hogy abban az ábrázolásban, amelyben  $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$  a változóknak megengedett értékei,  $R\mathbf{p}_0, R\mathbf{q}_0$  és  $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0 - b\mathbf{p}_0$  szintén megengedett értékek. Ez minden  $R$  elforgatásra és  $b$  minden értékére igaz.

Másrészről valamely irreducibilis ábrázolásban a  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  pár változási tartománya azon párokra korlátozódik, amelyek megkaphatók egyetlen  $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$  párból a fenti transzformációk egymást követő alkalmazásával. Általános alakjuk:

$$\mathbf{p} = R\mathbf{p}_0, \quad \mathbf{q} = R\mathbf{q}_0 - bR\mathbf{p}_0, \quad (22)$$

ahol  $R$  tetszőleges elforgatás,  $b$  pedig tetszőleges valós szám. A (22) értelmezési tartomány azon (négydimenziós  $\mathbf{p}$  vektorokból álló) értelmezési tartománynak felel



meg az inhomogén Lorentz-csoport esetében, mely minden  $A\mathbf{p}_0$  vektort tartalmaz, ahol  $A$  homogén Lorentz-transzformáció.

Az eredetileg adott  $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$  pártól függően a (22) sokaság négy fajtáját kapjuk, melyek az ábrázolások négy osztályát szolgáltatják. Az I osztályban  $\mathbf{p}_0$  és  $\mathbf{q}_0$  véges és irányuk különböző. Ebben az esetben a (22) sokaság a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_0 = p^2; \quad |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = |\mathbf{p}_0 \times \mathbf{q}_0| = S \quad (22.I)$$

egyenletekkel definiálható; a sokaságot a pozitív  $P, S$  értékek jellemzik. Ez az általános, a legfontosabb eset.

A második esetben  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{q}$  kollineáris. Ezen sokaságok a pozitív  $P$  érték megadásával jellemezhetők:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = P^2. \quad (22.II)$$

A harmadik esetben

$$\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = Q^2; \quad (22.III)$$

a sokaság a pozitív  $Q$  érték segítségével jellemezhető. Végül a negyedik esetben

$$\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{q} = 0. \quad (22.IV)$$

Az  $O(R)$  és a  $\mathcal{G}(b)$  operáció eredménye most ugyanolyan módon határozható meg, ahogy  $d(A)$  meghatározása történt az [1] alatt idézett dolgozatban. Csupán a számítás eredményét közöljük; a négy osztály mindegyike esetében más és más eredmény adódik.

I. Az I osztályban a (14) és (15) alatt fellépő  $\zeta$  változó csak egy értéket vehet fel s ennél fogva mellőzhető. Fennáll:

$$O(R)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \psi(R^{-1}\mathbf{p}, R^{-1}\mathbf{q}), \quad (23.I)$$

$$\mathcal{G}(b)\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - b\mathbf{p}. \quad (24.I)$$

Közvetlenül meggyőződhetünk arról, hogy az itt megadott  $O(R)$  és  $\mathcal{G}(b)$  a (14), (15) alatt közölt  $T(\mathbf{a})$  és  $G(\mathbf{v})$  operátorokkal együtt, a Galilei-csoport ábrázolását képezi, azaz: ezek az operátorok kielégítik az (1)–(10) relációkat. Az I osztály esetében a „kis csoport” csak az azonosságot foglalja magában és ábrázolása egydimenziós. Ennek következtében  $\zeta$  csak egy értéket vesz fel.

Az I osztályba tartozó ábrázolások a  $P, S$  pozitív állandók segítségével jellemezhetők és minden ilyen  $P, S$  pár egy-egy ábrázolást definiál.

II. Ebben az esetben a  $\mathbf{q}$  változókat egyetlen  $s$  változóval helyettesítjük a  $\mathbf{q} = s\mathbf{p}$  összefüggés alapján; (15) helyett írható:

$$G(\mathbf{v})\psi(\mathbf{p}, s) = \exp[i\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}]\psi(\mathbf{p}, s). \quad (15.II)$$

A  $\zeta$  változó ismét csak egy értéket vesz fel és így mellőztük. A  $\mathcal{G}(b)\psi$  függvényre a

$$\mathcal{G}(b)\psi(\mathbf{p}, s) = \psi(\mathbf{p}, s - b) \quad (24.II)$$

reláció érvényes, ami ugyanazt fejezi ki, mint a (24.I) összefüggés. Ahhoz, hogy  $O(R)$ -et definiálhassuk, válasszunk ki egy megengedett, egyébként azonban tetszőleges  $\mathbf{p}_0$  vektort és feleltessünk meg minden egyes  $\mathbf{p}$ -nek egy-egy  $r(\mathbf{p})$  elforgatást oly módon, hogy

$$r(\mathbf{p})\mathbf{p}_0 = \mathbf{p} \quad (25)$$



teljesüljön. Ekkor

$$P_\varphi = r(p)^{-1} R r(R^{-1}p) \quad (25a)$$

változtatlanul hagyja a  $p_0$  vektort:  $p_0 = P_\varphi p_0$ ; az tehát a  $p_0$  vektor körül végrehajtott elforgatás, melynek szögét  $\varphi$  jelöli. Ez  $R$  és  $p$  függvénye. Az  $O(R)\psi$  függvényt az

$$O(R)\psi(p, s) = \exp[im\varphi(R, p)]\psi(R^{-1}p, s) \quad (23.II)$$

kifejezés adja meg, ahol  $m$  tetszőleges egész szám. A kis csoport ez esetben a  $p_0$  körül végrehajtott elforgatások csoportja, ábrázolásai egydimenziósak (aminek folytán  $\zeta$  csak egy értéket vehet fel); azok az  $m$  egész szám segítségével jellemezhetők. A II osztályba tartozó ábrázolásokat a  $P$  pozitív szám és az  $m$  egész szám segítségével jellemezhetjük.

III. A fennmaradó két esetben minden állapot invariáns az eltolódásokkal szemben és ez nyilvánvalóvá teszi, hogy a III és a IV osztályok ábrázolásai nem felelhetnek meg részecskéket leíró egyenleteknek. Ezek az ábrázolások valójában csupán kisebb csoportoknak, nevezetesen a  $T(a)$ , ill. a  $T(a)G(v)$  elemek alkotta invariáns alcsoportok faktorcsoportjainak az ábrázolásai.

Mint hogy a  $p$  változók egyedül a 0 értéket vehetik fel, mellőzhetjük őket és (14) helyett írhatjuk:

$$T(a)\psi = \psi. \quad (14.III)$$

A (15) képlet a III esetben érvényben marad, míg (23.II) helyét

$$O(R)\psi(q) = \exp[im\varphi]\psi(R^{-1}q) \quad (23.III)$$

foglalja el;  $\varphi$ -t most is (25), (25a) definiálja azzal a különbséggel, hogy  $p_0$  és  $p$  helyét  $q_0$  és  $q$  foglalja el. A (24.II) egyenlet helyére

$$\vartheta(b)\psi(q) = \exp[-ieb]\psi(q) \quad (24.III)$$

lép, ahol  $\varepsilon$  tetszőleges valós szám. A III osztályba tartozó ábrázolásokat valós  $\varepsilon$ , pozitív  $Q$  és egész  $m$  jellemzi. A kis csoport ebben az esetben a  $q_0$  körül végrehajtott elforgatásokból és az időbeli eltolásokból áll; ábrázolásai egydimenziósak, ami magyarázatot ad arra, hogy miért nem lép fel a  $\zeta$  változó.

IV. Ebben az esetben, mind  $p$ -t, mind  $q$ -t mellőzzük; minden hullámfüggvény invariáns mind  $T(a)$ -val, mind  $G(v)$ -vel szemben. A kis csoportot valamennyi  $(R)$ ,  $(b)$  operáció alkotja; fennáll:

$$O(R)\psi(\zeta) = \sum_{\eta} D^{(l)}(R)_{\zeta\eta}\psi(\eta), \quad (23.IV)$$

$$\vartheta(b)\psi(\zeta) = \exp[-ieb]\psi(\zeta). \quad (24.IV)$$

Az ábrázolásokat a valós  $\varepsilon$  változó és az  $l$  egész szám jellemzi; a lineárisan független hullámfüggvények teljes száma  $2l+1$ . A  $D^{(l)}(R)$ -ek a közönséges háromdimenziós forgáscsoport ábrázolásai.



## C) A tükrözésekkel kibővített Galilei-csoport

A tértükrözésnek ( $x' = -x$ ,  $y' = -y$ ,  $z' = -z$ ) megfelelő  $I$  operátor a

$$T(-a)I = IT(a), \quad G(-v)I = IG(v) \quad (26)$$

felcserélési összefüggések alapján határozható meg; négyzete 1, s  $O(R)$ -rel és  $\mathcal{G}(b)$ -vel kommutál. Ezek az összefüggések az I osztályba tartozó ábrázolások esetében az

$$I\psi(p, q) = \pm\psi(-p, -q) \quad (27.I)$$

definícióval kielégíthetők. A  $\pm$  előjel definiálja ezen ábrázolások esetében a paritást. A II osztályba tartozó ábrázolások esetében — az  $m=0$  esetet kivéve — a valódi Galilei-csoportnak a tértükrözésekkel való kibővítése egyesíti a  $P, m$  és a  $P, -m$  ábrázolást. Ha azokat a hullámfüggvényeket, amelyek a valódi Galilei-csoport elsőnek említett ábrázolásához tartoznak,  $\psi_+$ -szal, azokat a hullámfüggvényeket pedig, amelyek a valódi Galilei-csoport utóbb említett ábrázolásához tartoznak,  $\psi_-$ -szal jelöljük, a tértükrözés-operátor legtermészetesebb definíciója

$$\begin{aligned} I\psi_+(p, s) &= \psi_-(-p, s), \\ I\psi_-(p, s) &= \psi_+(-p, s). \end{aligned} \quad (27. II)$$

Az  $m=0$  esetben a  $+$ ,  $-$  indexek mellőzhetők; a  $P, 0$  ábrázolások kiterjeszthetők a tértükrözéssel kibővített Galilei-csoport ábrázolásaiivá. Ebben az esetben  $I\psi(p, s)$  vagy  $\psi(-p, s)$ -sel, vagy  $-\psi(-p, s)$ -sel tehető egyenlővé, ami megint csak a paritást definiálja a  $P, 0$  ábrázolásokra vonatkozóan. Ha (27.II)-be beírunk egy  $-$  jelet, ezzel csak ugyanannak az ábrázolásnak egy másik alakját kapjuk: a  $P, m \neq 0$  ábrázolásoknak nincs paritásuk. Az olvasó fel fogja ismerni a hasonlóságot a kétdimenziós forgáscsoportnak a kétdimenziós forgás-tükrözés-csoporttá való kibővítésével.

Ugyanez a helyzet a III osztályba tartozó ábrázolások esetében, csupán annyi a különbség, hogy ott  $q$  játssza azt a szerepet, amit fent  $p$  játszott. A IV osztályba tartozó ábrázolások ugyancsak kibővíthetők oly módon, hogy felöleljék a tértükrözést s ez a kibővítés ismét oda vezet, hogy kétfajta ábrázolást különböztetünk meg, a páros és a páratlan paritásúakat.

Az időtükrözés  $\mathcal{G}$  operátora felcserélhető  $T(a)$ -val és  $O(R)$ -rel, azonkívül

$$\mathcal{G}(-b)\mathcal{G} = \mathcal{G}(b), \quad G(-v)\mathcal{G} = \mathcal{G}(v). \quad (28)$$

Megköveteljük továbbá, hogy  $\mathcal{G}$  tartalmazza a  $K$  komplex konjugálást. Ezek a követelmények az I osztályba tartozó ábrázolások esetében a

$$\mathcal{G}\psi(p, q) = K\psi(-p, q) \equiv \psi(-p, q)^* \quad (29.I)$$

választás mellett elégíthetők ki a legtermészetesebb módon. A II osztály ábrázolásai esetében írhatjuk:

$$\mathcal{G}\psi_{\pm}(p, s) = K\psi_{\pm}(-p, -s). \quad (29.II)$$

A helyzet ismét hasonlít ahhoz, amellyel a kétdimenziós forgáscsoport ábrázolásainak az időtükrözés figyelembevétele céljából való kibővítésekor találkozunk; ugyanez vonatkozik a III osztályra is. A IV osztályba tartozó ábrázolások voltaképpen a háromdimenziós forgáscsoport és az időbeli eltolások csoportja direkt



szorzatának ábrázolásai. Ennek a csoportnak az időtükrözés operátorával való kibővítését az előzőekben részletesen megtárgyaltuk.

Megjegyzendő, hogy az ábrázolásoknak az időtükrözés figyelembevétele céljából való kibővítéséről fent közölt tárgyalás nem kimerítő. Az csak a legegyszerűbb és legtermészetesebb lehetőségekre van tekintettel. A következő szakaszok eredményeit a teljességnek ez a hiánya nem érinti.

#### D) A skalárszorzat definíciója

A hullámfüggvények az első osztályban két vektortól,  $p$ -től és  $q$ -tól függenek, amelyek változási tartományát a  $p^2 = P^2$ ,  $|p \times q| = S$  feltételek korlátozzák. Ennélfogva két függvény,  $\psi(p, q)$  és  $\varphi(p, q)$  skaláris szorzatát a

$$(\psi, \varphi) = \int \psi^*(p, q) \varphi(p, q) \delta(p^2 - P^2) \delta(|p \times q| - S) dp dq \quad (30.I)$$

integrállal definiáljuk. Operátoraink valamennyien unitérek a (30) skalárszorzatra nézve. Ez nyilvánvaló, ami a (14) és (15) alatt felírt  $T(a)$ -t és  $G(v)$ -t illeti; igaz marad azonban a (23.I) és (24.I) alatt definiált  $O(R)$  és  $\mathcal{G}(b)$  operátorokra is. Ezt a  $p' = R^{-1}p$ ,  $q' = R^{-1}q$  és  $p' = p$ ,  $q' = q - bp$  helyettesítések segítségével lehet megmutatni, amelyek

$$R(p \times q) = R p \times R q$$

folytán (30) alatt a  $\delta$  függvényt változatlanul hagyják. Hasonlóképpen, a II osztályba tartozó ábrázolások esetében az unitér skalárszorzat

$$(\psi, \varphi) = \int \psi^*(p, s) \varphi(p, s) \delta(p^2 - P) dp ds. \quad (30.II)$$

## 2. A Galilei-csoport ábrázolásainak fizikai értelmezése

Az ábrázolások négy osztálya közül csak az első kettőnek lehet közvetlen fizikai értelmezése, mivel az eltolás-operációnak csak ezekben az ábrázolásokban van hatása a hullámfüggvényekre. Minthogy e két osztály közül az első az általánosabb, ezt fogjuk részletesebben tárgyalni, míg a második osztályra vonatkozóan rövid megjegyzésekre szorítkozunk.

#### A) Kutatás lokalizált állapotok után

Ha egy ábrázolás valamilyen értelemben egy részecske mozgásának leírását adja, azt várjuk, hogy hullámfüggvényei között található olyanok, amelyek az adott  $t=0$  időben a tér meghatározott pontjában, mondjuk az  $x=y=z=0$  pontban elhelyezkedő részecskét írnak le. Ezen függvények ismerete a helyoperátor valamennyi saját-függvényének ismeretét jelenti, következésképpen magának a helyoperátornak az ismeretét. Mind a nemrelativisztikus Schrödinger-egyenletnek, mind pedig a különféle, véges tömegű és tetszőleges spinű, vagy zérus tömegű és 0 vagy 1/2 spinű részecskéket leíró relativisztikus egyenleteknek vannak lokalizált állapotaik [3].

Megköveteljük, hogy a  $t=0$  időben az  $x=y=z=0$  pontban lokalizált hullámfüggvények teljesítsék a következő követelményeket:

a) Alkossanak egy  $S_0$  lineáris sereget; azaz: két ilyen állapot szuperpozíciójának ugyanolyan módon lokalizálnak kell lennie.



b) Ha  $\psi$  lokalizált állapot, akkor  $T(\mathbf{a})\psi$ -nek ortogonálisnak kell lennie  $S_0$  valamennyi állapotára, ha  $\mathbf{a} \neq 0$ .

c) Az  $S_0$  seregnek invariánsnak kell lennie a kezdőpont körül végrehajtott elforgatásokkal, tértükrözéssel és időtükrözéssel szemben.

Könnyű belátni, hogy a c) posztulátum összefér b)-vel. Felhasználva  $O(R)$  unitér jellegét, kapjuk:

$$(T(\mathbf{a})O(R)\psi, O(R)\varphi) = (O(R)^{-1}T(\mathbf{a})O(R)\psi, \varphi) = (T(R^{-1}\mathbf{a})\psi, \varphi) = 0,$$

úgyhogy  $O(R)S_0$  teljesíti a b) feltételt, ha azt  $S_0$  is teljesíti. Ugyanez áll a tér- és az idő tükrözésére. Látni fogjuk azonban, hogy a b) posztulátum már ellentmondásra vezet.

Ebből a célból írjuk fel a b) feltételt (30.I) felhasználásával az  $S_0$  sereghez tartozó  $\psi$  függvényre:

$$\int \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}] |\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(\mathbf{p}^2 - P^2) \delta(|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| - S) d\mathbf{p} d\mathbf{q} = 0, \quad (31)$$

ahol  $\mathbf{a} \neq 0$ . Képezhetjük ezen egyenlet átlagát  $\mathbf{a}$ -ra vonatkozóan tetszőleges tartományra, mely nem tartalmazza az  $\mathbf{a} = 0$  pontot. Speciálisan az  $\mathbf{a}$  sugarú gömbre való átlagolás az

$$\int \frac{\sin a |\mathbf{p}|}{a} |\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(\mathbf{p}^2 - P^2) \delta(|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| - S) d\mathbf{p} d\mathbf{q} = \frac{\sin a P}{a P} = 0 \quad (31a)$$

eredményt adja.

A  $\delta(\mathbf{p}^2 - P^2)$  tényező fellépte folytán (31a) integrandusában  $|\mathbf{p}|$  helyettesíthető  $P$ -vel és a megfelelő tényező kihozható az integrál elé. Ez utóbbi ekkor nem más, mint a  $\psi$  függvény normálási integrálja. Így tehát (31a) azt mutatja, hogy a (31) feltétel nem teljesíthető. Ugyanez az okoskodás alkalmazható a II osztály ábrázolásaira is.

Nyilvánvaló, hogy ezért az eredményért a skaláris szorzat (30) definíciójában fellépő  $\delta(\mathbf{p}^2 - P^2)$  függvény a felelős. Az olyan lineáris függvényt sokaság, melyben  $|\mathbf{p}|$  minden értéket felvehet, tartalmaz lokalizált állapotokat. Az ilyen lineáris sokaság azonban nem irreducibilis.

A (31a) egyenlet mutatja, hogy irreducibilis sokaság esetén még közelítő lokalizáció sem lehetséges. A (31a) integrál ténylegesen közvetlenül megadja az átmeneti valószínűséget a tetszőleges  $\psi$  függvény, valamint a hullámfüggvények

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int T(\mathbf{a}\boldsymbol{\Omega}) \psi d\boldsymbol{\Omega}$$

lineáris kombinációi között; itt  $\boldsymbol{\Omega}$  egységvektor,  $d\boldsymbol{\Omega}$  pedig valamennyi irányra való integrálást jelent.

Ha  $\psi$  közelítőleg lokalizált a kezdőpontban,  $\varphi$  olyan hullámfüggvények lineáris kombinációja, melyek valahol az  $a$  sugarú gömbön lokalizáltak közelítőleg. Könnyen belátható továbbá, hogy  $(\varphi, \varphi) \leq 1$ . Így tehát (31a) azt mutatja, hogy az átmeneti valószínűség  $\psi$ -ből a  $\varphi$  függvénybe, melynek  $\psi$ -től  $a$  távolságra kellene lokalizálnak lennie, a következő kifejezéssel egyenlő:

$$|(\psi, \varphi)|^2 / (\varphi, \varphi) \cong \sin^2 aP / (aP)^2.$$



Ez nagy  $a$  mellett legfeljebb mint  $a^{-2}$  csökken. Ez a legtöbb, amit a közelítő lokalizáció tekintetében elérhetünk, s ha  $\psi$ -t megfelelő módon választjuk, az átmeneti valószínűség  $\psi$ -ből  $T(a)S_0$  valamennyi állapotába nagy  $a$  mellett  $a^{-2}$ -nal lesz arányos. Minthogy egy vékony gömbhéj térfogata  $4\pi a^2 da$ , kitűnik, hogy az  $O$  pontban a lehető legjobban lokalizált részecske egyenlő valószínűséggel található meg bármely egységnyi vastagságú gömbhéjban, mely az  $O$  pontot mint centrumot körülveszi.

### B) Kutatás meghatározott sebességű állapotok után

Most tegyünk kísérletet a zérus sebességű állapotok alkotta  $V_0$  lineáris sokaság meghatározására. Megköveteljük, hogy ha  $\varphi$  egy ilyen állapot,  $G(v)\varphi$  legyen ortogonális  $V_0$  minden állapotára, ha  $v \neq 0$ , és hogy  $V_0$  legyen invariáns a  $T(a)$  translációkkal szemben. Természetes lenne ezenkívül megkövetelni, hogy  $V_0$  legyen invariáns elforgatásokkal, tükrözésekkel stb. szemben is, de már a  $G(v)$ -re és  $T(a)$ -ra vonatkozó követelményeket sem lehet kielégíteni.

A fenti követelmények értelmében  $T(a)\varphi$ -nek zérus sebesség felel meg, amennyiben  $\varphi$  is ilyen tulajdonságú állapot. Eszerint

$$(G(v)T(a)\varphi, \varphi) = 0, \quad (32)$$

ahol  $v \neq 0$  és  $a$  tetszőleges. Részletesen felírva a (32) egyenletet (30.I) felhasználásával, kapjuk:

$$\int \exp[ip \cdot a] \exp[iq \cdot v] |\varphi(p, q)|^2 \delta(p^2 - P^2) \delta(|p \times q| - S) dp dq = 0,$$

ha  $v \neq 0$ . Minthogy az  $\exp[ip \cdot a]$  függvények teljes rendszert képeznek, az

$$\int \exp[iq \cdot v] |\varphi(p, q)|^2 \delta(|p \times q| - S) dq = 0 \quad (32a)$$

feltételnek majdnem minden  $|p| = P$ -re teljesülnie kell. Legyen  $p_0$  egy ilyen  $p$  és bontsuk fel a  $q = r + \alpha p_0/P$ ,  $v = s + \beta p_0/P$  vektorokat  $p_0$ -lal párhuzamos, ill. rá merőleges összetevőkre. A (32a) egyenlet ekkor így írható

$$\int \exp[ir \cdot s + i\alpha\beta] |\varphi(p_0, q)|^2 \delta(P|r| - S) dq = 0.$$

Ezt az egyenletet bármely tartományra integrálhatjuk, amely nem tartalmazza a  $v=0$  pontot. Szorozzuk meg azt az  $f(\beta)$  tetszőleges függvénnyel és integráljuk az  $|s|=v_0$  hengerre. A szögre vonatkozóan, mely megadja  $s$  irányát a hengeren, elvégezhetjük az integrálást; ez az integrandus első tényezőjét  $2\pi I_0(|r|v_0)$ -al helyettesíti, ami a  $\delta$ -függvényre való tekintettel így is írható:  $2\pi I_0(Sv_0/P)$ . Minthogy ez általában nem tűnik el, kapjuk:

$$\int f(\beta) \exp[i\alpha\beta] |\varphi(p_0, q)|^2 \delta(P|r| - S) dq d\beta = 0,$$

ami  $f$  tetszőleges volta folytán mutatja, hogy

$$\int |\varphi(p_0, q)|^2 \delta(|p_0 \times q| - S) dq = 0 \quad (32b)$$

majdnem minden  $q$ -ra teljesül. Ez azonban maga után vonja a  $\varphi$ -re vonatkozó (30.I) normálási integrál eltűnését. Ebből következik, hogy az I osztályba tartozó ábrázolások állapotai között nem találhatók zérus sebességű állapotok. Ezt az eredményt a II osztály ábrázolásaira is kiterjeszthetjük.



Talán érdekes megjegyezni, hogy meghatározott sebességű állapotok találhatók akkor, ha nem követeljük meg, hogy a sebesség invariáns legyen a térbeli eltolásokkal szemben.

### *Más próbálkozások az eredmények értelmezésére*

Megpróbáltuk, hogy olyan állapotokat definiáljunk, amelyekre vonatkozóan a sebességnek legalább egyik komponense eltűnik, és azt találtuk, hogy ez a helyzet, ha  $\varphi$  eltűnik, kivéve, ha  $p$  abba az irányba mutat, amelyben  $v$ -nek a feltétel szerint zérussal egyenlő a komponense. Ebből azután könnyen kaphatunk (15) segítségével olyan állapotokat, amelyekben a sebesség adott irányba eső komponense előírt értéket vesz fel. Azt találjuk azonban, hogy az ily módon kapott állapotok összessége nem képez teljes függvényrendszert és az előírt irányú sebességkomponens számára nem definiálható operátor.

### Összefoglalás

Az inhomogén Galilei-csoport irreducibilis ábrázolásai közül egyiknek sem sikerült fizikai tartalmat adnunk. Speciálisan nem tudtunk a tér adott pontjában lokalizált, vagy meghatározott sebességgel jellemzett állapotokat definiálni. Léteznek olyan állapotok, melyeket a sebesség egy megadott irányba eső komponensének meghatározott értéke jellemez, minthogy azonban ezek nem képeznek rendszert, alkalmazási területük igen korlátozott. A Galilei-csoport infinitezimális operátorának az impulzusoperátorral való azonosítása abszurd eredményekre vezet. Hacsak nem találunk ezen ábrázolások számára olyan fizikai értelmezést, amely gyökeresen különbözik attól, amellyel itt próbálkoztunk, kénytelenek vagyunk levonni a következtetést, hogy ezek az ábrázolások hasonlóak a Lorentz-csoport eltűnő vagy térszerű impulzusvektorokhoz tartozó ábrázolásaihoz. Meglepőnek látszik, hogy pusztán amiatt, hogy a tényező erejéig meghatározott ábrázolásokról az igazi ábrázolásokra tértünk át, ilyen gyökeres változást tapasztalunk, ami az interpretálhatóságot illeti.

*Fordította: Györgyi Géza*

### HIVATKOZÁSOK

[1] *E. P. Wigner*, Ann. of Math., 40, 149(1939). [Magyarul: e sorozat 1. cikke, Magyar Fizika Folyóirat 21, 21 (1973)]. Valójában — amint azt ezen cikkben kifejtettük — az ábrázolásnak nem szükséges igazi ábrázolásnak lennie; elegendő, ha az tényező erejéig meghatározott ábrázolás. A szabad tényező a hullámfüggvények határozatlan fázisfaktorának felel meg.

[2] Magánközlés.

[3] *T. D. Newton és E. P. Wigner*, Rev. Mod. Phys., 21, 400(1949). [Magyarul: e sorozat 5. cikke, Magyar Fizikai Folyóirat 22, 87 (1974).]



Technikai szerkesztő: Turchányi György  
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sós Attila  
A kézirat beérkezett: 1973. szeptember 6. — Terjedelem: 8,40 (A/5) ív  
73-3996 — Szegedi Nyomda

MACYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
— KÖNYVTÁRA



# PÁLYÁZAT

## 1974. évi kutatási jutalmakra

A Magyar Tudományos Akadémia pályázatot ír ki a **távlati tudományos kutatási terv kutatási főirányaiban** elért jelentős eredmények jutalmazására.

A Magyar Tudományos Akadémia elnöke 1/1974. MTA—E sz. utasításának megfelelően pályázhatnak tudományos kutatók és egyetemi oktatók, ill. kollektívák, továbbá kutatással foglalkozó más szakemberek függetlenül attól, hogy milyen munkahelyen dolgoznak.

A pályázatban — két évnél általában nem régebbi — nyomtatásban megjelent tanulmánnyal vagy közlésre alkalmas kézirattal (kivételesen kutatási zárójelentéssel) lehet részt venni, függetlenül attól, hogy az adott kutatás a távlati terv keretében indult-e meg, vagy csak a munka folyamán kapcsolódott hozzá.

A kutatási jutalom az eredmény jelentőségétől függően egyéni pályázó esetében 5000—15 000 Ft, kutatói kollektívák esetében 6000—25 000 Ft.

Nem részesíthetők a fenti jutalomban:

- az Akadémia tagjai, a kutatóintézetek igazgatói, a tanszéki akadémiai kutatócsoportok vezetői;
- akik az adott kutatási tevékenységért a munkabéren és járulékain, illetve a már megjelent tanulmány szerzői díján kívül más ellenértékben (kutatási szerződési, szakértői, újítási, szabadalmi díjban, kutatási eredményért kapott külön jutalomban stb.) részesültek;
- kutatási jutalomban már részesített, vagy ezzel kapcsolatban már érdemben elbírált pályamunkák, kivéve ha az elbírálás óta elért számottevő új tudományos eredményt tartalmaznak.

A pályázatnak tartalmaznia kell:

1. A pontosan kitöltött pályázati űrlapot (beszerezhető: az MTA Tudományos Testületi Titkárságán Bp. V., Münnich F. u. 7. sz. alatt, az egyetemek rektori hivatalaiban, továbbá akadémiai- és ipari kutatóintézetekben).

2. A kutatási eredményt tartalmazó tanulmányt (közlésre alkalmas kéziratot). Szükség esetén a kutatási főirányért felelős tárcák koordináló bizottságai adnak felvilágosítást arra nézve, hogy az adott pályamunka, tematikája alapján melyik főirányhoz tartozik.

A pályázatot (tanulmányt és pályázati űrlapot) **1974. május 30-ig** kell a kutatóhely vezetőjéhez benyújtani, aki a pályázati űrlapra felvezeti szakvéleményét, és a pályázatot június 15-ig továbbítja az Akadémia Tudományos Testületi Titkárságának.

Az előírt határidő után, vagy hiányosan, továbbá nem kellően rendezett alakban benyújtott pályázatok nem vehetők figyelembe. A már benyújtott pályázati anyagot kiegészíteni, vagy módosítani nem lehet.

A kutatási jutalmak kiosztására december hó második felében kerül sor.

A kutatási jutalomban részesített pályamunkákat az MTA — főirányért felelős tárcavélemények figyelembevételével — szabadon hasznosíthatja.

Budapest, 1974. február hó 12.

A Magyar Tudományos Akadémia  
Elnöksége



# A távlati terv kutatási főirányai

## Országos szintű kutatási főirányok

### A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA gondozásában

1. Szilárdtestek kutatása
2. Az életfolyamatok szabályozásának mechanizmusa
3. A közigazgatás fejlesztésének komplex tudományos vizsgálata
4. A szocialista vállalat

### A NEHÉZIPARI MINISZTERIUM gondozásában

5. Biológiai aktív vegyületek kutatása

### A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTERIUM gondozásában

6. A köznevelés fejlesztését szolgáló pedagógiai kutatások.

## Tárcaszintű kutatási főirányok

(amelyek nem azonosak az országos főiránnyal)

### A BELKERESKEDELMI MINISZTERIUM gondozásában

1. Lakossági fogyasztási, keresleti tendenciák
2. A kereskedelem fejlesztésének hosszútávú koncepciója
3. Vállalatok, szövetkezetek szervezetének és tevékenységének racionalizálása

### AZ EGÉSZSÉGÜGYI MINISZTERIUM gondozásában

1. Számítástechnika alkalmazása az orvostudományban és az egészségügyben
2. A lakosság védelme a természetes és mesterséges környezet (bioszféra) káros hatásaitól (főleg orvosi vonatkozásban)
3. Perinatalis mortalitás csökkentésére irányuló kutatás
4. Transzplantációs munkákat előkészítő kutatás
5. Tömegesen elterjedt betegségek epidemiológiájának kutatása
6. Daganatok ethiopathogenesise és terápiája
7. Sérülések pathológiája és ellátása
8. Radioizotópok orvosi alkalmazása
9. Genetikai kutatások

### A KÖZPONTI FÖLDTANI HIVATAL gondozásában

1. Az ország természeti erőforrásainak kutatása és feltárása

### A KÖZPONTI STATISZTIKAI HIVATAL gondozásában

1. Társadalmunk rétegződésének alakulása és az életmód változása

### ORSZÁGOS TESTNEVELÉSI ÉS SPORTHIVATAL gondozásában

1. A népesség fizikai erőnlétének fejlesztése és fenntartása a testkultúra eszközeivel

### A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA gondozásában

1. A számítástechnika alkalmazásai (kivéve az orvostudományi alkalmazásokat)
2. Az ember természeti környezetének védelme (főleg a bioszféra megváltozása szempontjából)
3. Gazdaságpolitikánk tapasztalatainak elemzése; javaslatok a továbbfejlesztésre
4. Középtávú világ gazdasági prognózis, különös tekintettel a népgazdasági tervezés szempontjaira
5. A tudományos-technikai forradalom mint világtörténelmi folyamat a kapitalizmus és szocializmus viszonyai között. (A tudományos-technikai forradalomra való felkészülésünk tudományos megalapozása.)
6. A társadalmi tudat fejlődése Magyarországon a felszabadulás óta.

### A MEZŐGAZDASÁGI ÉS ÉLELMISZERÜGYI MINISZTERIUM gondozásában

1. A kemizálás és a biológia alapösszefüggéseinek kutatása
2. A vizsgadalkodás alapösszefüggéseinek kutatása
3. A zöldségtermesztés biológiai és gépesítési alapjainak kutatása
4. A szőlőtermesztés biológiai alapjainak kutatása
5. Kertészeti növények genetikája és nemesítési módszereinek fejlesztése
6. A háziállatok fertőző és nem fertőző betegségei elleni védekezés komplex rendszabályait megalapozó kutatások
7. Hazai és külföldi növényfajták gyűjtése, megőrzése, cseréjük szervezése
8. A mezőgazdasági vállalatok ökonómiai kérdéseinek kutatása
9. Állami gazdaságok és termelőszövetkezetek vezetés fejlesztése
10. Az élelmiszer gazdaság közgazdasági szabályozórendszerének fejlesztése
11. Az élelmiszer gazdaság jelentőségének, makroökonómiai törvényszerűségeinek feltárása, tervezési módszereinek tökéletesítése
12. Főbb mezőgazdasági ágazatok ökonómiai sajátosságainak feltárása, továbbfejlesztése
13. A mezőgazdasági nagyüzemek vállalati mechanizmusának és gazdaságpolitikai üzemi hatásának vizsgálata
14. Az élelmiszer gazdaság egyes ágazatainak fejlesztési koncepció kialakításához módszerek, prognózisok kidolgozása
15. Közgazdasági befolyásoló eszközök és módszerek hatásának vizsgálata (a mezőgazdaságban és élelmiszeriparban)
16. Korszerű vállalati szervezés és módszerek kutatása (a mezőgazdaságban és élelmiszeriparban)

### A MUNKAÜGYI MINISZTERIUM gondozásában

1. A munka társadalmi, gazdasági összefüggései.



A MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,  
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.



Ára: 10,— Ft  
Előfizetés kötetenként: 48,— Ft

INDEX: 26 491

## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Szabados László</i> : Ionizációs frontok vizsgálata az intersztelláris mágneses tér figyelembevételével .....	101
<i>Pállai Gabriella</i> : Neutronok rugalmas szórásának vizsgálata nehéz magokon .....	119

## KÜLFÖLDI PUBLIKÁCIÓK

MTA Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutató Csoport .....	181
---	-----

## A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>Erdal İnönü és Wigner Jenő</i> : A Galilei-csoport ábrázolásai .....	133
---	-----



307.226

W.

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

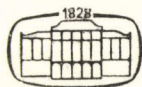
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,  
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR  
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI  
JÁNOSSY LAJOS

XXII. KÖTET

3. FÜZET



A KADÉMIAI KIADÓ  
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST 1974



# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratról évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelmében.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus  
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út  
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmi ismertetőt írjanak.
2. A levelezéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.



# FENOMENOLÓGIÁJA\*

GÁLFI LÁSZLÓ

MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport, Budapest

A sokrészesceke folyamatok speciális hatáskeresztmetszeteinek aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk nagy energiáknál. Ehhez a kétreszesceke szórásból ismert Regge elméletet használjuk. Először magát a módszert ismertetjük, majd az egyrészesceke eloszlásokra vonatkozó eredményeket, s ezeket összevetjük a kísérleti eredményekkel. Végül röviden foglalkozunk a kétreszesceke eloszlásokkal.

## BEVEZETÉS

A Regge-pólusok elmélete a nagyenergiás részecskefizikában hasznos, fenomenologikus elméletnek bizonyul. Miután az utóbbi időben egyre nagyobb számban jelennek meg a sokrészcskekeltési kísérletek eredményei, érthető, hogy számos próbálkozás történt, hogy a kétrészcskeszórásban bevált módszereket ebben az esetben is alkalmazzák. A következőkben az eddig elért eredményeket foglaljuk össze. Feltételezzük a kétrészcskeszórás Regge-pólus elméletének ismeretét [2]. A sokrészcskekeltés fenomenológiáját illetően *Montvay István* ugyanezen iskolán elhangzott előadására támaszkodunk [1].

## 1. Mueller têtele

Az inkluzív folyamatoknak a Regge-pólusok elméletének nyelvén elmondott fenomenológiája Mueller-tételén alapszik. A tétel állítása a következő: az inkluzív hatáskeresztmetszetek diszkontinuitások. A legegyszerűbb inkluzív folyamat az  $a+b \rightarrow X$ , a tétel ebben az esetben a kétrészecske szórás teljes hatáskeresztmetszetére vonatkozó optikai tétellel ekvivalens. Rajzban ez a következő:

$$\sigma_{\text{teljes}}^{ab} \sim \sum_x \left| \begin{array}{c} a \\ \bullet \\ b \end{array} \right|^2 = \sum_x \begin{array}{cc} a & a \\ + & - \\ b & b \end{array} |X| \quad (1)$$

A teljes hatáskeresztmetszet az  $ab \rightarrow ab$  előreszórási amplitúdó  $S_{ab} = (p_a + p_b)^2$  változóban vett diszkontinuitásával arányos. Az  $a + b \rightarrow c + X$  egyrészeske inkluzív

\* A XI. Elméleti Fizikai Iskolán tartott előadás. Érkezett 1973. április. 30.







Az  $a$  és  $b$  részecske tömegközépponti rendszerében az impulzusokat a következőképpen parametrizáljuk [4]:

$$\begin{aligned} p_a &= m_a(\text{ch } \theta_a, 0, 0, -\text{sh } \theta_a), & m_a \text{ sh } \theta_a &= m_b \text{ sh } \theta_b \\ p_b &= m_b(\text{ch } \theta_b, 0, 0, \text{sh } \theta_b), \\ p_j &= m_j(\text{ch } \theta_j \text{ ch } \beta_j, \text{sh } \beta_j \cos \varphi_j, \text{sh } \beta_j \sin \varphi_j, \text{sh } \theta_j \text{ ch } \beta_j) = \\ &= R_z(\varphi_j) B_z(\theta_j) B_x(\beta_j)(m_j, 0, 0, 0) = U_j p_j^{F_j}. \end{aligned} \quad (4)$$

$F_j$ -vel a  $J$ -edik részecske nyugalmi rendszerét jelöltük, négyesimpulzusa ebben a rendszerben  $p_{j_j}^F = (m_j, 0, 0, 0)$ . Az  $F_j$  rendszerből a tömegközépponti rendszerbe az  $U_j = R_z(\varphi_j) B_z(\theta_j) B_x(\beta_j)$  transzformációval térhetünk át, ahol  $B_x$ , ill.  $B_z$   $x$ , ill.  $z$  tengely irányú boost,  $R_z$   $z$ -tengely körüli forgatás. A  $\theta_j$  és  $\beta_j$  szögeket longitudinális és transzverzális rapiditásnak hívjuk. A  $p_a + p_b = p_1 + p_2 + \dots + p_n + p_x$  négyesimpulzus megmaradásból következik, hogy  $s = (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \text{ch } (\theta_a + \theta_b)$  nagy értékei mellett


$$-\theta_a + \ln \frac{m_j}{m_a} < \theta_j < \theta_b + \ln \frac{m_b}{m_j}. \quad (5)$$

Bali, Chew és Pignotti [5] módszerét követve, az amplitúdót az  $a$  részecske nyugalmi rendszerében  $F_a$ -ban írjuk le. Így a  $P_j$  négyesimpulzusokat is az  $F_a$  rendszerbe kell átranzformálni. Ez a következő módon történik:

$$p_1^{F_a} = U_a^{-1} p_1^{C^M} = U_a^{-1} U_1 p_1^{F_1}. \quad (6)$$

Általában az  $F_{j+1}$  rendszerből az  $F_j$  rendszerbe az  $U_j^{-1} U_{j+1}$  transzformáció visz át. Ezért azt mondhatjuk, hogy az előreszórási amplitúdó az  $U_a^{-1} U_1, \dots, U_j^{-1} U_{j+1}, \dots, \dots, U_n^{-1} U_b$  ún. kiscsoport elemek függvénye.

A továbbiakban a vizsgálat menete a következő:

1. Többszörös keresztezett csatorna parciális hullám kifejtést végzünk. Ennek jele az 1. ábrán: . Az amplitúdót a megfelelő kiscsoport, az  $SO(1, 3)$  harmonikus függvényei szerint fejtjük ki.

2. Elvégezzük a komplex  $J$ -sík analízist. A keresztezett csatornák relatív impulzusmomentumai mindegyikét kiterjesztjük a komplex síkra, és az analízist egyidejűleg végezzük. Itt a következő nagyon lényeges feltevést használjuk: a  $J$ -síkokon levő szingularitások azonosak a kétrészecske amplitúdókban találhatóakkal.

3. Kihasználjuk a Regge-pólus fenomenológia alapösszefüggését, mely szerint

$$\text{hatványviselkedés valamilyen invariáns energiában (aszimptotikusan)} \Leftrightarrow \text{szingularitás a megfelelő komplex } J\text{-síkon}$$

A következő fejezetekben az így kapott eredményeket tárgyaljuk.



### 3. Egyrészecske eloszlások

Az egyrészecske inkluzív hatáskeresztmetszetet a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{d^2\sigma(a+b \rightarrow 1+X)}{d\theta_1 d(\text{ch } \beta_1)^2} = \frac{1}{2m_a m_b \text{sh}(\theta_a + \theta_b)} T(\theta_1 + \theta_a, \theta_b - \theta_1, \beta), \quad (7)$$

ahol a jobb oldalon a nevezőben álló kifejezés a fluxus-tényező,  $T$  pedig az  $ab\bar{c} \rightarrow ab\bar{c}$  előreszóródási amplitúdó  $M^2 = (p_a + p_b - p_1)^2$ -ben vett diszkontinuitásának  $\pi m_1^2$ -szerese. A használt invariáns változók:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \text{sh}(\theta_a + \theta_1), \\ t &= (p_a - p_1)^2 = m_a^2 + m_1^2 - 2m_a m_1 \text{ch } \beta_1 \text{ch}(\theta_a + \theta_1), \\ u &= (p_b - p_1)^2 = m_b^2 + m_1^2 - 2m_b m_1 \text{ch } \beta_1 \text{ch}(\theta_b - \theta_1), \\ s + t + u &= m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + M^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Ha  $\theta_a, \theta_b$  nagy, akkor  $\theta_1 + \theta_a$ , vagy  $\theta_b - \theta_1$  (vagy mindkettő) nagy. A megfelelő komplex impulzuszórási síkon Regge-pólusok vannak, ezek szabályozzák az aszimptotikus viselkedést.

a) fragmentáció:  $\theta_1$  közel van  $-\theta_a$ -hoz.

A 2. ábrán a megfelelő Regge-diagramot láthatjuk. Ha  $\theta_a$  és  $\theta_b$  és így  $s$  nő, akkor  $\theta_b - \theta_1$  és ezzel  $u$  nő,  $t = (p_a - p_1)^2$  állandó marad. Az 1 részecske az  $a$  részecske töredékének (fragmentumának) tekinthető. Feltéve, hogy a vezető szingularitást a Pomerancuk-trajektória, a következőt pedig a  $P'$ -vel jelölt valamelyik mezon trajektória adja, az amplitúdó aszimptotikus alakjára a következő alakot kapjuk:

$$T(\theta_a + \theta_1, \theta_b - \theta_1, \beta_1) \rightarrow e^{\alpha_P(\theta_b - \theta_1)} R_P(\theta_a + \theta_1, \beta_1) + e^{\alpha_{P'}(\theta_b - \theta_1)} R_{P'}(\theta_a + \theta_1, \beta_1). \quad (9)$$

$\theta_a + \theta_1, \beta_1$  rögzített

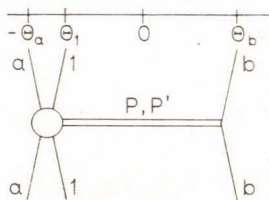
Itt  $\alpha_P \sim 1$ ,  $\alpha_{P'} \sim 1/2$ ,  $R_P$  és  $R_{P'}$  a  $P$  és  $P'$  pólusok reziduumai. Az egyrészecske inkluzív hatáskeresztmetszet,

$$\frac{d^2\sigma(a+b \rightarrow 1+X)}{d\theta_1 d(\text{ch } \beta_1)^2} \rightarrow f_P(\theta_a + \theta_1, \beta_1) + s^{-1/2} f_{P'}(\theta_a + \theta_1, \beta_1) \quad (10)$$

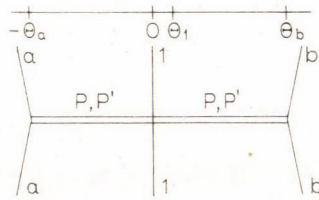
az ún. határ-fragmentáció jelenségét mutatja. Ez abban áll, hogy  $s \rightarrow \infty$  esetén a hatáskeresztmetszet az  $f_P(\theta_a + \theta_1, \beta_1)$  állandóhoz tart.

Ha  $\theta_1$   $\theta_b$ -hez van közel, akkor a  $b$  részecske fragmentációs tartományában vagyunk, a kapott eredmény (10)-zel analóg.

b) pionizáció:  $\theta_1$  rögzített, véges.



2. ábra



3. ábra



Ha  $s$  nő, akkor  $\theta_a + \theta_1$  és  $\theta_b - \theta_1$ , azaz  $t$  és  $u$  nő. A 3. ábrán láthatjuk a megfelelő Regge-diagramot, ez a következő aszimptotikus alakot jósolja az amplitúdóra:

$$T(\theta_a + \theta_1, \theta_b - \theta_1, \beta_1) \xrightarrow{\theta_1, \beta_1 \text{ rögzített}} e^{\alpha_P(\theta_a + \theta_1)} e^{\alpha_{P'}(\theta_b - \theta_1)} R_{PP}(\beta_1) + \\ + e^{\alpha_P(\theta_a + \theta_1)} e^{\alpha_{P'}(\theta_b - \theta_1)} R_{PP'}(\beta_1) + e^{\alpha_{P'}(\theta_a + \theta_1)} e^{\alpha_P(\theta_b - \theta_1)} R_{P'P}(\beta_1). \quad (11)$$

Az egyrészcse eloszlás aszimptotikusan:

$$\frac{d^2\sigma(a+b \rightarrow 1+X)}{d\theta_1 d(\text{ch } \beta_1)^2} \rightarrow f_{PP}(\beta_1) + f_{PP'}(\beta_1) |u|^{-1/2} + f_{P'P}(\beta_1) |t|^{-1/2}. \quad (12)$$

Ismét látjuk a határ eloszlás jelenségét,  $s \rightarrow \infty$  esetén az eloszlás az  $f_{PP}(\beta_1)$  állandóhoz tart. Mivel a pionizációs tartományban  $ut \sim s$ ,  $u \sim t$ , ezért a vezető tag után következő tagok  $s^{-1/4}$  rendűek, várható tehát, hogy a határ-eloszlást csak lassabban, nagyobb  $s$  értékeknél érzük el, mint a fragmentációs tartományokban, ahol a nem-vezető tagok  $s^{-1/2}$ -rendűek. A határeloszlás csak  $\beta_1$ , azaz a transzverzális impulzus [l. (4)] függvénye, ezért azt várjuk, hogy az eloszlásban a  $\theta_1$  rapiditás függvényében nagy energián megjelenjék az ún. centrális plató.

Néhány általános megjegyzés kívánczik még ide:

(i) Az összes ki nem írt tényezőt a hatványok mellett álló függvényekbe olvasztottuk be.

(ii) A  $\beta_1$  és  $\theta_a + \theta_1$  változók kifejezhetők pl. a  $p_{1\perp}$  transzverzális impulzussal és az  $x = \frac{2p_1}{\sqrt{s}}$  Feynman-féle változóval, vagy pl. a (10) összefüggésben  $t$ -vel és  $M^2/s$ -sel.

(iii) Előfordulhat, hogy az  $R_P, R_{P'}, R_{PP}, R_{PP'}, R_{P'P}$  reziduum függvények valamelyike eltűnik, erről a Regge-pólus elmélet keretein belül semmit sem mondhatunk, legfeljebb annyit, hogy az eltűnés nem valószínű.

(iv) Ugyancsak semmit nem tudunk mondani a transzverzális dinamikáról a  $\beta_1$  függésről.

(v) Gyakran feltételezik, hogy a (10) képletben szereplő  $f_P, f_{P'}$  függvények az  $f(x, p_{1\perp}) = f_{\perp}(p_{1\perp}) f_x(x)$  alakban faktorizálódnak. Ez előfordulhat, de elméletileg indokolni nem tudjuk.

(vi) Ha  $a$  és  $b$  azonos, akkor a pionizációs tartományban az egyrészcse eloszlás a következő:

$$\frac{d^2\sigma(a+a \rightarrow 1+X)}{d\theta_1 d(\text{ch } \beta_1)^2} \rightarrow f_{PP}(\beta_1) + s^{-1/4} \text{ch } \frac{\theta_1}{2} g(\beta_1). \quad (13)$$

Ennek következménye az, hogy egy izomultipllett tagjai eloszlásának különbsége  $s \rightarrow \infty$  esetén eltűnik, mivel a vezető  $I=1$  trajektória ( $\alpha \sim 1/2$ ) a vezető  $I=0$  trajektória ( $\alpha \sim 1$ ) alatt fekszik.

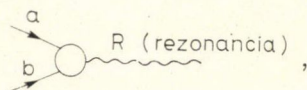


#### 4. Dualitás, exotikus csatornák

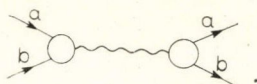
A kétrészecske szórás teljes hatáskeresztmetszetére vonatkozó két komponensű dualitásból [8] indulunk ki. A következőkben a  $\sim$  jelölés rezonanciát jelöl, általában nem egzotikus kvantumszámokat. Az  $a+b \rightarrow X$  folyamatban a végállapot rezonancia részre és egzotikus részre osztható.

Rezonancia rész:

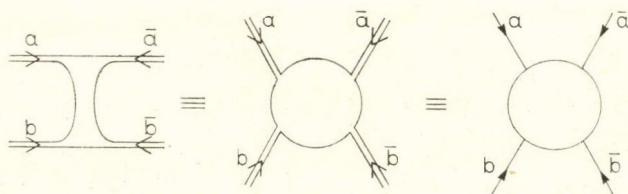
az amplitúdó



a rezonancia  
hatás keresztmetszet



Ezt a részt kvark vonalakkal [9] a következőképpen rajzolhatjuk le:

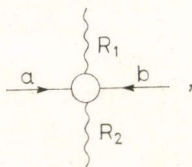


4. ábra

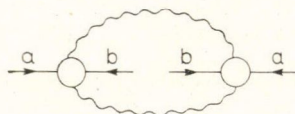
A 4. ábra három ekvivalens ábrázolást mutat. A dualitás alap gondolata szerint az  $s$ -csatornabeli rezonanciáknak rezonancia-trajektória csere felel meg a  $t$ -csatornában. Az ábráról ezt úgy olvassuk le, hogy mind az  $s$ -, mind a  $t$ -csatornában nem egzotikus állapot (kvark-antikvark rendszer) terjed.

Egzotikus rész:

az amplitúdó

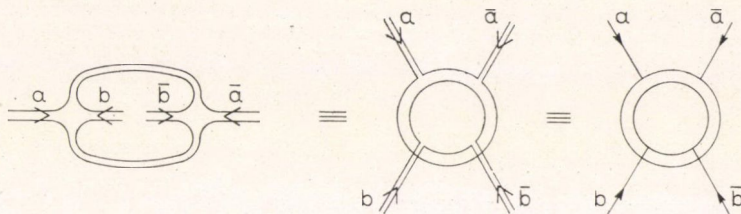


a hatáskeresztmetszet



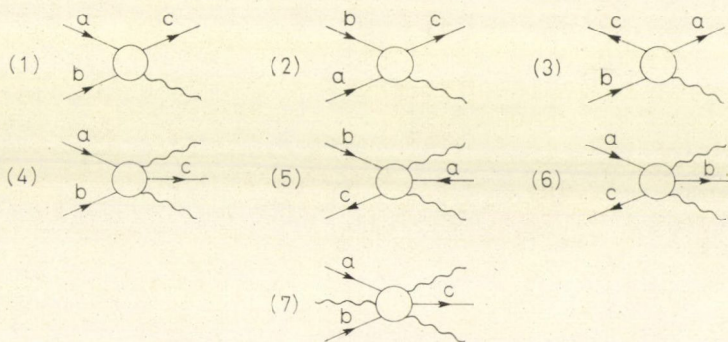


Megegyezés szerint az  $ab$  állapot egzotikus, ha az amplitúdónak megfelelő rajzon  $a$  és  $b$  nem szomszédos lábak. Az egzotikus állapotot két nem egzotikus állapot,  $R_1$  és  $R_2$  összegére bontottuk. Rajzolhatnánk további  $R_3, R_4, \dots$ , rezonanciákat is, ez azonban az eredményen nem változtatna. A hatáskeresztmetszet kvarkvonalakkal lerajzolva a következő:



5. ábra

Ismét három ekvivalens ábrázolást láthatunk. A dualitás szerint egzotikus  $s$ -csatornának (nem kvark-antikvark rendszernek) vákuum-trajektória csere felel meg a  $t$ -csatornában. Ezt úgy olvashatjuk le, hogy a  $t$ -csatornában egy-egy kvark vonal mindkét irányban átfut. Általában azt mondjuk, hogy pl. az  $a\bar{a}$  csatornában vákuumkvantumszám (Pomerancsuk-trajektória) csere van, ha az  $a, \bar{a}$  vonalak által meghatározott körhöz más részecske vonala nem csatlakozik. Kétrészecske szórásnál ( $ab \rightarrow ab$ ) természetesen az  $a\bar{a}$  csatornabeli Pomerancsuk-cserének következménye ugyanez a  $b\bar{b}$  csatornában.

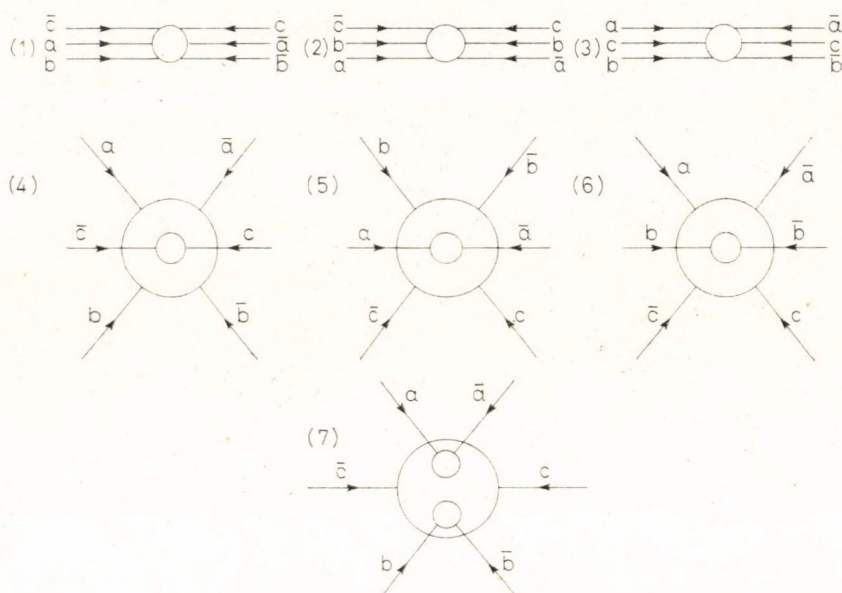


6. ábra

Most már áttérhetünk az inkluzív hatáskeresztmetszetekre vonatkozó két-komponensű dualitásra [7]. Az  $ab \rightarrow cX$  folyamat amplitúdóját ismét több részre osztjuk, aszerint, hogy  $X$  „rezonanciaszerű”, vagy egzotikus. Három különböző gráfot rajzolhatunk, ha  $X$  „rezonanciaszerű”, négyet ha  $X$  egzotikus.

A „négyzetreemelt” gráfok, vagyis a hatáskeresztmetszetek a 7. ábrán láthatók, a harmadik típusú ábrázolásmódban.





7. ábra

Az ismertetett szabályok alapján készítettük el az alábbi táblázatot.

Nem egzotikus csatornák Pomerancsuk-trajektória

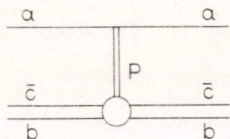
(1) $ab\bar{c}$ , $ab$ , $a\bar{c}$	nincs	
(2) $ab\bar{c}$ , $ab$ , $b\bar{c}$	nincs	
(3) $ab\bar{c}$ , $a\bar{c}$ , $b\bar{c}$	nincs	
(4) $a\bar{b}$	$c\bar{c}$	} csatornában
(5) $b\bar{c}$	$a\bar{a}$	
(6) $a\bar{c}$	$b\bar{b}$	
(7) nincs	$a\bar{a}$ , $b\bar{b}$ , $c\bar{c}$	

Ha tehát azt szeretnénk, hogy a határ-eloszlás már korán, kis  $s$  értékeknél megjelenjen, ki kell zárunk az összes olyan lehetőséget, mellynél közönséges (rezonancia) trajektória cseréje lép fel valamelyik csatornában, tehát az (1)–(6) eseteket. Ennek minimális feltétele, hogy az  $ab$ ,  $b\bar{c}$ ,  $a\bar{c}$  csatornák egzotikusak legyenek.

Ez valószínűleg túl erős feltevés, hiszen nem minden gráf fontos egyformán a fázistér egyes részeiben. Vizsgáljuk pl. a  $b$  részecske fragmentációs tartományát, vezessük be erre a  $b \xrightarrow{a} c$  jelölést. Csak azok a gráfok fontosak, amelyeknél  $u = (p_b - p_c)^2$  kicsi, tehát melyeknél  $b$  és  $\bar{c}$  szomszédos lábak, azaz (2), (3) és (5). Az energiafüggés



a (2) és (3) gráfokból származik, mivel (5) Pomerancsuk-trajektória cserét jelent az  $a\bar{a}$  csatornában:



Így a táblázatból látható, hogy a határeloszlás korai megjelenéséhez elegendő az  $ab\bar{c}$  csatorna egzotikus volta. Meg kell jegyeznünk, hogy ha véletlenül a  $b\bar{c}$  csatorna is egzotikus, akkor a felrajzolt gráf is eltűnik, és a fragmentációs hatáskeresztmetszet gyors eltűnését várhatjuk. Ilyen esetek pl.  $\pi^\pm \rightarrow \pi^\mp$ ,  $K^\pm \rightarrow \pi^\mp$ ,  $p \rightarrow K^-$ , melyekre az inkluzív hatáskeresztmetszet ténylegesen nagyságrenddel kisebb, mint a  $\pi^\pm \rightarrow \pi^\pm$  esetben, ahol is a  $b\bar{c}$  csatorna nem egzotikus.

Következtetéseinket a kísérleti eredmények alátámasztják. A  $p \xrightarrow{\pi^+} \pi^+$ ,  $\pi^+ \xrightarrow{P} \pi^+$  fragmentációs hatáskeresztmetszetek erős energiafüggést mutatnak [10], itt az  $ab\bar{c}$  csatorna nem egzotikus, míg a  $p \xrightarrow{\pi^+} \pi^-$  fragmentációs hatáskeresztmetszet energiafüggetlen [10], itt  $ab\bar{c}$  egzotikus.

## 5. Faktorizáció

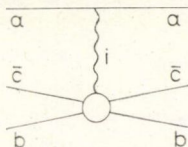
A faktorizáció feltevése az




kétszecske előreszórási amplitúdóra azt jelenti, hogy a teljes hatáskeresztmetszetet a

$$\sigma_{\text{teljes}}^{ab} \sim \gamma_{ia} \gamma_{ib} s^{\alpha_i(0)-1} \quad (14)$$

alakban írhatjuk, ahol  $\gamma_{ia}$  és  $\gamma_{ib}$  számok, mivel  $t=0$ . A  $b \xrightarrow{a} c$  fragmentációnál hasonló feltevéssel élhetünk, és az előreszórási amplitúdóval kapcsolatos egyrészeske eloszlást az



$$f(p_c) \sim \gamma_{ia} \Gamma_{b\bar{c}}^i(u, M^2/s) s^{\alpha_i(0)-1} \quad (15)$$

alakban írhatjuk, ahol  $\gamma_{ia}$  ugyanaz, mint előbb,  $\Gamma_{b\bar{c}}^i$  pedig a  vertexet leíró



függvény. Aszimptotikusan, Pomerancsuk-trajektória cserénél

$$\frac{f(p_c)}{\sigma_{\text{teljes}}^{ab}} = \frac{\Gamma_{b\bar{c}}^i(u, M^2/s)}{\gamma_{ib}}, \quad (16)$$

ami az  $a$  részecskétől független. Ezen eredményt ellenőrizendő, Chen és társai [12] a következő négy reakciót vizsgálták:

$p \xrightarrow{\pi^+} \pi^-$ (1) 7 GeV	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	lab.	egzotikus
$p \xrightarrow{K^+} \pi^-$ (2) 13 GeV			egzotikus
$p \xrightarrow{p} \pi^-$ (3) 28,5 GeV		impulzus	egzotikus
$p \xrightarrow{\pi^-} \pi^-$ (4) 25 GeV			nem egzotikus

Azt találták, hogy az (1)–(3) folyamatokban  $f(p_c)/\sigma_{\text{teljes}}^{ab}$  egyenlő egymással. A (4) folyamatban a mért értékek  $1/\sqrt{s}$  szerint felülről közelítik az (1)–(3) által kijelölt aszimptotikus értéket, minthogy (4)-nél  $ab\bar{c}$  nem egzotikus. A hétkomponensű dualitás nyelvén érthető, hogy (4)-nél  $a$  eloszlás a határ-eloszlást felülről közelíti.

Az energiafüggő részt, mint láttuk 7. ábra (2) és (3) gráfja adja, ezek mint amplitúdók négyzetei, pozitívak.

Megjegyezzük még, hogy a faktorizáció virtuális foton által indukált inkluzív reakciókra is teljesül, így pl. az  $e+p \rightarrow e+\pi^- + X$  folyamatra a  $p \xrightarrow{\gamma} \pi^-$  fragmentációs tartományban, ami arra utal, hogy ilyen folyamatokban a virtuális foton hadronként viselkedik [13].

## 6. Pionizációs fenomenológia

Láttuk, hogy a pionizációs tartományban a 3. ábrán látható Regge-gráf a domináns, az egyrészecske eloszlás,

$$f(p_c) = \sum_{i,j} f_{ij}(\kappa) |t|^{\alpha_i(0)-1} |u|^{\alpha_j(0)-1}, \quad (17)$$

bevezettük a  $\kappa = (m_c^2 + p_{c\perp}^2)^{1/2}$  jelölést. Kinematikailag ez a tartomány nehezen elérhető, a kozmikus adatok mellett csak az újabb ISR mérések szolgálhatnak kísérleti ellenőrzésként. Ezeket az új adatokat próbáljuk most a fenomenologikus elmélet keretein belül megmérni.

A mérések három jellegzetessége a következő [11, 14]:

- a) Megjelenik a rapiditás függvényében a centrális plató.
- b) A gyorsító energián (20 GeV) végzett mérésekkel való összehasonlításból úgy tűnik, hogy a határeloszlás  $s^{-1/4}$  szerinti közelítése konzisztens az adatokkal.
- c) Az ISR adatok az alacsony energiás adatok *fölött* fekszenek, a határ-eloszlás felé tehát *alulról* közeledünk. Ez ellentétben áll a kétrészecske szórás teljes hatáskeresztmetszeteivel és az eddig megismert egyrészecske inkluzív fragmentációs hatáskeresztmetszetekkel.

A c) pontban említett jelenségre kvalitatív magyarázatot adhatunk. Ismeretes,



hogyan az eloszlásfüggvények a teljes fázistérre vett integrálja,

$$\int f(p_c) \frac{d^3 p_c}{E_c} = \langle n_c \rangle \sigma_{\text{teljes}}^{ab}, \quad (18)$$

ahol  $\langle n_c \rangle$ , a  $c$  típusú részecske átlagos multiplicitása. Az egyenlőség mindkét oldalát szétválaszthatjuk energiafüggetlen és energiafüggő részre, tekintsük ez utóbbit abban az esetben ha az  $ab$  csatorna egzotikus (az ISR kísérletekben a  $pp$  csatorna valóban az):

nem vezető

$$\int f(p_c) \frac{d^3 p_c}{E_c} = 0, \text{ ha } ab \text{ egzotikus.} \quad (19)$$

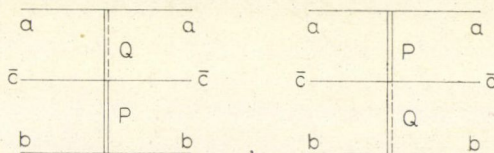
Ha a fázistér valamelyik részében találunk pozitív nem vezető tagokat (ilyenek jelentkeztek a fragmentációs tartományban), akkor a (19) egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha a fázistér más részében, tehát például a pionizációs tartományban, negatív nem vezető tagok lépnek fel. Ez azt jelenti, hogy a határ-eloszlást ebben a tartományban a görbék alulról közelítik.

A jelenséget a kétkomponensű dualitás nyelvén nem tudjuk megmagyarázni. Feltéve, hogy a nem-vezető tagokat valamilyen mezon trajektória cseréje adja, (az  $s^{-1/4}$  közelítés erre utal) az egyrészecske eloszlás így írható:

$$f(p_c) = f_{PP}(\kappa) + f_{PM}(\kappa) |t|^{-1/2} + f_{MP}(\kappa) |u|^{-1/2}. \quad (20)$$

Az energiafüggő tagok, a (20) kifejezésben a második és harmadik, a 7. ábra (5) és (6) gráfjából adódnak, ezek, mint amplitúdók négyzetei, pozitívak. A legfurcsább a helyzet a  $pp \rightarrow \bar{p} + X$  eloszlásban [16]. Ez ugyanis a legegzetikusabb folyamat, az  $ab\bar{c}$ ,  $ab$ ,  $a\bar{c}$ ,  $b\bar{c}$  csatornák mindegyike egzotikus, az eloszlás az energia növekedésével mégis erősen megnő, ami nagy negatív nem-vezető járulékra utal.

Chan és társai [15] felvetették, hogy a pionizációs tartományban, ahol a 3 részecske  $\rightarrow 3$  részecske szórás leginkább különbözik a  $2 \rightarrow 2$  szórástól (a fragmentációs tartományban a részecske és fragmentuma durván „egy” részecskének vehető), és ahol igen messze vagyunk a fizikai tartománytól, ( $u$  és  $t$  nagy negatív értékek) felléphetnek új, a kétrészecske szórásból ismeretlen szingularitások. A vákuum kvantumszámokkal rendelkező, új „ $Q$ -szingularitás” a következő extra járulékokat adhatja:



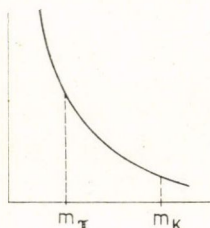
Ezzel az egyrészecske eloszlás alakja a következő:

$$f(p_c) = f_{PP}(\kappa) + (f_{PQ}(\kappa) |t|^{\alpha_Q - 1} + f_{QP}(\kappa) |u|^{\alpha_Q - 1}) + (f_{PM}(\kappa) |t|^{-1/2} + f_{MP}(\kappa) |u|^{-1/2}). \quad (21)$$

Ha az első zárójelben álló kifejezés negatív, ezzel a negatív nem-vezető járulékok fellépte magyarázható.



Megjegyezzük még, hogy egy univerzális  $f_{pp}(x)$  függvény magyarázhatja a kis  $K/\pi$  arányt nagy  $SU(3)$  sértés nélkül is. Az arány kísérletileg kisebb, mint 10%. Ha ez a függvény a 8. ábrán látható exponenciális, akkor kis  $K/\pi$  arányt jósolhatunk. Az ISR adatok azt mutatják, hogy a függvény pionokra és kaonokra 15%-on belül megegyezik.



8. ábra

### 7. Tripla Regge viselkedés

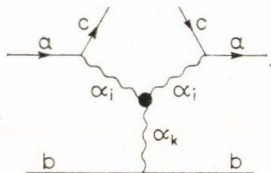
Faktorizációt feltéve az egyrészeske eloszlást az  $a \rightarrow c$  fragmentációs tartományban így írhattuk:

$$\sim \gamma_{ib} \Gamma_{a\bar{c}}^i(t, M^2/s) s^{\alpha_i(0)-1}. \quad (22)$$

Nem mondhatunk semmit a  $\Gamma_{a\bar{c}}^i(t, M^2/s)$  függvényről. Vizsgáljuk a folyamatot egy igen speciális tartományban, ahol az inkluzív folyamat az

$$(23)$$

„kétreszeske” folyamatként megy végbe. Itt  $t = (p_a - p_c)^2$  rögzített és kicsi. Ha  $s = (p_a + p_b)^2 \rightarrow \infty$ , akkor az inkluzív amplitúdó négyzete a következő Regge-diagrammal írható le:





Az egyrészcseke eloszlás,

$$f(p_c) = \sum_i \frac{1}{s} |f_{a\bar{c}}^i(t)|^2 (\cos \theta_t)^{2\alpha_i(t)} \text{Im} F_{\alpha_i b}(M^2, t), \quad (24)$$

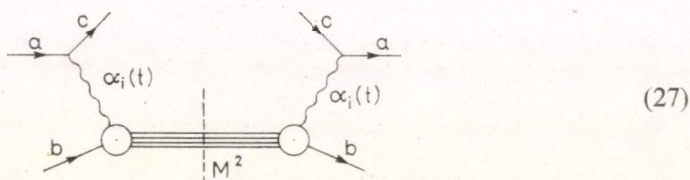
ahol  $1/s$  a fluxustényező,  $f_{a\bar{c}}(t)$  Regge-reziduum függvény,  $\theta_t$  a  $t$ -csatornabeli szórási szög,  $F_{\alpha_i b}(M^2, t)$  a  $b$ -Reggeon „kétrészecske” előreszórási amplitúdó. Ha most  $M^2 \rightarrow \infty$ , akkor

$$\text{Im} F_{\alpha_i b}(t) = \sum_k g_{ii}^k(t) (M^2)^{\alpha_k(0)}, \quad (25)$$

amivel

$$\frac{d^2\sigma}{dt dM^2} \sim \frac{1}{s} f(p_c) = \frac{1}{s^2} \sum_{i,k} |f_{a\bar{c}}^i(t)|^2 \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_i(t)} g_{ii}^k(t) (M^2)^{\alpha_k(0)}. \quad (26)$$

(26) a következő, ún. tripla Regge-diagramnak felel meg:



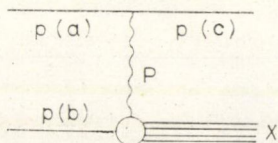
Feltéve, hogy a  $b$ -Reggeon előreszórásban a Pomerancuk-trajektória csere dominál, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2\sigma}{dt dM^2} \sim \frac{1}{s} \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_i(t)-1}. \quad (28)$$

A (27) Regge-diagram ténylegesen egy igen speciális tartományban írhatja le az inkluzív hatáskeresztmetszetet. Mivel  $t$  rögzített,  $M^2$  és  $\frac{s}{M^2} \rightarrow \infty$ , ezért a Feynman-féle változó  $x \sim 1 - \frac{M^2}{s} \sim 1$ , ami azt jelenti, hogy az  $a \rightarrow c$  fragmentációs tartomány határán vagyunk. Ez kísérletileg igen nehezen érhető el, mivel az  $M^2 \sim 6 \text{ GeV}^2$ ,  $s/M^2 \sim 6 \text{ GeV}^2$  aszimptotikusnak tekinthető értékekkel  $s \sim 36 \text{ GeV}^2$ .

Kiterjedt elméleti vizsgálatok arra a következtetésre jutottak, hogy a  $g_{PP}^P$  három Pomerancuk-csatolás eltűnik, ha  $\alpha_P(0) = 1$  [17]. Úgy tűnik, hogy ezt a kísérleti eredmények is alátámasztják.

Vázolunk egy módszert, amellyel a  $g_{ii}^k$  csatolások számíthatók. Példaként a  $pp \rightarrow p + X$  inkluzív folyamatot tekintjük. Legyen  $s$  elég nagy (az ISR kísérletekben ez teljesül), úgy hogy a



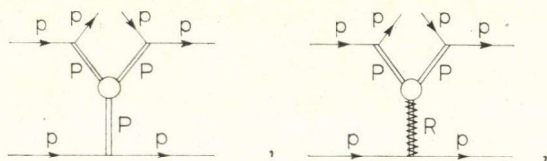


Regge-diagramban a Pomerancuk-trajektória csere domináljon. A véges energiás összecsabálások mintájára ún. véges tömegű összecsabálást írhatunk fel a  $p-P$  proton-Reggeon szórásra [18]. A  $v=p_b(p_a-p_c) \sim M^2/2$  változót használva ennek alakja a következő:

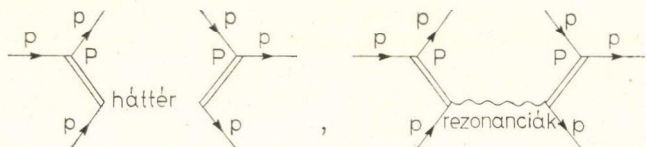
$$\int_0^N v dv \frac{d^2 \sigma}{dt dM^2} (pp \rightarrow pX) = \frac{1}{s^2} |f_{PP}^P(t) s^{\alpha_P(t)}|^2 \times \quad (29)$$

$$\times \left\{ g_{PP}^P(t) \frac{N^{3-2\alpha_P(t)}}{3-2\alpha_P(t)} + g_{PP}^R(t) \frac{N^{2.5-2\alpha_P(t)}}{2.5-2\alpha_P(t)} \right\}.$$

Itt a jobb oldalon a kapcsos-zárójelben álló két tag a következő Regge-diagramoknak felel meg:



ahol  $R$  rezonancia trajektóriát jelöl,  $\alpha_P(0)=1$ ,  $\alpha_R(0)=\frac{1}{2}$ . A két diagram duális partnerei a közönséges kétkomponensű sémában az alábbiak:



Így az integrandusban egyszer a teljes hatáskeresztmetszetet, egyszer a  $p+p \rightarrow p + \text{rezonancia}$  járulékot írva  $g_{PP}^P$  és  $g_{PP}^R$  számítható.

A tripla Regge-viselkedést most szemléletesen, a részecske-Reggeon amplitúdót kétrészecske amplitúdóként kezelve hoztuk ki. Megjegyezzük, hogy ez az aszimptotikus viselkedés a megfelelő komplex impulzusmomentum síkok vizsgálatával, egzaktul bizonyítható [19].

## 8. Kétrészecske eloszlások

A kétrészecske-eloszlások különböző aszimptotikus viselkedéseit a 2. fejezetben vázolt általános módszerrel vizsgáljuk. Itt most a legfontosabb eredményeket ismertetjük [4]. A kétrészecske inkluzív hatáskeresztmetszetet a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{d^5 \sigma(a+b \rightarrow 1+2+X)}{d\varphi_2 d\theta_1 d\theta_2 d(\text{ch } \beta_1)^2 d(\text{ch } \beta_2)^2} = \quad (30)$$

$$= \frac{1}{4\pi m_a m_b \text{sh}(\theta_a + \theta_b)} T(\theta_a + \theta_1, \theta_2 - \theta_1, \theta_b - \theta_2, \beta_1, \beta_2, \varphi_2),$$

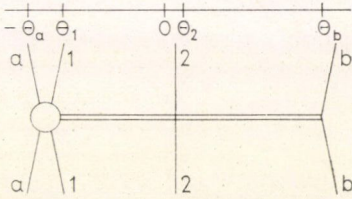


ahol  $T$  az  $ab\bar{c}_1\bar{c}_2 \rightarrow ab\bar{c}_1\bar{c}_2$  előreszórási amplitúdó  $M^2=(p_a+p_b-p_1-p_2)^2$ -ben vett diszkontinuitásának  $\pi^2 m_1^2 m_2^2$ -szerese. Az impulzusok parametrizálása tömegközépponti rendszerben a következő:

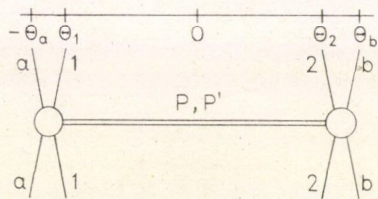
$$\begin{aligned} p_a &= m_a(\text{ch } \theta_a, 0, 0, -\text{sh } \theta_a), \\ p_b &= m_b(\text{ch } \theta_b, 0, 0, \text{sh } \theta_b), \\ p_1 &= m_1(\text{ch } \theta_1 \text{ ch } \beta_1, \text{sh } \beta_1 \cos \varphi_1, \text{sh } \beta_1 \sin \varphi_1, \text{sh } \theta_1 \text{ ch } \beta_1), \\ p_2 &= m_2(\text{ch } \theta_2 \text{ ch } \beta_2, \text{sh } \beta_2 \cos \varphi_2, \text{sh } \beta_2 \sin \varphi_2, \text{sh } \theta_2 \text{ ch } \beta_2). \end{aligned} \quad (31)$$

Öt lényeges aszimptotikus tartományt különböztetünk meg.

a) pionizáció-fragmentáció:  $\theta_1 + \theta_a, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \varphi_2$  rögzített.



9. ábra



10. ábra

A megfelelő Regge-diagramot a 9. ábra mutatja. Ha  $\theta_a$  és  $\theta_b$  és így  $s$  nő, akkor  $\theta_2 - \theta_1$ ,  $\theta_b - \theta_2$  és így  $(p_2 - p_1)^2$ ,  $(p_b - p_2)^2$  nő,  $(p_a - p_1)^2$  állandó marad. Az 1 részecske az  $a$  részecske fragmentuma, a 2 részecske pionizációs termék. Az inkluzív hatáskeresztmetszet aszimptotikus alakja a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \sigma}{d \dots} &\rightarrow f_{PP}(\theta_1 + \theta_a, \beta_1, \beta_2, \varphi_2) + s^{-1/4} f_{PP'}(\theta_1 + \theta_a, \beta_1, \beta_2, \varphi_2) + \\ &+ s^{-1/4} f_{P'P}(\theta_1 + \theta_a, \beta_1, \beta_2, \varphi_2). \end{aligned} \quad (32)$$

b) kétszeres fragmentáció:  $\theta_1 + \theta_a, \theta_b - \theta_2, \beta_1, \beta_2, \varphi_2$  rögzített.

A 10. ábrán a megfelelő Regge-diagramot láthatjuk. Ha  $s$  nő, akkor  $\theta_2 - \theta_1$  és így  $(p_2 - p_1)^2$  nő,  $(p_a - p_1)^2$  és  $(p_b - p_2)^2$  állandó marad. 1 az  $a$  részecske, 2 a  $b$  részecske fragmentuma. A hatáskeresztmetszet aszimptotikus alakja a következő:

$$\frac{d^5 \sigma}{d \dots} \rightarrow f_P(\theta_1 + \theta_a, \theta_b - \theta_2, \beta_1, \beta_2, \varphi_2) + s^{-1/2} f_{P'}(\theta_1 + \theta_a, \theta_b - \theta_2, \beta_1, \beta_2, \varphi_2). \quad (33)$$

c) kétszeres pionizáció:  $\theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2$  rögzített.

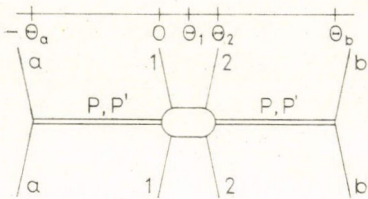
A kétszeres pionizációs Regge-diagram a 11. ábrán látható: Ha  $s$  nő, akkor  $\theta_a - \theta_1$  és  $\theta_b - \theta_2$  és így  $(p_a - p_1)^2$  és  $(p_b - p_2)^2$  nő,  $(p_1 - p_2)^2$  állandó marad. Mindkét részecske pionizációs termék, egymással erősen korreláltak. A hatáskeresztmetszet



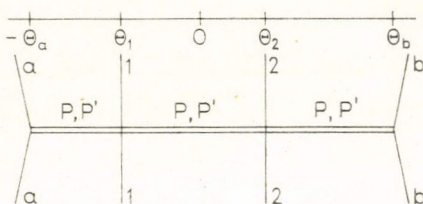
aszimptotikus alakja a következő:

$$\frac{d^5 \sigma}{d \dots} \rightarrow g_{PP}(\theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2) + s^{-1/4} g_{P'P}(\theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2) + s^{-1/4} g_{PP'}(\theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2). \quad (34)$$

d) Regge-pionizáció:  $\beta_1, \beta_2, \varphi_2$  rögzített: .



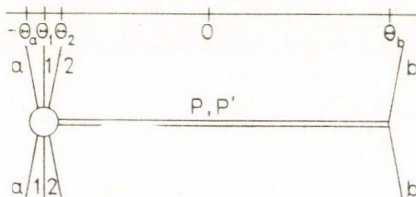
11. ábra



12. ábra

A 12. ábrán láthatjuk a megfelelő Regge-diagramot. Ez a határeset c)-ből kapható úgy, hogy  $\theta_2 - \theta_1$ -et sem rögzítjük,  $(p_2 - p_1)^2$  is nő, ha  $s$  nő. Az 1 és 2 részecske most egymással korrelálatlan pionizációs termék. Az aszimptotikus viselkedés (34)-hez hasonló, a különbség annyi, hogy a  $\theta_2 - \theta_1$  függés eltűnik, és a nem-vezető tagok  $s^{-1/6}$  nagyságrendűek.

e) kétrészecske fragmentáció:  $\theta_a + \theta_1, \theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2$  rögzített.



13. ábra

A megfelelő Regge-diagramot a 13. ábra mutatja. Ha  $s$  nő, akkor  $(p_b - p_2)^2$  nő,  $(p_a - p_1)^2, (p_2 - p_1)^2$  állandó marad. Mindkét részecske az  $a$  részecske fragmentuma. Az aszimptotikus viselkedés a következő:

$$\frac{d^5 \sigma}{d \dots} \rightarrow h_P(\theta_a + \theta_1, \theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2) + s^{-1/2} h_{P'}(\theta_a + \theta_1, \theta_2 - \theta_1, \beta_1, \beta_2, \varphi_2). \quad (35)$$

Egy általános megjegyzést teszünk még. A kétrészecske eloszlás mind az öt esetben aszimptotikusan állandó értékhez tart. Természetesen előfordulhat, hogy ez az állandó, a Pomerancuk-pólus reziduum függvénye, eltűnik, erre azonban semmi-féle okot nem tudunk felhozni.



## IRODALOM

1. *Montvay I. A XI. Elméleti Fizikai Iskolán tartott előadás (megjelenőben).*
2. *P. D. B. Collins és E. S. Squires: Regge Poles in Particle Physics.*
3. *H. P. Stapp, Phys. Rev. D3, 3177, 1971.*
4. *H. D. I. Abarbanel, Phys. Rev. D3, 2227, 1971.*
5. *N. Bali, G. F. Chew és A. Pignotti, Phys. Rev. 163, 1572, 1967.*
6. *J. Benecke, T. T. Chou, C. N. Yang és E. Yen, Phys. Rev. 188, 2159, 1969.*
7. *S. H. H. Tye, G. Veneziano, Phys. Lett. 38B, 30, 1972.*
8. *H. Harari, Phys. Rev. Lett. 20, 1395, 1968. P. G. O. Freund, Phys. Rev. Lett. 20, 235, 1968.*
9. *M. B. Einhorn, M. B. Green, M. A. Virasoro, Phys. Lett. 37B, 292, 1972.*
10. *D. J. Crennel és társai, Phys. Rev. Lett. 28, 643, 1972.*
11. *G. Barbiellini és társai, Phys. Lett. 39B, 663, 1972.*
12. *M. S. Chen és társai, Phys. Rev. Lett. 26, 1585, 1971.*
13. *L. Gálfi és P. Häsénfratz, Lett. Nuovo Cim. 3, 702, 1972.*
14. *H. Boggild és társai, Nucl. Phys. B27, 1, 1971.*
15. *Chan Hong-Mo, H. I. Miettinen, D. P. Roy, P. Hoyer, Phys. Lett. 40B, 406, 1972.*
16. *M. G. Albrow és társai, Phys. Lett. 40B, 136, 1972.*
17. *H. D. I. Abarbanel, G. F. Chew, M. L. Goldberger, L. M. Saunders, Phys. Rev. Lett. 26, 937, 1971.*
18. *M. B. Einhorn, J. Ellis, J. Finkelstein, Phys. Rev. D5, 2063, 1972.*
19. *C. E. DeTar és társai, Phys. Rev. Lett. 26 675, 1971.*







# A RÖNTGEN ABSZORPCIÓS ÉLEK FINOM SZERKEZETÉNEK AUTO-IONIZÁCIÓS MODELLJE\*

UNGÁR TAMÁS

ELTE, Általános Fizika Tanszék, Budapest

A dolgozat első részében a röntgen abszorpciós élek finom szerkezetének egy új modelljét adjuk meg. Ezen auto-ionizációs modell segítségével jól tudtuk értelmezni az általunk megvizsgált molibdén és Mo-oxidok  $K$  abszorpciós finom szerkezetét, továbbá néhány, az irodalomból vett röntgen abszorpciós finom szerkezetet.

## TARTALOMJEGYZÉK:

Bevezetés .....	214
1. A röntgen abszorpciós él finom szerkezete .....	214
1.1. Kronig modell .....	215
1.2. Hayasi modell .....	217
1.3. Rövid hatótávolságú (RH) modellek .....	217
2. A KFS klasszikus modelljeinek bírálata .....	218
3. A KFS „auto-ionizációs” modellje [24] .....	221
3.1. A KFS elektron „shake-off” mechanizmusa .....	222
3.2. Az elektron „shake-off” valószínűségének meghatározása impulzus közelítésben .....	224
3.3. Az auto-ionizációs modell és a KFS összevetése .....	225
4. Kísérleti rész .....	226
4.1. Vizsgálandó anyagok .....	226
4.2. Hajlított kristályos spektrográf .....	226
4.3. Az abszorpciós spektrum regisztrálása .....	227
4.4. Az abszorpciós spektrumok kiértékelése .....	229
4.5. A spektrográf felbontóképessége és diszperziója, mérési pontosság .....	230
5. Kísérleti eredmények és értelmezésük .....	231
5.1. Mérési eredmények .....	231
5.1.1. A tiszta Mo abszorpciós éle .....	231
5.1.2. A Mo-oxidok abszorpciós éle .....	233
5.2. Az abszorpciós spektrumok értelmezése .....	234
5.2.1. A tiszta Mo $K$ abszorpciós finom szerkezete .....	234
5.2.2. A Mo $K$ abszorpciós finom szerkezete a Mo-oxidokban .....	235
5.2.2.1. A $\text{MoO}_3$ csoport .....	235
5.2.2.2. A $\text{MoO}_2$ finom szerkezete .....	235
5.2.3. A kémiai kötés hatása az ESO valószínűségére .....	236
Összefoglaló .....	237
Köszönetnyilvánítás .....	239
Irodalom .....	239

\* Egyetemi doktori értekezés. Érkezett 1973. I. 18.



## BEVEZETÉS

A röntgen spektroszkópia az emissziós és abszorpciós röntgen spektrumok vizsgálatával foglalkozik. Egy anyag emissziós röntgen spektruma a betöltött, abszorpciós röntgen spektruma az ezek fölött fekvő, üres elektron állapotokról nyújt felvilágosítást.

A harmincas évek elején Kossel és Kronig megfigyelte, hogy a röntgen abszorpciós élek nagyenergiájú oldalán az abszorpciós együttható a vizsgált anyagra jellemző ingadozást ún. abszorpciós finomszerkezetet mutat. Ezt a jelenséget a továbbiakban az abszorpciós él „kiterjesztett finom szerkezetének”, röviden KFS-nek fogjuk nevezni. A KFS magyarázatára több próbálkozás történt a harmincas és negyvenes években, azonban egyik sem vezetett megnyugtató eredményre.

Ennek a dolgozatnak az egyik célja egy olyan új modell alapjainak a megteremtése, amely helyesen értelmezi a röntgen abszorpciós élek KFS-ét. Ennek az új modellnek, amelyet „auto-ionizációs modell”-nek nevezünk, a lényege a következő. Az abszorpciós együttható a gerjesztett törzselektron átmeneti valószínűségével arányos. A röntgen foton által előidézett foto-ionizáció egy rendkívül gyors perturbáció, amit az ún. impulzus közelítés (sudden approximation) ír le helyesen. Ebben a közelítésben a gerjesztett atom elektronjai véges valószínűséggel ionizálódnak, ún. autoionizáció lép fel. Az így keletkező, sokszorosan töltött pozitív ion fogja meghatározni a gerjesztett elektron átmeneti valószínűségét. Az abszorpció nagy lesz, ha a gerjesztett elektron a pozitív ion egy megengedett állapotába megy át, illetve kicsi lesz, ha ilyen átmenet nem valósulhat meg.

A dolgozat másik célja a molibdén  $K$  abszorpciós élének a vizsgálata tiszta Mo-ban és néhány Mo-oxidban. A megvizsgált abszorpciós élek KFS-ét jól tudtuk értelmezni az auto-ionizációs modell segítségével.

Az auto-ionizációs modellel végül értelmeztük néhány, az irodalomból vett abszorpciós él KFS-ét, ezzel alátámasztva, hogy az új modell általános érvényű.

## 1. A RÖNTGEN ABSZORPCIÓS ÉL FINOM SZERKEZETE

A röntgen sugárzás anyaggal való kölcsönhatása lényegében foto-ionizációs folyamat. Ha az anyaggal kölcsönható foton energiája nagyobb vagy egyenlő egy törzselektron ionizációs energiájával, akkor a foton bizonyos valószínűséggel elnyelődik, az abszorbeáló atom ionizálódik és gerjesztett állapotba kerül.

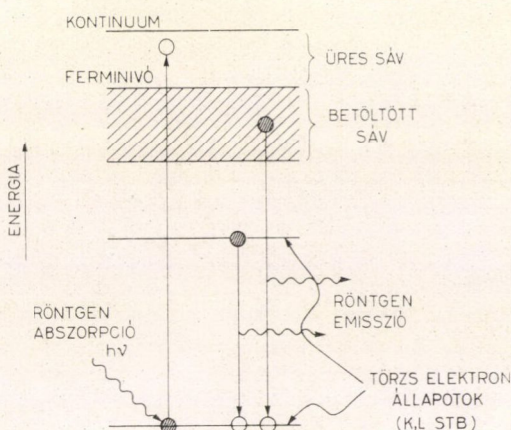
A röntgen abszorpció folyamatát az 1. ábrán követhetjük végig.

A bejövő foton energiája legyen  $h\nu$ . Az abszorpció ugrásszerűen megnő, ha  $h\nu$  eléri egy belső héjon levő elektron ionizációs energiáját. Ezt az ugrást nevezzük abszorpciós élnek. Tovább növelve a foton energiáját, a gerjesztett elektron a fermi-nívó felett egyre magasabban fekvő üres állapotokba megy át. Nyilvánvaló, hogy a foton abszorpciójának a mértékét a fermi-nívó feletti állapotsűrűség  $N(E)$  és a kilökött elektron átmeneti valószínűsége  $T(E)$  határozza meg. Így módon az abszorpciós együttható a következő alakban írható [1]

$$\chi(E) \cong N(E)T(E). \quad (1)$$



A gerjesztett elektron mindaddig egy betöltetlen kötött állapotba kerül, amíg a kinetikus energiája kisebb, mint a kilépési munka. A kilépési munka a legtöbb anyag esetében nem nagyobb 20–30 eV-nál. Ennek ellenére azt tapasztaljuk, hogy a gerjesztett elektron átmeneti valószínűsége határozott szerkezetet mutat, amikor kinetikus energiája akár 10-szeresét is meghaladja a kilépési munkának. Ezt a szerkezetet nevezzük „kiterjesztett finom szerkezetnek” (a továbbiakban KFS) vagy első felismerőjéről Kronig-szerkezetnek [2–4]. A továbbiakban áttekintjük a KFS eddigi, klasszikus modelljét.



1. ábra. A röntgen emisszió és abszorpció sémája.

### 1.1. Kronig modell

Kronig első dolgozatában [2] a KFS-re az éppen akkoriban felismert sáv szerkezet alapján adott magyarázatot. Eszerint az abszorpció minimális, ha a gerjesztett elektronnak olyan kinetikus energiája és impulzusa van, hogy az Bragg-reflexiót szenvedhet, ellenkező esetben az abszorpció maximális.

Kronig a Bragg-reflexió feltételét a következő képletben adta meg:

$$E_n = \frac{h^2}{8m} \frac{n^2}{a^2} \quad (2)$$

ahol  $m$  az elektron tömege,  $n$  egész szám és  $a$  a kristály periódusa egy adott irányban

A KFS sávmodellje lényegében kiterjesztése volt a Kossel [5] által gázokra adott kötött állapot modellnek. Gázokban a KFS sokkal kisebb energia tartományokra terjed ki, mint kristályokban és az ionizációs határ fölött megszűnik. Klasszikus példa erre Parratt [6] mérése argon gázban. Kronig sáv szerkezetén alapuló modellje tehát kézenfekvő, hiszen egy szilárd anyagban az elektron „kötött” állapotai az ionizációs határ fölött tovább folytatódnak, csak éppen nem egy-elektron állapotok lesznek, hanem sávok.

Kronig a KFS maximumainak a szélességét a termikus rezgéssel hozta kapcsolatba. Hannawalt [7] vasban végzett mérése szerint az abszorpciós csúcsok a hőmérséklet növelésével a kisebb energiák felé tolódnak el, ugyanakkor az amplitúdójuk csökken. Mindez jól magyarázható a (2) képlet alapján. Ezzel szemben Coster és Veldkamp [8] úgy találták, hogy Cu-ban a KFS abszorpciós maximumainak nagyobb az amplitúdója, mint Zn-ben. Ebből arra következtettek, hogy Cu-ban az atomok termikus rezgésének amplitúdója kisebb, mint Zn-ben. Későbbi vizsgálatok során kiderült, hogy ennek éppen az ellenkezője áll fenn.

Kronig második cikkében [3] pontosabb matematikai megfogalmazást adott a KFS sávmodelljére. A KFS abszorpciós maximumait a Schrödinger-egyenlet



periodikus potenciáltérben való megoldásaival azonosította. E szerint az abszorpciós maximumok energiáját a következő képlet adja meg

$$E = \frac{h^2}{8m} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \Theta \right]}, \quad (3)$$

ahol  $\Theta$  a Bragg-szög,  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  egész számok.

A fenti képlet alapján *Kronig* egy oszlop diagramot szerkesztett, amelyen egy-egy oszlop magassága az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  indexek multiplicitásával arányos.

Harmadik cikkében [4] *Kronig* kétatomos molekula abszorpciós spektrumát vizsgálta. Abból a feltevésből indult ki, hogy az abszorpció folyamata egy-elektron gerjesztésként kezelhető, amelyben az abszorpció az egy-elektron átmeneti valószínűségével arányos. Az átmeneti valószínűséget a következő alakban írta fel

$$P(i, i') = \int \psi_i^*(xyz) V_{\alpha\beta\gamma} \psi_{i'}(xyz) dx dy dz, \quad (4)$$

ahol  $i$  a kezdeti,  $i'$  a végállapotot jelenti,  $V$  az átmeneti mátrix elem. Végül egy  $AB$  típusú kétatomos molekulában egy  $A$  atom abszorpciós finom szerkezetét a következő hányados adja meg

$$\frac{P_{AB}(i, i')}{P_A(i, i')}, \quad (5)$$

ahol  $P_{AB}$  és  $P_A$  a gerjesztett elektron átmeneti valószínűsége a molekulában, illetve a szabad atomban. Ha a kilökött elektront egy síkhullámmal írjuk le, akkor az (5) hányados közelítő megoldása, ami egyben az abszorpciós finom szerkezet, a következő alakban írható [4]

$$\chi(E) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta [(q + q^*) \cos \Theta + qq^*], \quad (6)$$

ahol

$$q = [C(r, \Theta)/r] \exp [i(2E)^{1/2} r(1 - \cos \Theta)], \quad (7)$$

$r$  az atomok közötti távolság a molekulában,  $C(r, \Theta)/r$  a rugalmas szórás amplitúdó a  $B$  atomról  $r$  távolságban és  $\Theta$  az  $E$  energiájú síkhullám szórás szöge.

*Hartree*, *Kronig* és *Petersen* [9] ezt a formulát alkalmazták  $\text{GeCl}_4$  KFS-nek értelmezésére. A gerjesztett elektront egy síkhullámmal írták le és meghatározták a környező atomok szóró hatását erre a síkhullámra.

*Kronig* első két dolgozatában [2, 3] a KFS-et a szilárd anyagok sávszerkezetére vezette vissza és ebben az értelemben ezt a modellt hosszú hatótávolságú (HH) modellnek tekinthetjük. Ezzel szemben a kétatomos molekulák KFS-re vonatkozó modell, amelyet *Hartree*, *Kronig* és *Petersen* [9] tovább fejlesztettek, az abszorbeáló atom közvetlen környezetére vezet vissza a KFS-et. Ez a modell tehát a kölcsönhatás távolságát tekintve rövid hatótávolságú (RH).

A továbbiakban röviden áttekintjük a két *Kronig*-modell tovább fejlesztett változatait és egyben látni fogjuk, hogy valamennyi változat a HH, illetve RH kategóriákba sorolható.



## 1.2. Hayasi modell

A Hayasi-modell [10] csupán interpretációban tér el *Kronig* HH elméletétől. E szerint, ha a gerjesztett elektron  $90^\circ$ -os Bragg-reflexiót szenved, akkor azabszorbeáló atom körül kialakul egy állóhullám. *Hayasi* ezt az álló hullámot „kvázi stacionárius” állapotnak nevezte. Az abszorpció akkor lesz maximális, ha a gerjesztett elektron végállapota egy ilyen „kvázi stacionárius” állapot. Az ilyen „kvázi stacionárius” állapotok energiája nyilván a kristály szimmetriájától függ és a következő alakban írható (eV-ban)

$$E_{hkl} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{4a^2} 150, \quad (8)$$

ahol  $h, k, l$  a kristály hálózati síkjainak a Miller-indexei,  $a$  a rácsparaméter Å-ben, a 150 számérték a  $90^\circ$ -os Bragg-reflexió feltevéséből adódik, ha a kilöködött elektron energiáját a deBroglie-hullámhosszal fejezzük ki.

Érdemes megjegyezni, hogy a (8) képlet formálisan teljesen azonos *Kronig* (3) képletével. A két egyenlet értelmezése azonban lényegesen eltér. Ahol *Kronig* abszorpciós maximumot vár, ott *Hayasi* szerint abszorpciós minimumnak kell lennie. Sajnos a kísérletekkel való összevetés nem elég szignifikáns ahhoz, hogy a két interpretáció között döntení lehetne, mint ezt a 2. pontban részletesebben megmutatjuk.

## 1.3. Rövid hatótávolságú (RH) modellek

*Kronig* kétatomos molekulákra kidolgozott RH modelljét *Sawada* [11] megpróbálta kristályokra általánosítani. Az abszorpciós együttthatót a következő általános alakban írta fel

$$\chi(E) \sim \sqrt{EP(E)}, \quad (9)$$

ahol  $\sqrt{E}$  jó közelítéssel arányos egy fém állapotsűrűségével a fermi níó felett és  $P(E)$  a gerjesztett elektron átmeneti valószínűsége. A továbbiakban *Sawada* a  $P(E)$  átmeneti valószínűséget a következőképpen számította ki. A kilökött elektron hullámfüggvénye a szomszédos atomokon való többszörös szórás lehetőségét figyelembe véve, a következő alakban írható

$$\psi = \psi_i + \sum_s \psi_s + \sum_{s,t} \psi_{s,t} + \sum_{s,t,u} \psi_{s,t,u} + \dots \quad (10)$$

ahol  $\psi_i$  a beeső síkhullám,  $\psi_s$  az  $s$ -edik atom által szórt  $\psi_i$ ,  $\psi_{s,t}$  a  $t$ -edik atom által szórt  $\psi_s$  stb.

Ezzel a hullámfüggvénnyel kiszámítható a  $P(E)$  átmeneti valószínűség és a  $\chi(E)$  abszorpciós együtttható. *Sawada* végeredménye a következő alakban írható

$$\chi(E) = \sum_s \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^3 \frac{N_s}{r_s^2} \exp(-\mu r_s) \sin 2kr_s \left\{ \frac{\cos 2ka}{(2ka)^2} - \frac{\sin 2ka}{(2ka)^3} \right\}, \quad (11)$$

ahol  $V_0$  a szomszéd atomok szóró potenciálja,  $a$  a ráczállandó és  $k$  a gerjesztett elektron hullámszáma.  $N_s$  az abszorbeáló atómtól azonos távolságra levő atomok száma és az összegzést el kell végezni az összes különböző  $r_s$ -ekre, ahol  $r_s$  az ab-



szorbeáló atom és a szomszédos atomok távolsága. A szórt elektron hullámfüggvényének az amplitúdója a többszörös szórás során csökken és ezt a  $\mu$  abszorpciós együttható biztosítja. Sawada a (11) képletet a Cu, Ni és Fe KFS-nek vizsgálatára alkalmazta. A 2. pontban látni fogjuk, hogy a kísérleti és elméleti görbék egyezése helyenként ugyan jónak mondható, de semmiképp sem olyan meggyőző, hogy ennek alapján a RH modell helyessége mellett lehetne dönteni.

Lényegében Hartree, Kronig és Petersen [9] eredményeiből kiindulva Kostarev [12], majd később Kostarev és Weber [13] tovább fejlesztették a RH modellt. Elméleti eredményeiket gallium egykristályon végzett mérésekkel próbálták igazolni. Bár a kísérleti és az elméleti görbék egyezése a gallium esetében jó, más anyagok esetében a modell helytelennek bizonyult.

Összefoglalva az előbbieket belátható, hogy valamennyi RH modell eredménye a következő általános alakban írható fel [14]

$$\chi(E) = \sum_i A_i(E) \sin(2kr_i + 2\delta_i), \quad (12)$$

ahol

$$A_i(E) = \int_{-\infty}^{\infty} V_i(x) \cos 2kx \, dx,$$

$\chi(E)$  az abszorpciós együttható,  $E$  a gerjesztett elektron energiája,  $k$  a hozzá tartozó hullámszám,  $r_i$  az  $i$ -ik koordinációs héj sugara,  $\delta_i$  az abszorbeáló atom potenciálja által létrehozott,  $l=1$ -es parciális hullámhoz tartozó fázis eltolódás és  $V_i$  az  $i$ -edik koordinációs héjban levő atomok átlagos potenciálja. Látni fogjuk, hogy a (12) típusú egyenlet alapvető ellentétben áll számos kísérleti eredménnyel.

## 2. A KFS klasszikus modelljeinek bírálata

Az előzőekben láttuk, hogy a KFS elméleti magyarázatára eddig két alapvetően különböző modell, a hosszú hatótávolságú (HH) és a rövid hatótávolságú (RH) modell született. Mindkettő, egyes speciális esetekben, jó egyezést mutat a kísérleti görbékkel, azonban a tüzetesebb kritikai vizsgálat azt mutatja, hogy egyik modell sem elfogadható.

A két modell szisztematikus vizsgálatára Perel és Deslattes [14] négy perovszkitban —  $\text{SrTiO}_3$ ,  $\text{CaTiO}_3$ ,  $\text{SrZrO}_3$  és  $\text{CaZrO}_3$ -ban — megmérték a Ti, Ca, Zr és Sr K abszorpciós élének KFS-ét, tehát összesen nyolc abszorpciós finom szerkezetet.

A HH elmélet szerint valamennyi  $\text{ABO}_3$  típusú kristályban az A és B atomok KFS-ének azonosnak kell lenni. Ez az azonosság a megvizsgált négy perovszkit egyikére sem teljesül, még csak közelítőleg sem (lásd 2. ábra).

Szigetelők esetében az abszorbeáló atom ionos potenciálja hosszú hatótávolságú teret hoz létre és a fáziseltolódás a következő alakú lesz [14]

$$\delta_l = \delta_l(E, e, r_l), \quad (13)$$

ahol  $e$  az abszorbeáló atom iontöltése. Ebből az következik, hogy az abszorpciós maximumok száma és relatív helyzete az abszorbeáló atom iontöltésétől függ. A 2. ábrán látható, hogy a Sr KFS-e  $\text{SrTiO}_3$ -ban és a Ca KFS-e  $\text{CaTiO}_3$ -ban az



abszorpciós maximumok helyére vonatkozóan megegyezik, annak ellenére, hogy a Sr és a Ca ionos töltése ezekben a kristályokban  $+1.85$  [15], illetve  $+1.0$  [16]. Ugyanezen az ábrán az is látható, hogy a KFS  $\Delta E$  energia tartománya Sr-ra  $\text{SrTiO}_3$ -ban nagyobb, mint Ca-re  $\text{CaTiO}_3$ -ban. Ezzel szemben a RH elmélet szerint a nagyobb iontöltésű atom KFS-e kisebb energia tartományra terjed ki [14].

Perel és Deslattes [14] további számos ellentmondást emelt ki a megvizsgált perovszkitok KFS-e és a HH illetve RH elméletek között és végül arra a következtetésre jutott, hogy az abszorpciós spektrumok KFS-ének magyarázatát egy, az eddiektől alapvetően különböző mechanizmusban kell keresni.

Lényegében ugyanerre a következtetésre jutott Azaroff [17], aki a KFS klaszszikus elméleteiről adott kritikai elemzést. Továbbiakban összefoglaljuk ennek az elemzésnek a főbb vonásait.

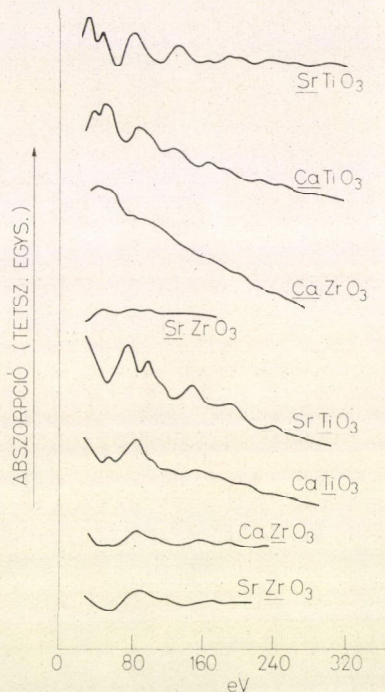
A RH elmélet igazolására Sawada [18] megvizsgálta a Co KFS-t a Co *hcp* és *fcc* módosulatában. Ebben az esetben a közvetlen környezet azonos, de a Braggreflexió feltételei különbözőek. A kísérlet szerint a két KFS azonos, amivel mind a RH, mind a HH modell nagyjából azonos mértékben egyeztethető össze.

Shiraiwa [19] a HH elmélet igazolására a  $\text{TiO}_2$  két módosulatát, az anatázét és rutilt vizsgálta. A Ti közvetlen környezete a két módosulatban azonos, de kristályszerkezeteik eltérnek egymástól. A Ti KFS-e a két módosulatban különbözőnek adódik, ami a HH modellt igazolná.

Obashi a Fe-Co [20] és a Ni-Co [21] ötvözetekben vizsgálta az egyes komponensek KFS-ét. Méréseiből az adódott, hogy ugyanabban az ötvözetben egy-egy alkotó KFS-e azonos szerkezetű. Ebből arra a következtetésre jutott, hogy a RH modell helyes, mert minden atom közvetlen környezete azonos.

Hasonló vizsgálatok alapján ellentétes következtetésre jutott Coster és Smoluchowski [22]. Különböző összetételű Cu-Zn ötvözetekben mérte meg a Cu és Zn KFS-ét. A két komponens KFS-e egy-egy összetétel esetében azonosnak adódott. Egy ötvözetben kialakuló közös sáv szerkezet alapján ez a HH modell helyességét jelentené.

Végül Azaroff [17] a réz KFS-ét alapul véve megvizsgálta, hogy a különböző elméletek milyen mértékben egyeztetetők össze a kísérlettel. Azaroff ehhez az összehasonlításhoz Krogstad [23] rézen végzett igen pontos KFS mérését használta fel (4. ábra). A kísérlet és a különböző elméletek összehasonlítása az 1. táblázatban

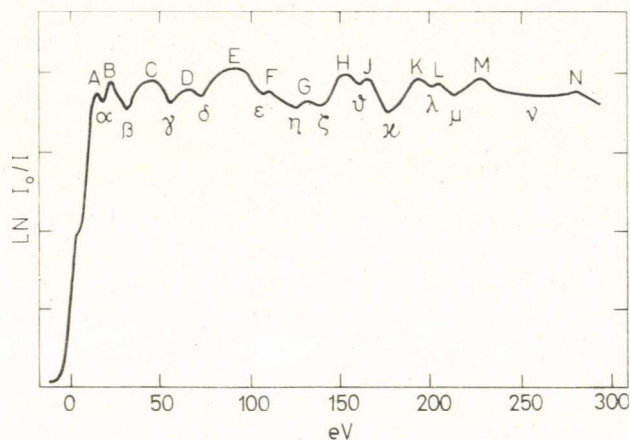


2. ábra. Négy különböző perovszkit,  $\text{SrTiO}_3$ ,  $\text{CaTiO}_3$ ,  $\text{CaZrO}_3$  és  $\text{SrZrO}_3$  egyes fém alkotóinak K abszorpciós finom szerkezete Perel és Deslattes mérése alapján [14]. Egy-egy görbe az aláhúzott fémion KFS-ét ábrázolja. Az energia skála 0 pontját a megfelelő K élhez tettük.

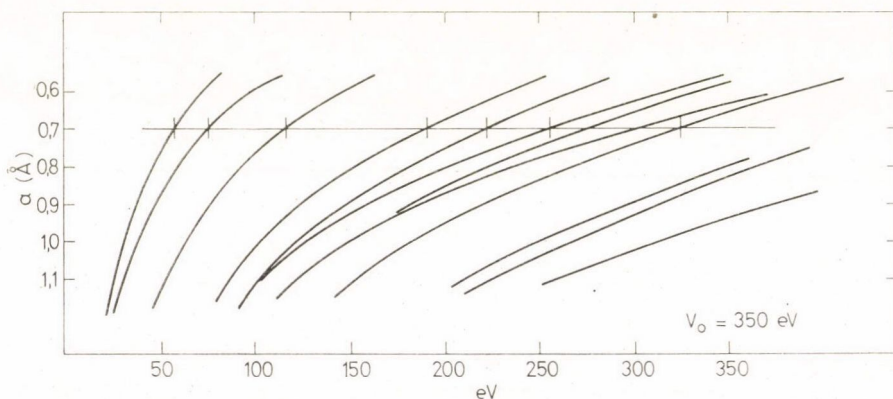


látható. A táblázatból kitűnik, hogy egyetlen elmélet sem egyezik olyan jól a kísérlettel, hogy ennek alapján egyértelműen el lehetne dönteni bármelyik modell helyességét a másikkal szemben.

Összefoglalva, *Perel* és *Deslattes* [14] valamint *Azaroff* [17] egyaránt arra a következtetésre jutottak, hogy az abszorpció él KFS-nek magyarázatára egy új mechanizmust kell találni.



3. ábra. A tiszta réz  $K$  abszorpció finom szerkezete *Krogstad* [23] mérése alapján  $J_0$  és  $J$  a mintára eső és a mintán áthaladó röntgen sugárzás intenzitását jelenti.



4. ábra. A 3.3. pontban leírt gömbszimmetrikus modell potenciál sajátértékeinek fitelési nomogramja.  $a$  a modell-potenciál átmérője. Az egyes vonalak az azonos  $n$  értékekhez tartozó energia sajátértékeket kötik össze. Az  $a=0,7$  Å-höz húzott vízszintes vonal a tiszta Mo KFS-nek abszorpció maximumait fitteli a nomogramhoz.



### 3. A KFS „AUTO-IONIZÁCIÓS” MODELLJE [24]

Ebben a fejezetben az abszorpciós él KFS-re egy olyan új modellt írunk le, amely a KFS valamennyi tulajdonságára kielégítő magyarázatot ad és jól összeegyeztethető a mérésekkel. Először összefoglaljuk a KFS legfontosabb empirikus tulajdonságait, majd megkeressük ezeknek az alapvető közös vonásait és végül egy olyan mechanizmust fogunk javasolni, amely tükrözi ezeket a közös vonásokat.

Az abszorpciós él KFS-nek leglényegesebb kísérleti tulajdonságai a következők.

1. A KFS csak olyan abszorpciós élek esetén észlelhető, amelyekhez tartozó ionizációs potenciál,  $E_i$  nagyjából a következő határok közé esik

$$1,5 \text{ keV} < E_i < 25 \text{ keV}. \quad (14)$$

$K$  abszorpciós élek esetén ez az Al-tól kb. a Rh-ig terjedő elemeket jelenti. Saját méréseink alapján például a Te  $K$  abszorpciós élének egyáltalán nem észlelhető finom szerkezete.

2. Általában az átmeneti fémekre jellemző, hogy a KFS 2—300 eV-os energia tartományra terjed ki.

3. Két vagy több atomos molekulákra is jellemző a széles energia tartományra kiterjedő KFS. Jól ismert példa erre a  $\text{GeCl}_4$  [9].

4. Gázokban az abszorpciós él szerkezete nem terjed tovább az ionizációs határnál, tehát nincs KFS-ük. Közismert példa erre Parratt mérése argonban [25] és Stephenson mérése klór gázban. [26].

5. A kristályszerkezet nem változtatja meg döntően ugyanannak az atomnak a KFS-ét, amennyiben az abszorbeáló atom környezete nem változik meg. A Co

#### 1. TÁBLÁZAT

A réz  $K$  abszorpciós finom szerkezetének abszorpciós maximumai Krogstad [23] mérése és különböző szerzők elméleti számításai alapján. Az abszorpciós maximumok jelölése megegyezik a 3. ábra jelöléseivel.

Absz. max. eV	Kísérleti értékek [23]	Számolt értékek			Sawada [11]
		Kronig [3]	Hayasi [10]	Kostarev [12]	
<i>A</i>	26.2	—	23	24	10
<i>B</i>	34.3	—	34	34	39
<i>C</i>	56.5	60	57	52	63
<i>D</i>	77.6	78	80	80	77
<i>E</i>	103.0	108	103	103	103
<i>F</i>	122.0	122	115	125	121
<i>G</i>	143.2	149	126	—	147
<i>H</i>	163.3	166	—	161	165
<i>I</i>	176.0	196	172	182	—
<i>J</i>	203.5	208	—	—	—
<i>K</i>	213.0	218	219	210	211
<i>L</i>	235.2	241	—	241	231
<i>M</i>	282.3	—	287	308	286



KFS azonosnak adódik a *hcp* és *fcc* módosulatokban [18], továbbá a Ti KFS sem változik meg a  $\text{TiO}_2$  két módosulatában [19].

6. Kétkomponensű ötvözetben az egyes alkotók KFS-e lehet egymástól teljesen eltérő. A Co-Te rendszeren végzett saját méréseink ezt jól igazolják [27].

7. Egymáshoz közel eső rendszámú elemekből álló kétkomponensű ötvözetekben az egyes alkotó KFS-e teljesen azonos. Jó példák erre a Fe-Co [20], Ni-Co [21] és Cu-Zn [22] ötvözetekben végzett abszorpciós él mérések.

8. Ugyanabban a kristályban, ugyanannak az atomnak a *K*, illetve *L* abszorpciós éléhez tartozó KFS nem egyezik meg. Ez jól látható, ha összehasonlítjuk a Rh és Te *K* [27], illetve *L* [28] abszorpciós élének KFS-ét.

9. A KFS abszorpciós maximumainak félérték szélessége általában 10 eV nagyságrendű, ami megfelel a plazma frekvencia nagyságrendjének.

A felsorolt kísérleti tapasztalatok a következő általános tulajdonságokban foglalhatók össze.

a) Szoros kapcsolat van az abszorbeáló atom elektron törzse és az abszorpciós él KFS-e között. Az 1. pont szerint, ha a gerjesztett héj ionizációs potenciálja elég nagy, akkor nem kapunk KFS-et. A 8. pont alapján nem mindegy, hogy a gerjesztett elektron milyen mélyen fekvő héjről löködött ki. Ezt úgy is lehetne magyarázni, hogy a kezdeti állapot szimmetriája befolyásolhatja az átmeneti valószínűséget, azonban a végállapot sokszorosan a kontinuumba esik (100 eV-ra az ionizációs potenciál fölé), ahol a szimmetria viszonyoknak már nem lehet lényeges szerepe. Továbbá kétkomponensű ötvözetben a sávszerkezet azonos, tehát a KFS csak úgy lehet eltérő, ha azt maga az abszorbeáló atom meghatározza (6. pont), amire utal az is, hogy ugyancsak kétkomponensű ötvözetekben, a közel azonos elektron törzsű alkotók KFS-e hasonló (7. pont).

b) A gerjesztett elektron végállapotát döntően meghatározza az abszorbeáló atom környezete. A 2., 3. és 4. pontok alapján a KFS csak molekulákban vagy kristályokban lép fel, egyatomos gázoknak nincs KFS-e. Az 5. pontból az is kiderül, hogy itt az abszorbeáló atom közvetlen környezetéről van szó.

c) A gerjesztett elektron végállapota a plazma frekvenciával összemérhető, rendkívül rövid élettartamú, kvázi stacionárius kvantum állapot. Ezt igazolja többek között a 9. pont.

Ezt a három általános tulajdonságot a következő mechanizmus alapján értelmezhetjük [24].

### 3.1. A KFS elektron „shake-off” mechanizmusa

Egy 50 eV kinetikus energiájú elektron  $4 \cdot 10^8$  cm/s sebességgel mozog, ami jól összemérhető egy atom törzs-elektronjainak pályamenti sebességével. Ez azt jelenti, hogy egy röntgen foton abszorpciójakor az elektron gerjesztést az impulzus közelítés, más néven „hirtelen közelítés” („sudden approximation”) írja le helyesen [29]. Ennek a közelítésnek egyik következménye az elektron „shake-off”, vagy auto-ionizáció. Az atomot leíró Hamilton-operátor a gyors elektron gerjesztés következtében hirtelen megváltozik és az addig stacionárius, kötött elektron állapotok közül néhány az új Hamilton-operátor kontinuumába kerül. Ezt másképp úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az atom önmagától ionizálódik, auto-ionizáció lép fel. A gerjesztett elektron végállapotát is ez a kvantum állapot fogja meghatározni. Az auto-



ionizáció következtében egy sokszorosan pozitív töltésű ion keletkezik és a gerjesztett elektron ennek egy kötött állapotába megy át. A gerjesztett elektron átmeneti valószínűségét az határozza meg, hogy kinetikus energiája megegyezik-e egy, a pozitív ionhoz tartozó kötött állapot energiájával vagy sem, az első esetben abszorpciós maximumot, a másodikban minimumot kell észlelnünk a KFS-ben.

Számos kísérleti bizonyíték van arra, hogy többszörösen pozitív ion keletkezik egy atomból vagy molekulából, ha a mag töltése bomlás során megváltozik, vagy egy belső elektronpályáról egy elektron ionizálódik. A bomlás során fellépő auto-ionizációs folyamatot kiterjedten vizsgálta *Wexler* [30] és *Carlson* [31]. A röntgen sugárzás hatására, auto-ionizáció révén keletkező nagy pozitív töltésű ionok töltés eloszlásának meghatározására *Carlson* és *White* [32] végzett méréseket. Vizsgálataik szerint Xe-ban például 12–13 szorosán töltött pozitív ionok is keletkezhetnek.

A *K* elektron ionizációjakor fellépő elektron „shake-off” (ESO) valószínűségét *Carlson* [32] meghatározta a periódusos rendszer valamennyi elemének minden elektronállapotára. Ebből rögtön következik, hogy a KFS erősen függ az abszorbeáló atom közvetlen környezetétől, hiszen az ESO valószínűségét, tehát az auto-ionizáció mértékét a szomszédos atomokkal való kémiai kötés lényegesen befolyásolja.

Az ESO mechanizmusa alapján az is világossá válik, hogy a KFS miért észlelhető csak kristályokban, illetve többatomos molekulákban és miért nem észlelhető gázokban. Kristályokban az abszorbeáló atom közvetlen szomszédai a Pauli-elv miatt olyan taszító hatást fejtenek ki a gerjesztett elektronra, hogy az nagyobb valószínűséggel marad az abszorbeáló atom potenciál terében. Ugyanez a helyzet molekulák esetében is. Gázokban ez a hatás nem lép fel, a gerjesztett elektron nagy valószínűséggel elhagyja az abszorbeáló atom potenciál terét.

Az előzőekben, a *c)* pontban említettük, hogy a KFS abszorpciós maximumainak félérték szélessége összemérhető a plazma frekvenciával. Nyilvánvaló, hogy akár kristályokban, akár molekulákban egy nagy pozitív töltésű ion nem maradhat meg stabilan, mert a környezetében levő töltések azt azonnal semlegesítik. Azonban a semlegesítés éppen a plazma frekvenciával történik, tehát a pozitív ion élettartamának és a hozzá tartozó kötött állapotok félérték szélességének a plazma frekvenciával azonos nagyságrendűnek kell lenni.

A KFS elektron „shake-off” mechanizmusa alapján az is érthető, hogy nem kapunk KFS-t, ha a gerjesztett elektron ionizációs potenciálja  $\sim 25$  keV-nál nagyobb. Más szóval, ha az abszorpciós él energiája túlságosan nagy. Az ESO ugyanis az erősen perturbált elektron törzs relaxációjának egyik lehetősége. A relaxáció másik lehetősége a keletkezett lyuk direkt rekombinációja, ami fluoreszcens sugárzásban nyilvánul meg [34]. A két folyamat versenye dönti el, hogy melyik észlelhető erősebben.  $P_{\text{ESO}}$ -val jelölve az ESO valószínűségét és  $P_F$ -vel az ún. fluoreszcens hatásfokot, felírhatjuk a következő összefüggést

$$P_F + P_{\text{ESO}} = 1 \quad (15)$$

A fluoreszcens hatásfok a rendszámnak, *Z*-nek monoton növekvő függvénye és a következő alakban írható fel [33]

$$[P_F/(1 - P_F)]^{1/4} = -A + BZ - CZ^3, \quad (16)$$

ahol *A*, *B* és *C* empirikus konstansok.  $P_F$  néhány értéke a *K* héjra vonatkozóan



a következő [33]

$$P_F(Ti) = 0,170$$

$$P_F(Zr) = 0,696$$

$$P_F(W) = 0,945$$

Világos tehát, hogy ha  $Z$  és ezzel együtt az ionizációs potenciál nagy, akkor a fluoreszcens hatások nagy, tehát ritkán jön létre az ESO és a KFS nem lesz észlelhető.

### 3.2. Az elektron „shake-off” valószínűségének meghatározása impulzus közelítésben

Ebben a pontban *Fano* [29] és *Carlson* [34] nyomán röviden leírjuk azokat a legfontosabb lépéseket, amelyek alapján az auto-ionizáció, illetve az elektron „shake-off” valószínűsége kiszámítható.

Az impulzus közelítés abból a feltevésből indul ki, hogy ha egy atom Hamilton-operátora hirtelen  $H_1$ -ről (kezdeti állapot),  $H_2$ -re (végállapot) változik, akkor az atom egy elektronjának időfüggő hullámfüggvényét a kezdeti állapotok és a különböző lehetséges végállapotok átfedési integrálja adja meg. A hirtelen megváltozott Hamilton-operátor és a kezdeti Hamilton-operátor sajátállapotai nem esnek egybe.  $H_2$ -nek lesznek olyan betöltött állapotai, amelyek a  $H_1$  kontinuumába esnek. Ezt másképp úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ezeket az elektronokat az atom „lerázza” magáról (innen az elektron „shake-off” elnevezés). Annak a valószínűsége, hogy egy elektron a  $\psi_i$  kezdeti állapotból egy adott  $\psi_f$  végállapotba menjen át, a következő lesz

$$P_{i \rightarrow f} = \left| \int \psi_f^* \psi_i dt \right|^2. \quad (17)$$

Az elektron „shake-off” ún. monopolus átmenet, ami azt jelenti, hogy a (17) átmeneti valószínűségben a kölcsönhatás operátora az egység operátor. Az ilyen átmenetekre a kiválasztási szabályok a következők:  $\Delta s, \Delta l$  és  $\Delta j=0$ , csak a főkvantumszám változik meg. Ez egyben az auto-ionizáció formális feltétele.

Jelöljük  $P_s$ -sel annak a valószínűségét, hogy az atom egy elektronja ugyanazon a pályán marad. Így annak a valószínűsége, hogy egy elektron nem marad ugyanazon a pályán,  $1 - P_s$ , ha ezen a héjon az elektronok száma  $N$ , akkor annak a valószínűsége, hogy egy héjról legalább egy elektron ionizálódik az elektron „shake-off” következtében  $1 - P_s^N$ .  $Z$ -vel jelölve az atom effektív magtöltését egy adott  $n, l, j$ -vel jellemzett héjon bekövetkező elektron „shake-off” valószínűségét a foto-ionizáció során a következő képlet adja meg [34]

$$P = 1 - \left\{ \left| \int \psi_{nlj}^*(Z+1) \psi_{nlj}(Z) dt \right|^2 \right\}^N - P_F, \quad (18)$$

ahol  $\psi_{nlj}(Z)$  és  $\psi_{nlj}^*(Z+1)$  a kezdeti és végállapot egyelektron hullámfüggvényei és  $P_F$  annak a valószínűsége, hogy egy végállapot betöltött. Ez utóbbiakba való átmeneteket a Pauli-elv tiltja és ezt a fenti módon lehet figyelembe venni.

*Carlson* és munkatársai [34] a (18) képlet alapján a periódusos rendszer valamennyi elemére és minden elektron héjra kiszámították az elektron „shake-off” valószínűségét azzal a feltevessel, hogy a  $K$  héjban keletkezik egy lyuk. Numerikus számításaik eredményét a kísérleti eredmények értelmezésénél fogjuk felhasználni.



### 3.3. Az auto-ionizációs modell és a KFS összevetése

Ahhoz, hogy a KFS abszorpciós maximumait numerikusan ki tudjuk értékelni a következő modell számolást hajtottuk végre.

Az auto-ionizációval keletkező pozitív ion potenciál terét legegyszerűbben egy háromdimenziós, gömbszimmetrikus potenciálvölgygel közelíthetjük.

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 \quad \text{ha } r \leq a \\ \text{és} \quad V(r) &= 0 \quad \text{ha } r > a, \end{aligned} \quad (19)$$

ahol  $V_0$  a potenciálvölgy mélysége és  $a$  a sugara. Ezt beírva a radiális Schrödinger-egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} R''_{\leq} + \frac{2}{r} R'_{\leq} + \left[ \alpha^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{\leq} &= 0, \quad \text{ha } r \leq a \\ R''_{>} + \frac{2}{r} R'_{>} - \left[ k^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{>} &= 0, \quad \text{ha } r > a, \end{aligned} \quad (20)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \\ k^2 &= -\frac{2m}{\hbar^2} E, \end{aligned} \quad (21)$$

$R_{\leq}$  a hullámfüggvény radiális része és  $l$  a mellékkvantumszám. A (20) egyenlet megoldása a következő alakban írható

$$\begin{aligned} R_{\leq}(r) &= b \cdot r^{-1/2} J_{l+1/2}(\alpha r), \quad \text{ha } r \leq a \\ R(r) &= c \cdot r^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(ikr), \quad \text{ha } r > a \end{aligned} \quad (22)$$

ahol  $b$  és  $c$  normálási tényezők és  $J_{l+1/2}(\alpha r)$ , illetve  $H_{l+1/2}^{(1)}(ikr)$  az  $l+1/2$  indexű Bessel, illetve Hankel-függvények [35].

Kihasználva, hogy a hullámfüggvényeknek folytonosan kell átmenni a potenciálvölgy határán,  $l=0$  esetén a következő feltételt kapjuk

$$k = -\alpha \operatorname{ctg}(\alpha a). \quad (23)$$

A (21) és (23) egyenletből új változók bevezetésével a következő transzcendens egyenlethez jutunk

$$\operatorname{ctg} \eta + \frac{(\mu^2 + \eta^2)^{1/2}}{\eta} = 0, \quad (24)$$

ahol

$$\eta = \alpha a \quad \text{és} \quad \mu = \frac{a}{\hbar} (2mV_0)^{1/2}.$$

A potenciálvölgy sajátállapotainak energiáját,  $l=0$  esetén a (24) egyenlet megoldásai adják.



$l > 0$  esetén, az előzőekhez teljesen hasonló módon, a következő transzcendens egyenletek numerikus megoldásai adják meg a potenciálvölgy sajátenergiáit.

$l = 1$  esetén

$$\operatorname{ctg} \eta - \frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{(\mu^2 - \eta^2)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{1}{(\mu^2 - \eta^2)^{1/2}} \right] = 0 \quad (25)$$

$l = 2$  esetén

$$\operatorname{ctg} \eta - \frac{1}{\eta} \left[ 1 - \frac{3}{\eta^2} + \frac{3}{\mu^2 + \eta^2} + \frac{1}{1 + (\mu^2 - \eta^2)^{1/2}} \right]^{-1} = 0 \quad (26)$$

$l = 3$  esetén

$$\frac{\operatorname{ctg} \eta - \frac{1}{\eta}}{\eta + 3 \operatorname{ctg} \eta - \frac{3}{\eta}} - \frac{5}{\eta^2} - \frac{5}{\mu^2 - \eta^2} - \frac{1 + (\mu^2 - \eta^2)^{1/2}}{1 + \mu^2 - \eta^2 - 3(\mu^2 - \eta^2)^{1/2}} = 0 \quad (27)$$

és így tovább.

A (24)–(27) transzcendens egyenletek gyökeinek numerikus meghatározásához számítógép programot készítettünk az MTA Számítástechnikai Központja CDC típusú számítógépére.

A numerikus számolás eredményéből jól látható, hogy a potenciálvölgy sajátenergiái, rögzített  $V_0$  mellett a potenciálvölgy szélességének a függvényében egy sima görbe mentén fekszenek. Így egy-egy rögzített  $V_0$  értékhez az 5. ábrán látható nomogramokat készítettünk. Egy-egy abszorpciós él KFS-e abszorpciós maximumainak energiáját megfelelő léptékben ábrázolva meghatároztuk a legjobb fittelést. A grafikus fittelés eredményét a kísérleti eredmények kiértékelésénél írjuk le részletesebben.

## 4. KÍSÉRLETI RÉSZ

### 4.1. Vizsgálandó anyagok

Vizsgálatainkat a következő anyagokon végeztük el: Mo,  $\text{MoO}_3$ ,  $\text{M}_8\text{O}_{23}$ ,  $\text{Mo}_4\text{O}_{11}$  és  $\text{MoO}_2$ -on.

Valamennyi anyagminta az Egyesült Izzó Kutató Laboratóriumában készült. Ezúton is szeretnék köszönetet mondani *Gadó Pálnak* amiért ezeket az értékes anyagokat rendelkezésemre bocsátotta.

### 4.2. Hajlított kristályos spektrográf

A méréseket egy saját építésű, hajlított kristályos Cauchois típusú [36] spektrográffal végeztük. A spektrográf működésének elvi sémája a 6. ábrán látható. A fókuszáló vagy Rowland-kör átmérője, ami megegyezik a kristály görbületi sugarával,  $R = 400$  mm. Az úgynevezett érintő kör sugara  $R \cdot \sin \varepsilon$ , ahol  $\varepsilon$  a kristályra eső röntgen nyaláb legnagyobb divergenciája. Fókuszáló kristályként csillámot használtunk, olyan metszetben, hogy a 100 indexű hálózati síkok álltak reflexiós helyzetben.

A kristályra eső nyaláb divergenciáját egy, a beeső nyaláb útjába helyezett rés határozta meg. Ennek a résnek a szélességét kb. 4 mm-re választottuk, így a leg-

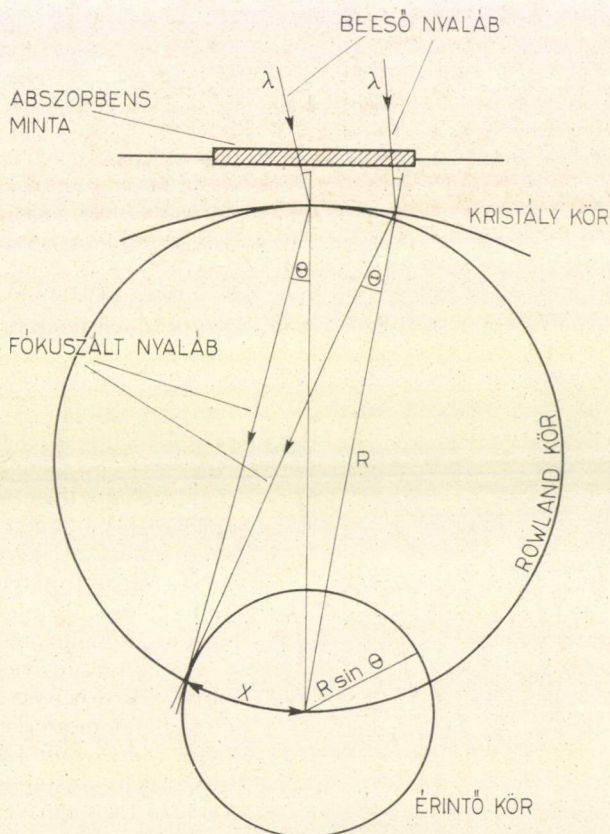


nagyobb divergencia  $1/2^\circ$  volt. A Cauchois-spektrográf működési elve a következő: a fókuszáló kristály bármely pontjára eső sugárnyalázból az azonos hullámhosszú sugarak a Rowland-kör egyetlen pontjához fókuszálódnak. Ez egzakt módon csak a kristály-kör és a Rowland-kör közös érintési pontjában teljesül. Jól teljesül azonban ettől a ponttól nem túl messze is. Ennek megfelelően a nyaláb-divergencia meghatározásánál két dolgot kell szem előtt tartani. Amennyiben a beeső nyaláb átmérőjét nagyra választjuk, elromlik a fókuszálás feltétele, ha túl szűkre választjuk, akkor a spektrográf fényereje csökken le nemkívánatos módon. Az előbb említett 4 mm-es rés jó fókuszálást és nagy fényerőt biztosít.

A röntgen spektrum regisztrálása forografikusan történt, a Rowland-kör ívére hajlított röntgen filmen.

#### 4.3. Az abszorpciós spektrum regisztrálása

Az abszorpciós él spektrális intenzitás eloszlásának a regisztrálásához homogén intenzitáseloszlású fehér röntgen sugárzásra van szükség. Ennek megfelelően



5. ábra. A Cauchois típusú, hajlított kristályos röntgen spektrográf elvi sémája.





6. ábra. Egy eredeti röntgen felvétel nagyított képe (kb. 30-szoros lineáris nagyítás). Az éles kontraszt az abszorpciós él. A sötét mezőben a halvány csíkok az abszorpciós maximumok, illetve minimumok.

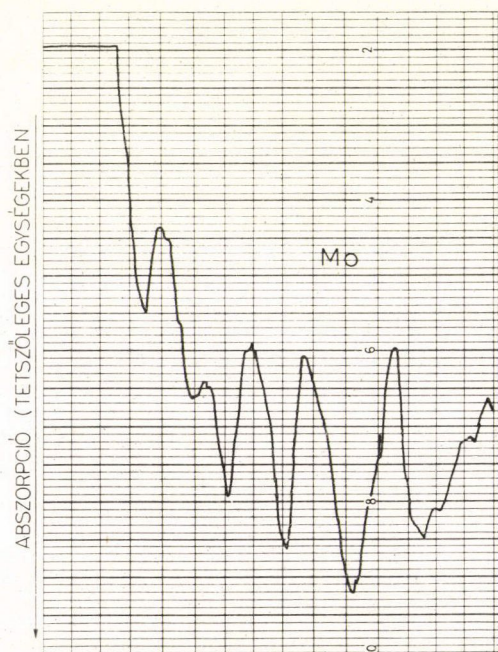
röntgen sugárforrásként olyan antikatódú röntgen csövet választottunk, amelynek nincsenek emissziós vonalai a vizsgált abszorpciós él hullámhosszának közvetlen közelében. A W fehér sugárzása a legintenzívebb a használatos röntgen csövek között, továbbá a W L emissziós vonal sorozata elég távol esik a Mo K abszorpciós élétől, ezért sugárforrásként W antikatódú röntgen csövet használtunk. A W K emissziós

sorozata nem jelent meg az alacsony (40 kV) gerjesztési feszültség miatt.

A vizsgálandó mintákat, az 5. ábrán feltüntetett módon, a spektrográf belépő rése előtt helyeztük el. Valamennyi kristályt por alakban vizsgáltuk. A finomra őrölt port celluxon, a lehető legvékonyabban és egyenletesen elterítettük, majd néhány ilyen réteget egymásra ragasztva homogén effektív vastagságú mintákat kaptunk. Az egymásra ragasztott rétegek számának változtatásával jól be lehetett állítani az optimális minta vastagságot.

Túlságosan vastag, illetve vékony abszorbens esetén az abszorpciós él finom szerkezete nem észlelhető. Sandström [28] az optimális abszorbens vastagságra,  $d$ -re a következő formulát vezette le

$$d = \frac{\ln \tau_1 - \ln \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}, \quad (28)$$



7. ábra. Egy eredeti fotométer görbe.



ahol  $\tau_1$  és  $\tau_2$  az anyag lineáris abszorpciós együttthatója az abszorpciós él két oldalán. Tiszta Mo esetén a minta effektív vastagságát néhány mikronnak, Mo oxidok esetén 1—2 mikronnak választottuk. A minták vastagságát tömegméréssel ellenőriztük.

Az abszorpciós spektrumok rögzítéséhez D7 és D10 típusú, Agfa Gaevert röntgen filmet használtunk. Különösen a D7 típusú film finom szemcsézettsége nagy felbontóképességet tett lehetővé. Mint a röntgen filmek általában, az általunk használt filmek is mindkét oldalukon rendelkeztek fényérzékeny emulzióval.

Az 5. ábrán látható, hogy a röntgen sugarak a film érintősíkjára nem merőlegesen érkeznek és így a két fényérzékeny rétegen keletkezett kép egymáshoz képest eltolva jelenik meg. Ennek a parallaxis hibának az elkerülése végett a film „hátsó” oldaláról az emulzió réteget NaOH oldattal lemostuk, úgy, hogy a hordozó celluloid réteg ne sérüljön meg. Az így előkészített filmet egy Zeiss gyártmányú automatikus regisztrálású „Schnell Photometer”-en fotometráltuk. A regisztrálópapír és a filmet tartó tárgyasztal relatív sebességét úgy állítottuk be, hogy nagyjából 100-szoros nagyításban kaptuk meg a röntgen spektrum intenzitás eloszlását. A 7. ábrán a tiszta molibdén egy eredeti fotométer görbéje látható.

#### 4.4. Az abszorpciós spektrumok kiértékelése

A röntgen felvételen megjelentek a sugárforrásként használt röntgen cső antikatódjának emissziós vonalai is. Az emissziós vonalakat *Sandström* [37] hullámhossz táblázatai alapján azonosítottuk. Így az ismert hullámhosszú emissziós vonalak segítségével kalibrálni lehetett az abszorpciós spektrumok hullámhossz, illetve energia skáláját.

A wolfram emissziós vonalainak  $L$  sorozata túlságosan távol esett a Mo  $K$  abszorpciós élétől, ahhoz, hogy azok alapján lehessen kalibrálni a hullámhossz skálát. Ezért minden felvételre először W csővel 6—8 órát exponáltunk, ezzel előállítva az abszorpciós él spektrumát. Majd ezután eltávolítva az abszorbenst, a W cső helyére pedig Mo csövet helyezve, 5—6 perces expozíciós idővel ráexponáltuk a felvételre a Mo emissziós vonalait. A röntgen csövek cseréje alatt a spektrográf érintetlenül maradt, ami biztosította a két spektrum megfelelő átfedését. A Mo emissziós vonalai a  $K$  abszorpciós él hosszú hullámhosszú oldalára esnek és így nem zavarják az abszorpciós él másik oldalán levő finom szerkezetet.

A hullámhossz skála kalibrálásához a molibdén emissziós vonalainak  $L$  sorozatából a következőket használtuk fel [37]

$$KM_{II}\beta_3 \quad 631,543XU \quad 19590,43 \text{ eV}$$

$$KM_{III}\beta_1 \quad 630,978XU \quad 19607,97 \text{ eV}$$

$$KN_{III}\beta_2 \quad 619,698XU \quad 19966,50 \text{ eV},$$

ahol  $XU$  a hullámhossz röntgen egysége ( $1000 XU = 1,00202 \text{ \AA}$ ).

Az abszorpciós él helyének pontos meghatározását a fotometrált görbékben grafikusan végeztük el. Az abszorpciós él két oldalán a legnagyobb és legkisebb intenzitás számtani közepét választottuk az él helyének. Ily módon a Mo abszorp-



ciós élének általunk mért hullámhossza a következő

$$\begin{aligned}\lambda &= 618,50 \pm 0,1 XU \\ E &= 20003,5 \pm 1 \text{ eV}\end{aligned}\quad (29)$$

Ez jól egyezik az irodalmi értékkel, amely Ross-tól [38] származik

$$\begin{aligned}\lambda &= 618,52 \pm 0,02 XU \\ E &= 20002,9 \pm 0,5 \text{ eV}.\end{aligned}\quad (30)$$

#### 4.5. A spektrográf felbontóképessége és diszperziója, mérési pontosság

Az 5. ábra jelöléseit használva a spektrográf felbontóképességét a következő módon határozhatjuk meg. Az analízátor kristályra írjuk fel a Bragg-egyenletet

$$n\lambda = 2d \sin \Theta. \quad (31)$$

A fókuszáló körön mért távolság, kis szögek esetén a következő

$$x = R \sin \Theta. \quad (32)$$

A fenti két egyenletből

$$\Delta\lambda = \frac{2d}{nR} \Delta x. \quad (33)$$

$\Delta x$  helyére beírva azt a legkisebb távolságot, amely még mérhető a röntgen felvételen, megkapjuk a hullámhosszra vonatkozó felbontóképességet. Az általunk használt csillámra  $2d=8,48 \text{ \AA}$ . A röntgen felvételtől készített 100-szoros nagyítású fotométer görbén 1 mm volt a legkisebb, jól mérhető távolság, így  $\Delta x=10^5 \text{ \AA}$ . Végül  $R=4 \cdot 10^9 \text{ \AA}$  és  $n=3$ , ugyanis az abszorpciós spektrumokat 3. rendben regisztráltuk. Ezeket az értékeket (33)-ba beírva a felbontóképesség

$$\Delta\lambda = 7 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}. \quad (34)$$

A spektrográf diszperziójának neveztük a következő két mennyiséget

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta x} \text{ és } \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta x}, \quad (35)$$

ahol  $\Delta x$  a fotométer görbén mért távolság és  $\Delta\varepsilon$  az ennek megfelelő hullámhossz, illetve energia különbség, röntgen egységben ( $XU$ ), ill. eV-ban.  $\Delta\lambda/\Delta x$ -et a Mo  $K\beta_1$  és  $K\beta_2''$  emissziós vonalak távolságából határoztuk meg.  $\Delta\varepsilon/\Delta x$  ebből már kiszámítható az

$$\varepsilon = h\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (36)$$

kifejezéssel, ahol

$$c = 12372,2 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot XU.$$

Ennek alapján a spektrográf energia diszperziója

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta x} = 3,10 \frac{\text{eV}}{\text{mm}}. \quad (37)$$



A fentiek alapján a hullámhossz mérés pontossága jobb, mint  $0,1 \text{ XU}$ , illetve  $10^{-4} \text{ \AA}$  és az energia mérés pontossága  $1\text{--}2 \text{ eV}$ .

Az abszorpciós spektrumok KFS-ének reprodukálhatóságát a következő módon ellenőriztük. Valamennyi anyagról 6—6 független röntgen felvételt készítettünk és minden felvételt a 6. ábrán látható módon 3—3 különböző helyen fotometráltunk. Így egy-egy anyagnak legalább 18 fotométer görbe alapján rajzoltuk meg az abszorpciós spektrumát. Csak olyan szingularitásokat vettünk figyelembe, amelyek szignifikánsan reprodukálódtak.

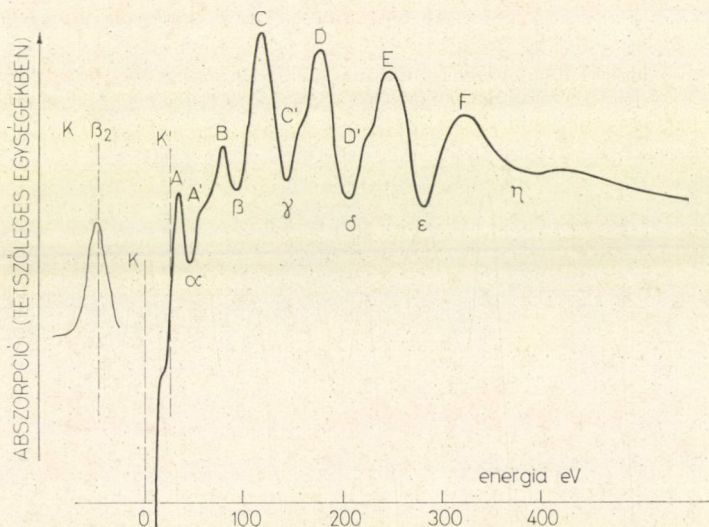
## 5. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK ÉS ÉRTELMEZÉSÜK

### 5.1. Mérési eredmények

#### 5.1.1. A tiszta Mo abszorpciós éle

A Mo K abszorpciós élének KFS-e a 8. ábrán látható. Az abszorpciós él intenzitás eloszlását, az ún. Kossel-szerkezetet a 11. ábra mutatja.

Az abszorpciós él helyét K-val jelöltük, egyben azt választottuk az energia skála nulla pontjának. A görbe relatív egységekben ábrázolja az abszorpciós együtthatót. A K-val jelölt fő abszorpciós él mellett egy mellék abszorpciós él látható, amelyet K'-vel jelöltünk. A KFS abszorpciós maximumait A, B, C...-vel, minimumait  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ -val jelöltük. Az A', C' és D' inflexiók pontokat, bár nem mint különálló



8. ábra. A tiszta Mo K abszorpciós élének KFS-e. K-val jelöltük a fő abszorpciós él helyét és ezt választottuk az energia skála kiindulási pontjának. K' egy mellék abszorpciós él,  $K\beta_2$  a molibdén  $K\beta_2$  emissziós vonala, amelyet az energia skála kalibrációjához használtunk. A nagy betűk jelentik az abszorpciós maximumokat, a görög betűk a minimumokat.







maximumok jelentek meg, mégis figyelembe kell venni, mert valamennyi fotométer görbén szignifikánsak voltak. Az abszorpciós maximumok és minimumok energiáját, a *K* éltől számítva, a 2. táblázatban tüntettük fel.

A  $\text{MoO}_2$  esetében az abszorpciós maximumok, illetve minimumok energiáját a  $\text{MoO}_2$  *K* éléhez képest mértük. A *K* él eltolódását viszont a tiszta Mo *K* éléhez viszonyítottuk. Tehát  $\text{MoO}_2$ -ban pl. az *A*-val jelölt maximum a tiszta Mo *K* éltől számítva 31,5 eV-ra van.

5.1.2. Mo-oxidok abszorpciós éle

2. TÁBLÁZAT

A Mo és a Mo-oxidok KFS-nek abszorpciós maximumai és minimumai a *K* éltől számítva eV-ban. A számított értékeket a 3.3. pontban leírt modellpotenciál segítségével kaptuk.

	Mo		$\text{MoO}_2$		$\text{MoO}_3$ csoport	
	mért	számolt	mért	számolt	mért	számolt
<i>K</i>	0		11,5		0	
<i>K'</i>	27		—		14	
<i>A</i>	37		20		34	
	49		48		67	
<i>A'</i>	59	58				
<i>B</i>	80	78	87	87	92	—
	96		125			
<i>C</i>	120	118	155	151	120	—
	137					
<i>C'</i>	162	—				
<i>D</i>	187	190				
	205					
<i>D'</i>	224	221				
<i>E</i>	252	254				
	283					
<i>F</i>	322	320				
	360					

A Mo-oxidokban a Mo *K* abszorpciós élének KFS-ét a 9. és 10. Kossel szerkesztét pedig a 11. ábra mutatja. A 9. ábráról jól látható, hogy a Mo-oxidok KFS-e sokkal szűkebb energia tartományra terjed ki, mint a Mo-é. A  $\text{MoO}_2$  KFS-ben két élesen szétváló abszorpciós maximum található, míg a  $\text{MoO}_3$  KFS-ben csak egy maximum és egy inflexiós pont van. A 10. ábra jól mutatja, hogy a  $\text{Mo}_4\text{O}_{11}$  és  $\text{Mo}_8\text{O}_{23}$  oxidok KFS-e a mérési pontosság határain belül azonos a  $\text{MoO}_3$  KFS-vel. A 11. ábrán látható továbbá, hogy a Mo-ra és  $\text{MoO}_3$ -ra jellemző *K'* mellék él a  $\text{MoO}_2$ -ben jelenik meg. Ezzel szemben a  $\text{MoO}_2$  fő éle, *K* jelentősen eltolódik a tiszta Mo *K* éléhez képest. Az eltolódást a 3. táblázatban tüntettük fel.

3. TÁBLÁZAT

Az abszorpciós élek eltolódása a tiszta Mo *K* éléhez képest eV-ban

	Mo	$\text{MoO}_2$	$\text{MoO}_3$
<i>K</i>	0	11,5	0
<i>K'</i>	27	—	14



## 5.2. Az abszorpciós spektrumok értelmezése

### 5.2.1. A tiszta Mo K abszorpciós finom szerkezete

A Mo K-val jelölt fő abszorpciós éle (l. 11. ábra) megadja a K héj ionizációs potenciálját. A Mo 4d típusú átmeneti fém, amelynek a vezetési sávjába az  $s-p$  hibridizáció következtében  $p$  szimmetriájú állapotok keverednek. Az  $s-p$  átfedés teszi lehetővé, hogy az  $1s$  elektronokat közvetlenül a Fermi-nívó fölé, a vezetési sávba lehet gerjeszteni és teljesülhet a  $\Delta l = +1$  kiválasztási szabály. A  $K'$ -val jelölt mellék abszorpciós él az  $1s-np$ ,  $n \geq 5$  dipól átmeneteknek felel meg. E szerint az  $np$  ( $n \geq 5$ ) sávok állapotsűrűségének a maximuma 27 eV-al a Fermi-nívó felett van.

Az abszorpciós spektrum A-val jelölt első maximuma az összes  $1s \rightarrow np$  dipól átmenetek felső határát adja meg.

A Mo KFS-nek az abszorpciós maximumait a 3.3. pontban leírt gömbszimmetrikus modell potenciál sajátállapotaival hasonlítottuk össze. A fitteléshez használt nomogram a 4. ábrán látható.

A mért és számolt abszorpciós maximumok összehasonlítása a 2. táblázatban található. Az egyezés a mérési hibán belül nagyon jónak mondható. A  $C'$ -vel jelölt abszorpciós maximum nem található meg a számolt értékek között. Ennek valószínűleg az az oka, hogy a  $C'$  nem egy különálló maximum, hanem csak  $C$ -nek egy kiszélesedése.

A grafikus fittelés eredményeképpen a modell potenciál mélysége  $V_0 = 350$  eV, sugara  $a = 0,7$  Å. Ez utóbbi nagyságrendben jól összeegyeztethető a Mo ionsugarával  $r_i = 1,3$  Å. Az, hogy  $a < r_i$  érthető, ugyanis az auto-ionizációval keletkező sokszorosan pozitívan töltött ion sugara kisebb, mint a semleges atomé.

A fitteléshez készített nomogramok összehasonlításából kiderült, hogy a modell potenciál mélységétől alig függ az egyes saját állapotok energiája. Ez azt jelenti, hogy a  $V_0 = 350$  eV értéknek 20–25 %-os bizonytalansága van.

A  $V_0$  értékében megengedhető ilyen nagy bizonytalanság teszi lehetővé azt, hogy a KFS egyáltalán észlelhető. Ugyanis, egy-egy foto-ionizációs aktus esetén az auto-ionizáció mértékét egy jól definiált statisztika határozza meg [31, 32]. Más szóval, az „elektron shake-off”-al keletkező pozitív ion töltése egy jól meghatározott várható értékű és félérték szélességű eloszlás szerint változik. Azonban az előzőek miatt az egyes foto-ionizációs folyamatokhoz tartozó különböző mélységű potenciálok saját állapotai megegyeznek egymással.

Mo esetén az „elektron shake-off” valószínűségét (%-ban) a 4. táblázat tartalmazza [34]. Carlson számításai közvetlenül a  $\beta$  bomlásra vonatkoznak, de a röntgen fotoionizációkor bekövetkező „elektron shake-off” valószínűségét a következő képlet adja meg [34]

$$P_f = P_\beta \frac{[\Delta Z_{\text{eff}}(f)]^2}{[\Delta Z_{\text{eff}}(\beta)]^2}, \quad (38)$$

ahol  $\Delta Z_{\text{eff}}(f)$  és  $\Delta Z_{\text{eff}}(\beta)$  az effektív magtöltés változás, melyet a kérdéses elektron érez a foto-ionizáció, illetve a  $\beta$  bomlás hatására. A kétfajta effektív magtöltés alig tér el egymástól, ezért  $P_f$  és  $P_\beta$ , a foto-ionizáció és béta bomlás ESO valószínűségei gyakorlatilag azonosnak vehetők.



## 4. TÁBLÁZAT

Az „elektron shake-off” valószínűsége  $P_{\text{ESO}}$  (%-ban) Mo esetében, ha a K héjban keletkezik egy lyuk [34].

Alhéj	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d
$P_{\text{ESO}}$	0,054	0,13	0,24	0,30	0,84	1,48	1,08	3,90	10,0

A 4. táblázatból látható, hogy az ESO valószínűsége a külső 3d, 4s, 4p és 4d pályákra a legnagyobb. Feltételezve, hogy a 4d és 5s sáv teljesen ionizálódik, a következő, 4p elektron kilépési munkája 250 eV [39]. Ez nagyságrendben jól összeegyeztethető az általunk számolt modell-potenciál mélységével.

## 5.2.2. A Mo K abszorpciós finom szerkezete a Mo-oxidokban

5.2.2.1. A  $\text{MoO}_3$  csoport

Ebbe a csoportba soroltuk a következő Mo-oxidokat:  $\text{Mo}_4\text{O}_{11}$ ,  $\text{Mo}_8\text{O}_{23}$  és  $\text{MoO}_3$ . Mindhárom oxid abszorpciós élében megtalálható ugyanaz a törés, mint a tiszta Mo-éban. A fő és mellék abszorpciós élek, K és K' különbsége 14 eV, ami kisebb, mint Mo-ban. A K' mellék él ebben az esetben is az  $1s \rightarrow np$  ( $n \geq 5$ ) dipól átmenetnek felel meg. A K és K' különbségek csökkenése a Mo-hoz képest azt jelenti, hogy a 4d–5p sávok közelebb kerültek egymáshoz. Ugyanakkor a 4d–5s sáv a Mo-hoz hasonlóan betöltetlen marad. Ezt igazolja az, hogy a fő él, K a mérési hibán belül nem tolódott el a tiszta Mo fő éléhez képest (l. 11. ábrát és 3. táblázatot). Ugyanezt a sávmodellrel igazolja a  $\text{MoO}_3$  csoportra vonatkozó számos egyéb tapasztalat. Kihlborg [40] a  $\text{Mo}_4\text{O}_{11}$  és  $\text{Mo}_8\text{O}_{23}$  oxidok vezetőképségének hőmérséklet függéséből arra a következtetésre jutott, hogy azok fémes tulajdonságúak. Ez összhangban van az abszorpciós él alapján kapott sáv modellel.

A  $\text{MoO}_3$  csoport KFS-e viszonylag kis energia tartományra terjed ki és összesen három abszorpciós maximumból áll. Az első maximum az összes  $1s \rightarrow np$  ( $n \geq 5$ ) dipól átmenetek felső határát adja meg, hasonlóan a tiszta Mo-hoz. A másik kettő, B és C (l. 10. ábrát) elég közel van egymáshoz, nem is válnak szét. A gömbszimmetrikus modell potenciállal ezt a KFS-et nem lehetett jól fittelni. Ez érthető is, mert ebben az esetben, amikor csak egy-két saját állapotot kell meghatározni, lényegessé válik a potenciál alakja.

5.2.2.2. A  $\text{MoO}_2$  finom szerkezete

A  $\text{MoO}_2$ -ban eltűnik az abszorpciós él törése, egyetlen fő él marad meg, amelynek az eltolódása a nagyobb energiák felé 11,5 eV a tiszta Mo K éléhez képest (l. 10. ábrát és 3. táblázatot). A KFS három jól különálló abszorpciós maximumot tartalmaz (l. 2. táblázatot).

Az abszorpciós él eltolódásából és abból, hogy a Mo és  $\text{MoO}_3$ -nál tapasztalt törés eltűnt a következő sáv modellt konstruáltuk. A  $\text{MoO}_2$ -ban a 4d–5s sáv betöltött részének a teteje egybe esik a Fermi-nívóval és jelentősen csökken az 5p sávval való átfedése. A K él az  $1s \rightarrow np$  ( $n \geq 5$ ) dipól átmenetnek felel meg. Ezeknek a felső határát adja meg az első abszorpciós maximum, A.



A  $\text{MoO}_2$  KFS-e nagyobb energia tartományra terjed ki, mint a  $\text{MoO}_3$  csoporté. A  $B$  és  $C$  abszorpciós maximumokat jól tudtuk fittelni a gömbszimmetrikus modell potenciállal. A fittelés eredménye a 2. táblázatban található. A modell potenciál mélységére  $V_0 = 160$  eV-ot, sugarára  $r = 0,49$  Å-t kaptuk.

### 5.2.3. A kémiai kötés hatása az ESO valószínűségére

Az eddigiekből látható, hogy tiszta Mo esetén a KFS fitteléséből viszonylag mély,  $\text{MoO}_2$  esetén közepes mélységű potenciált kaptunk. Az  $\text{MoO}_3$  csoport KFS-t nem sikerült ilyen egyszerű feltevések mellett fittelni. Az auto-ionizációs modell alapján ez azt jelenti, hogy az ESO a tiszta Mo-ban lép fel legerősebben,  $\text{MoO}_2$ -ben közepesen és a  $\text{MoO}_3$  csoportban a leggyengébben. Ez azonnal világossá válik, ha megvizsgáljuk az ESO valószínűségének (18) képletét. Ebben a kifejezésben az átfedési integrál játssza a döntő szerepet. Ennek az értéke azonosan egyenlő eggyel, ha az elektron által érzett effektív magtöltés nem változik, ilyenkor ugyanis nincs ESO. Vizsgáljuk meg az ESO valószínűségét egy olyan elektron állapotra, amely részt vesz a kémiai kötésben. Az ilyen elektron hullámfüggvénye közös saját állapota annak a két atomnak, amelyek között a kémiai kötés létrejön. Amennyiben ezen két atom különböző rendszámú — mint ahogy ilyen a Mo-oxidokban egy molibdén és egy oxigén atom — akkor a kémiai kötésben résztvevő elektron állapotra felírható a következő összefüggés

$$\psi(Z - \Delta Z) \cong \psi(Z), \quad (39)$$

ahol a  $\Delta Z$  a két atom rendszámainak a különbsége. Mo-oxidokban  $Z = 42$ ,  $Z - \Delta Z = 8$ , illetve  $Z = 34$ . A (39) és (18) kifejezéseket összevetve látható, hogy az ESO valószínűsége nagyon erősen lecsökken, esetleg zérussá válik olyan elektron állapotokra, amelyek két egymástól lényegesen különböző rendszámú atom között létesítenek kémiai kötést. Ugyanis, ha (39) teljesül, akkor a hullámfüggvény érzéketlen lesz arra, hogy  $Z$  1-el megváltozik, és (18)-ban az átfedési integrál közel eggyel lesz azonos.

A fenti megfontolást a következő módon alkalmazhatjuk a Mo-oxidokra.

A  $\text{MoO}_2$ -ban az abszorpciós él eltolódásából következik, hogy a  $4d-5s$  sáv a Fermi-nívó alatt van, továbbá mivel a KFS szélesebb energia tartományra terjed ki, mint a  $\text{MoO}_3$  csoportban, a  $4d$  pályák, amelyekre az ESO valószínűsége a legnagyobb (l. a 4. táblázatot), nem vesznek erősen részt az oxigénnel való kötésben. Ez összhangban áll a  $\text{MoO}_2$ -on végzett elektromos és mágneses vizsgálatok eredményeivel. Vickery és Hipp [41] a  $\text{MoO}_2$ -t diamágnesesnek és  $n$  típusú félvezetőnek találták. A  $\text{MoO}_2$  diamágnesessége meglepő, ugyanis a vele izoelektron szerkezetű  $\text{CrO}_2$  ferromágneses. Azonban az általunk kapott eredmények, melyek szerint  $\text{MoO}_2$ -ben a  $4d$  sávok mélyen fekszenek a Fermi-nívó alatt, alátámasztják ezt az eredményt. Az abszorpciós él eltolódása pedig összhangban van azzal, hogy a  $\text{MoO}_2$  félvezető.

A  $\text{MoO}_3$  csoport esetében a KFS viszonylag szűk energia tartományra terjed ki. Ez azt jelenti, hogy az ESO valószínűsége erősen lecsökken, tehát a  $4d$  pályák nagymértékben résztvesznek az oxigén ligandokkal való kémiai kötésben. Mint már említettük, Kihlborg [40] elektromos mérései alapján a  $\text{MoO}_3$  csoport fémes tulajdonságú, ami összhangban áll a fenti sáv modellel.



A kémiai kötésnek az ESO valószínűségére gyakorolt hatását a következőkben foglalhatjuk össze.

A  $\text{MoO}_2$ -ban a  $4d$  pályák a Fermi-nívó alatt fekszenek, ezeknek nem nagy az átfedése az oxigén ligandok valencia elektronjaival, tehát a (39) kifejezés ezekre a pályákra gyengén teljesül, az ESO valószínűsége nem zérus. A KFS ennek megfelelően közepes energia tartományra terjed ki. Ezzel a képpel összhangban áll a  $\text{MoO}_2$  diamágnessége [41].

A  $\text{MoO}_3$  csoportban a  $4d$  pályák átmetszik a Fermi-nívót, erősen részt vesznek az oxigén ligandokkal való kötésben, tehát a (39) kifejezés jól teljesül ezekre a pályákra. Az ESO valószínűsége a  $4d$  pályákra közel zérus, az ESO zömét a mélyebben fekvő  $3d$ ,  $4s$  és  $4p$  pályák járuléka adja (l. 4. táblázatot), ezekre viszont az ESO valószínűsége eleve kisebb. A KFS tehát ebben az esetben terjed a legszűkebb energia tartományra. A  $\text{MoO}_3$  csoport fémes tulajdonsága [40] alátámasztja ezt a sávképet.

Tiszta Mo esetében a (39) kifejezésnek nincs értelme, mert minden atom azonos rendszámú, tehát az ESO valószínűsége minden pályára a legnagyobb értéket veszi fel, függetlenül attól, hogy egy pálya részt vesz-e kémiai kötésben vagy sem. Világos tehát, hogy a KFS tiszta Mo-ban terjed a legszélesebb energia tartományra.

## ÖSSZEFOGLALÓ

A dolgozatban leírtunk egy olyan új, ún. „auto-ionizációs” modellt, amelynek a segítségével értelmezni tudtuk a röntgen abszorpciós élek KFS-ét. A modell főbb tulajdonságait a következőkben foglalhatjuk össze.

A röntgen foton abszorpciója rendkívül erős perturbációt jelent az abszorbeáló atom számára. A fotont elnyelő elektron mélyen fekvő törzs állapotból valamilyen jól definiált kinetikus energiával kiszabadul az atomból. A KFS-ben észlelhető abszorpciós fluktuációk elvileg az így kilökött elektron átmeneti valószínűségével és a végállapotok állapotsűrűségével lesznek arányosak. Azonban könnyen belátható, hogy a végállapotok állapotsűrűsége nem okozhat ingadozást az abszorpcióban, ugyanis a KFS általában néhány száz eV-ra terjed ki és ez a tartomány minden kristályos anyagban messze a kontinuumban van, ahol az állapotsűrűség állandó. Tehát föltétlenül az átmeneti valószínűségben kell keresni a KFS okát.

Figyelembe véve, hogy a röntgen foton elnyelése erős és gyors perturbációt okoz az abszorbeáló atomban, az atom állapotát kvantummechanikailag helyesen az ún. impulzus közelítés (más néven „sudden approximation”) írja le. Ebben a közelítésben a perturbálatlan atom  $H_0$  Hamilton-operátora hirtelen  $H_1$ -re változik meg, ahol jelen esetben  $H_1$  egy olyan atom Hamilton-függvénye, amelyben a kilökött elektron fölött fekvő elektron állapotokra az effektív magtöltés eggyel nagyobb, mint  $H_0$ -ban. Ennek a leírásnak az egyik fő következménye, hogy az eddig a  $H_0$ -ban kötött törzselektron állapotok véges valószínűséggel lesznek a  $H_1$  kontinuumában. Más szóval a  $H_1$  kontinuum állapotai nem lesznek ortogonálisak a  $H_0$  kötött állapotaira. Ez fizikailag azt eredményezi, hogy az abszorbeáló atom véges valószínűséggel elveszti a törzs elektronjait, azokat mintegy lerázza magáról (innen az „elektron shake-off” elnevezés). Ezt a jelenséget auto-ionizációnak neveztük.

A röntgen foton által kilökött elektron végállapotát az így keletkezett, sokszorosan pozitív töltésű ion határozza meg. Amennyiben a kilökött elektron kine-



tikus energiája megegyezik a pozitív ion egy be nem töltött kötött állapotával, úgy abszorpció maximumot, ellenkező esetben minimumot kell észlelnünk a KFS-ben.

Az auto-ionizációval keletkező pozitív iont úgy foghatjuk fel, mint az abszorbeáló atomnak valamilyen közbenső, nem stacionárius állapotát, amelyet természetesen a kristály vezetési, vagy vegyérték elektronjai azonnal semlegesítenek. A semlegesítés a plazma frekvenciával történik, ami összhangban áll azzal a tapasztalattal, hogy a KFS-ben az abszorpció maximumok félérték szélessége 10–20 eV.

Az auto-ionizáció egyben az erősen perturbált atom elektron törzsének egyik relaxációs mechanizmusa. Ez a relaxációs mechanizmus versenyben áll a fluoreszcens sugárzással és amint a fluoreszcens hatásfok megnő, lecsökken az auto-ionizáció valószínűsége. Ez megegyezik azzal a tapasztalattal, hogy mélyen fekvő elektron állapotokra a KFS nem figyelhető meg, ui. ezekre a fluoreszcens hatásfok nagyobb.

Az auto-ionizációs modell arra is magyarázatot adott, hogy egyatomos gázokban miért nem figyelhető meg KFS. Ebben az esetben ugyanis a kilökött elektron szabadon elhagyhatja az atom potenciáletterét, míg kristályos anyagokban a szomszédos atomok elektronfelhői a Coulomb-taszítás révén visszatartják az elektront és a fenti mechanizmus szerint játszódik le az abszorpció.

Ezzel természetesen nem azt állítjuk, hogy az auto-ionizáció gázokban nem fordul elő, hiszen gázok esetében az „elektron shake-off” jól ismert jelenség [31, 32],

## 5. TÁBLÁZAT

Az irodalomból vett (42, 23) abszorpciós finomszerkezetek összehasonlítása a 3.3. pontban leírt gömbszimmetrikus modell-potenciál sajátértékeivel

Abszorpció maximumok eV-ban	Vizsgált anyagok							
	Cu		Ti		Mn		Fe	
	mért	fitt.	mért	fitt.	mért	fitt.	mért	fitt.
<i>A</i>	26	25	22	23	22	22	23	25
<i>B</i>	34	31	39	41	61	60	48	46
<i>C</i>	57	52	79	83	83	89	85	86
<i>D</i>	78	85	128	129	105	106	112	114
<i>E</i>	103	102	193	191	148	146	140	138
<i>F</i>	122	124						
<i>G</i>	143	151						
<i>H</i>	170	—						
<i>J</i>	204	208						
<i>K</i>	214	—						
<i>L</i>	235	222						
<i>M</i>	262	287						

	Fittelési paraméterek			
$V_0$ (eV)	300	250	190	250
$a$ (Å)	1,10	1,16	1,30	1,0



csupán a KFS nem figyelhető meg. A szabad atomoknál észlelhető auto-ionizációt kiterjesztettük kristályos anyagokra, amelyekben ez a KFS-en keresztül jelenik meg.

Ezek alapján a kristályos anyagok KFS-ének a tanulmányozásával a bennük lejátszódó auto-ionizációt vizsgálhatjuk.

Az auto-ionizációs modell alapján a kémiai kötésnek a KFS-re gyakorolt hatása is világossá válik. Az auto-ionizáció mértékét az „elektron shake-off” valószínűsége határozza meg. Az ESO valószínűsége a kémiai kötésben résztvevő vegyérték elektronokra a legnagyobb [34] és nyilvánvalóan függ a kémiai kötés természetétől. Abban az egyszerű esetben, amikor a szomszédos atomok rendszáma erősen eltérő, mint például a Mo-oxidokban, egyszerű magyarázatot tudtunk adni a KFS kvalitatív tulajdonságaira.

Az auto-ionizációs modell kvantitatív kiértékeléséhez numerikusan kiszámítottuk egy  $V_0$  véges mélységű,  $a$  sugarú gömbszimmetrikus modell potenciál sajátértékeit. A tiszta molibdén KFS-nek abszorpciós maximumait jól tudtuk fittelni a modell potenciál sajátértékeivel.

Az auto-ionizációs modell általános érvényének igazolására megvizsgálunk néhány irodalomból vett mérési eredményt. A Ti, Mn, Fe [42] és Cu [23]  $K$  abszorpciós élének KFS-ét fitteltük a gömbszimmetrikus modell potenciál sajátértékeivel.

A kiválasztott anyagok szobahőmérsékleten négy különböző kristályszerkezetben kristályosodnak: Ti: *h. c. p.*, Mn: komplex, Fe: *b. c. c.* és Cu: *f. c. c.* Az abszorpciós maximumok mért és számolt értékeinek összehasonlítása, valamint a fittelési paraméterek,  $V_0$  és  $a$  az 5. táblázatban találhatók.

A táblázatból látható, hogy a mért és számolt értékek egyezése a mérési hibán belül nagyon jó.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton mondok köszönetet *dr. Kovács Istvánnak* számos elméleti kérdés tisztázásában és a dolgozat végleges formájának kialakításában nyújtott segítségével. *dr. Zsoldos Lehelnek*, a kísérleti munkában nyújtott segítségével. Köszönettel tartozom *dr. Gadó Pálnak*, aki a probléma iránt felkeltette érdeklődésemet és *Minh Luat* fizikus hallgatónak a numerikus számítások elvégzésében nyújtott segítségével.

## IRODALOM

1. L. G. Parratt, Rev. Mod. Phys. 31, 616, 1959.
2. R. L. Kronig, Z. Physik 70, 317, 1931.
3. R. L. Kronig, Z. Physik 75, 191, 1932.
4. R. L. Kronig, Z. Physik 75, 468, 1932.
5. W. Kossel, Z. Physik 1, 119, 1920.
6. L. G. Parratt, Phys. Rev. 2, 470, 1920.
7. J. D. Hannawalt, Phys. Rev. 37, 715, 1931.
8. D. Coster and J. Veldkamp, Z. Physik 70, 306, 1931.
9. D. R. Hartree, R. L. Kronig and H. Petersen, Physica 1, 895, 1934.
10. T. Hayasi, Sci. Repts. Tohoku Univ. 33, 123, 1949.
11. T. Shiraiwa, T. Ishimura and M. Sawada, J. Phys. Soc. Japan 13, 847, 1958.
12. A. I. Kostarev, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 9, 267, 1939.
13. A. I. Kostarev and W. M. Weber, Phys. Rev. B3, 4124, 1971.
14. J. Perel and R. D. Deslattes Phys. Rev. B2, 1317, 1970.
15. A. H. Kahn and A. J. Leyendecker, Phys. Rev. 135, A 1321, 1964.



16. A. T. Shuvaev és V. F. Demechin, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.*, 25, 992, 1961.
17. L. V. Azároff, *Rev. Mod. Phys.* 35, 1012, 1963.
18. M. Sawada, K. Tsutsumi, T. Shiraiwa, T. Ishimura and M. Obashi, *Ann. Rep. Sci. Works. Fac. Sci., Osaka Univ.* 6, 1, 1959.
19. T. Shiraiwa, *J. Phys. Soc. Japan* 15, 240, 1960.
20. M. Obashi, *Sci. Repts. N. Coll. Osaka Univ.* 6, 55, 1957.
21. M. Obashi, *Sci. Repts. N. Coll. Osaka Univ.* 6, 65, 1957.
22. D. Coster and R. Smoluchowski, *Physica* 2, 1, 1935.
23. R. S. Krogstad, Ph. D. thesis, Washington State College, 1955.
24. Ungár T., *Physics Letters* 41A, 47, 1972.
25. L. G. Parratt, *Phys. Rev.* 56, 295, 1939.
26. R. Krogstad, V. Nelson and S. T. Stephenson, *Phys. Rev.* 92, 1394, 1954.
27. Luat Minh, *Diplomamunka*, 1972.
28. A. Sandström, *An Investigation into X-Ray Absorption Spectra*, *Nova Acta Reg. Soc. Sci. upsal.* No. 11, 1935.
29. U. Fano and J. W. Cooper, *Rev. Mod. Phys.* 40, 488, 1968.
30. S. Wexler and G. R. Anderson, *J. Chem. Phys.* 33, 850, 1960.
31. T. A. Carlson and R. M. White, *J. Chem. Phys.* 38, 2930, 1963.
32. T. A. Carlson and R. M. White, *J. Chem. Phys.* 44, 4510, 1966.
33. A. H. Wapstra, G. J. Nijgh and R. van Lieshout, *Nuclear Spectroscopy Tables*, North—Holland Publ. Co. Amsterdam, 1959.
34. T. A. Carlson et. al., *Phys. Rev.* 169, 27, 1968.
35. Marx Gy., *Kvantummechanika*, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1964.
36. Y. Cauchois, *C. R. Acad. Sci., Paris* 197, 644, 1933.
37. A. E. Sandström, *Experimental Methods of X-Ray Spectroscopy*, *Handb. d. Physik*, XXX., ed. S. Flügge, Springer, 1957.
38. P. A. Ross, *Phys. Rev.* 44, 977, 1933.
39. C. E. Moore, *Atomic—Energy Levels* U. S. Government Printing Office Washington, D. C. 1958. Vol. 3.
40. L. Kihlberg, *Acta Chem. Scand.* 13, 954, 1959.
41. R. C. Vickery and J. C. Hipp., *J. Appl. Phys.* 37, 2926, 1966.
42. E. W. White and H. A. McKinstry, *Advances in X-Ray Analysis*, Vol. 9. ed. G. R. Mallett et. al., Plenum Press, N. Y. 1965. p. 376.



# ÜTKÖZŐ SUGÁR FIZIKA\*

PÓCSIK GYÖRGY

ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

A dolgozatban a tároló gyűrűket, az  $e^-e^+$ -ütközések két és többrészcsekés végállapotainak létrejöttét, a  $\rho'$  mezon fő tulajdonságait, az összegszabályokat és vektor dominancia közelítés általánosításait foglaljuk össze.

## 1. §. Bevezetés

Az ütköző sugár fizika elemei már korábban is hozzáférhetőek voltak itthon [1]. Az események felgyorsulása, a világszerte kimutatható érdeklődés és a közeljövőre beígért alapkísérletek azonban indokoltá teszik az újabb eredmények rendszeres áttekintését. Már ma is olyan energiákon vagyunk, hogy  $6\pi$  végállapotokat is mérünk, az ismert vektor mezonok mellé továbbiakat vélünk észlelni. Az  $e^-e^+$ -ütközések  $\sqrt{s} = 2E_c = 2 - 2,5$  GeV energiákon  $40 - 80$  nb\*\* nagyságrendű, nagy hatáskeresztmetszeteket produkálnak, hasonlóan mint a mélyen rugalmatlan  $e^-p$ -szórásban. A kérdés is ismétlődik: a részecskék „szemcsés” szerkezetének megnyilatkozásáról van-e szó? Több olyan effektus is létezik azonban, melyek nagy hatáskeresztmetszetet adnak nagy energiákon, anélkül, hogy pontszerű szubrészecskéket kényszerülnénk feltételezni. Ilyen mechanizmusok: új rezonanciák néhány GeV-es tartományon, rezonanciapárok keltése. Természetesen lehetséges, hogy a szemcsés szerkezet és rezonanciakeltés megértése egykor majd összekapcsolódik. Ez arra utal, hogy még sokat kell tanulnunk az  $1 - 2$  GeV-ig terjedő tartományból is. Éppen ezért a kísérleti berendezések rövid leírása (2. §) után soravesszük a kétrészecskés végállapotokat is (3. §—6. §). A többpionos végállapotokkal kapcsolatos új eredményeket a 7. §-ban tárgyaljuk. Ezután áttérünk az összegszabályok jelenlegi helyzetének felmérésére (8. §). A dolgozat befejező részében a vektor mezon dominancia általánosítását tekintjük át (9. §), amit a 10. §-ban összefoglalás követ.

## 2. §. Tároló gyűrűk

2.1. A tároló gyűrűkben aránylag kis energiákkal lövünk egymással szembe részecskéket, mégis, labor rendszerben nagy energiák halmozódnak fel. Ezt jól látjuk a a következőkből

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2M^2 + \begin{cases} 2E_p^2(1 - \beta^2 \cos \alpha) & \dots \text{1. ábra} \\ 2ME_L & \dots \text{labor rendszer} \end{cases} \quad (1)$$

\* Elhangzott a XI. Magyar Elméleti Fizikai Iskolán (1973. ápr.)

\*\*  $1 \text{ nb} = 10^{-33} \text{ cm}^2$ .



Alkalmazzuk (1)-et protonokra, a CERN-beli ISR (intersecting storage ring)-nél  $\alpha=14,8^\circ$ , az ekvivalens energiákat az I. táblázat mutatja.

I. TÁBLÁZAT

$E_p$ GeV	10	26	31
$E_L$ GeV	210	1450	2000
$s$ GeV <sup>2</sup>	400	2700	3800
ISR tartomány			

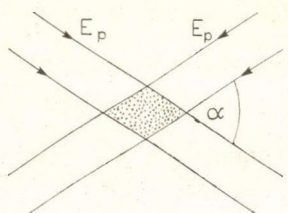
A tároló gyűrűben a target sűrűségének kicsiségét a többszöri ütközések lehetősége kompenzálja. A II. táblázat az  $e^-e^+$ -tárológyűrűket foglalja össze.

II. TÁBLÁZAT

lab.	t. gy.	részecske	$E_e^{\max}$ MeV	$s=(2E_e)^2$ GeV <sup>2</sup>	állapot
Orsay	ACO	$e^+e^-$	550	1,21	mér
Novosibirsk	VEPP II	$e^+e^-$	700	1,96	mér
Frascati	Adone	$e^+e^-$	1500	9	mér
CEA	Bypass	$e^+e^-$	3000	36	mér
SLAC	Spear	$e^+e^-$	3000	36	még nem mér
DESY	Doris	$e^\pm e^-$	3000	36	még nem mér
Orsay	DCI	$e^+e^-$	1800	10,2	még nem mér

Pl. Adonenál  $e^+e^- \rightarrow f, f \leq 20\pi, 6K, p\bar{p} + 8\pi$  stb.

2.2. A tároló gyűrű működését az ISR példáján foglaljuk össze. (1. 2. ábra). 7,4 GeV-es proton szinkrotronban (PS) előgyorsított proton csomókat ( $\rho_{PS} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ) mágneses szétválasztás után két (külön mágnes-rendszerrel irányított), közös csőben levő, tároló gyűrűbe irányítjuk. ( $e^-e^+$ -nál elég egyetlen mágnes-rendszer.) Az egymással szemben futó sugarak az ISR-ben 8 pontban ütköznek, egy proton csomó 6 cm hosszú, 0,5 cm magas, az ütközési térfogat (1.1. ábra) kb. 45 cm-en nyúlik el.



$$E_p = \frac{|p|}{\beta}$$

1. ábra

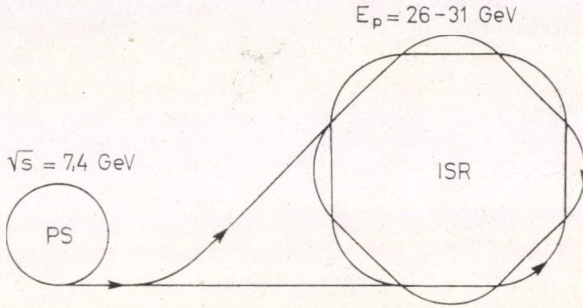
visszük át, s ott halmozzuk fel. Az új löketeket szisztematikusan a régiek közé lőjük, miközben a PS-ből érkező impulzusok számára kiürül a fogadó pálya. Átlagban  $10^{12}$  felhalmozott proton 150 mA áramot ad.

A tároló gyűrűben magas vákuum szükséges, átlagban  $10^{-9}$  torr, ütközés, pontokban  $10^{-10}$  torr. A tárolt sugarak élettartamát sok tényező befolyásolja: ilyenek pl.: 1 magon való szóródás, ez levegőben 10 napos élettartamot adott 2 többszörös Coulomb-szórás, elhanyagolható volt, 3 tértöltés kialakulása: a pro,



tonok ionizálják a gázatomokat, a pozitív ionok kilökődnek, az elektronok bennmaradnak, az így kialakuló töltésfelhőt a mágneseknél elhelyezett 6 kW-os tisztító elektródákkal szívják le.

A sugár élettartamára az első kísérlet azt mutatta, hogy a 4,77 mA-es áram 21,5 perc alatt 3,7 mA-re esett le. A nyomás  $10^{-10}$  torra való lecsökkentése és a tisztító elektródák bekapcsolása lényegesen javította a képet. Pl. 1972 elején egy 6,5 A-es sugár szétbomlási aránya  $2,4 \cdot 10^{-6}\%$ /perc volt az első órában. Ennél gyengébb árammal még kedvezőbb az élettartam.



2. ábra

2.3. A tároló gyűrűk lényeges adata a luminozítás, ez definíció szerint az 1 sec alatt történő események száma, ha  $1 \text{ cm}^2$  a hatáskeresztmetszet. Ha  $n_1, n_2$  a sugár sűrűségek,  $V$  a kölcsönhatási térfogat,  $\vec{v}_{\text{rel}}$  a nyalábok relatív sebessége és  $\sigma$  a teljes hatáskeresztmetszet, akkor az 1 sec alatt keletkező események száma

$$\dot{N} = n_1 n_2 |\vec{v}_{\text{rel}}| V \sigma = L \sigma, \quad (1)$$

$L$  a luminozítás.  $L$  kifejezhető a tároló gyűrű adataival. Jelölje  $N_1, N_2$  a gyűrűkben felhalmozott protonok számát, akkor

$$L = \frac{N_1 N_2 c}{4\pi^2 R^2 h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

$R$  a pályasugár (ISR-nél  $R=150 \text{ m}$ ),  $h$  a sugármagasság.  $L$  kísérletileg határozandó meg és ISR-nél  $\sigma$  mérését 5–15%-ig befolyásolja. Az ISR-nél  $N_1^{\text{max}} = 2 \cdot 10^{14}$ ,  $L = 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ,  $\dot{N} = 4 \cdot 10^4 / \text{sec}$ . Ezzel a luminozitással a legkisebb detektálható hatáskeresztmetszet,  $\sigma = 10^{-34} \text{ cm}^2$ , 1 eseményt adna naponként.

2.4. Jelenleg sok piont észlelünk az Adoneval (1.2. táblázat). Ennél 800 MeV-en történik az előgyorsítás,  $L = 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$  (egy nagyságrend javulást várunk). Minthogy  $nbarn$  rendű hatáskeresztmetszeteket mérnek, érdemes  $L$  egységeként írni

$$\begin{aligned} 1 \text{ nb}^{-1} \text{ sec}^{-1} &= 3,6 \cdot 10^{36} \text{ cm}^{-2} \text{ óra}^{-1}, \\ L_{\text{Adone}} &= 3,6 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ óra}^{-1}, \\ L_{\text{Orsay, Novosibirsk}} &= 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ óra}^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

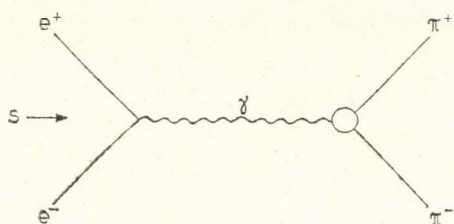


Pl. Adonenál  $\sigma = 10$  nb 10 eseményt ad óránként. Az  $L$  meghatározása pl. rugalmas  $e^-e^+$ -szórás méréséből történhet.

2.5. Most folyik a bemérése a Spearnak (1.2. táblázat);  $L_{\text{terv.}} = 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ , ha ez megvalósul, sok multihadronos eseményt kapunk.

### 3. §. Kétpion végállapotok

3.1. Tároló gyűrűs kísérletekben melléktermékként a relativisztikus kvantum-elektrodinamika igazolására is megtörténik, ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.



3. ábra

Feltesszük, hogy egy foton cseréjével jól leírhatjuk a tekintett folyamatokat [2].

Az  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ -folyamat a 3. ábra szerint megy végbe és hatáskeresztmetszete arányos  $|F_\pi(s)|^2$ -tel,  $s$  a tömegközépponti összenergia négyzete,  $F_\pi(s)$  a pion elektromágneses alakfaktora,  $s \cong 4m_\pi^2$  [1].  $t$ -csatornában  $F_\pi(s)$  valós,  $s < 0$ , és az  $e^- \pi$ -rugalmas szórást írja le,  $F_\pi(0) = 1$ . Mint ismeretes,  $F_\pi(s)$  a komplex  $s \equiv z$  síkba analitikusan terjeszthető ki,  $F_\pi(s) \rightarrow F(z)$ ,  $F(z)$ -nek

$4m_\pi^2$ -nél elágazási pontja van, vágását a valós tengelyen jobbra irányítjuk. Fennáll:

$$F_\pi(s) = F(s + i\varepsilon) \quad s \cong 4m_\pi^2, \varepsilon > 0,$$

$$F_\pi(s) = F(s) \quad s < 4m_\pi^2,$$

$$F(z^*) = F(z)^*$$

$$|F(z)| < a|z|^{b'} \quad a, b' > 0, |z| \rightarrow \infty.$$

(4)

Az utolsó tulajdonság pusztán elméleti követelmény, amely minden renormálható térelméletben fennáll.

A (4) tulajdonságokból sok integráleoállítás vezetett le, legérdekesebb talán az, mely  $\log |F_\pi(s)|$   $s \cong 4m_\pi^2$ -re felvett értékeiből magát a teljes alakfaktort rekonstruálja (l. pl. [1]).

3.2. A következőkben rugalmas unitaritás közelítésben dolgozunk [3]. Mint ismert [1],  $F_\pi(s)$  fázisát a  $\pi\pi$ -szórás  $I=J=1$  fázisa,  $\delta_1(s)$ , határozza meg, ugyanis a két  $\pi$  unitaritást  $\text{Im} < 0 |j_\mu| 2\pi$ -be téve

$$\text{Im} F_\pi(s) = F_\pi(s) \sin \delta_1(s) e^{-i\delta_1(s)}, \quad s > 4m_\pi^2. \quad (5)$$

Tegyük fel  $F_\pi(s)$  egy levonásos diszperziós relációt elégít ki, (5)-öt beírva a jól ismert Omnès-egyenlet állt elő, melynek megoldását korábban ismerjük [1],

$$G(z) = \frac{F(z)}{P(z)} = \exp \frac{z}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\delta_1(s)}{s(s-z)} ds. \quad (6)$$



A  $P(z)$  valós együtthatós polinom  $F(z)$  zérushelyeit kompenzálja és  $P(0)=1$ . Jelenleg  $\delta_1$  modelfüggő, ezért a pion elektromágneses alakfaktora is. Legyen pl.

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & 4m_\pi^2 \leq s < m_\rho^2 \\ \pi/2 & s = m_\rho^2 \\ \pi & m_\rho^2 < s < \infty \end{cases} \quad (7)$$

(a  $\rho$ -rezonancia feltevése mindig szükséges), ekkor (6)-ból

$$F_\pi(s) = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - s - i\varepsilon}, \quad (8)$$

(stabil  $\rho$ -pólushoz közelítés).  $\rho$ -rezonancia közelítésben  $m_\rho^2 \rightarrow m_\rho^2 - im_\rho \Gamma_\rho$  és

$$F_\pi(s) = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - s - im_\rho \Gamma_\rho}, \quad (9)$$

$\Gamma_\rho$  a  $\rho$ -mezon szélessége. A (9) alak még mindig rossz: nincs  $2\pi$ -vágása,  $t$ -csatornában nem valós. Ennélfogva a (7) modell úgy finomítandó, hogy  $\Gamma_\rho$  helyét egy energiafüggő szélesség foglalja el.

$\delta_1(s)$ -et  $N/D$  módszerrel számoljuk. A rugalmas  $I=J=1$   $\pi\pi$ -szórásamplitúdó

$$h_1(s) = \frac{\sqrt{s}}{k^3(s)} \sin \delta_1(s) e^{i\delta_1(s)} = \frac{\sqrt{s}}{k^3(s)} (\cotg \delta_1 - i)^{-1}, \quad (10)$$

$k(s)$  a tömegközépponti pion impulzus  $= \frac{1}{2}(s - 4m_\pi^2)^{1/2}$ . Írjuk  $h_1(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , ahol  $N(s)$ -nek csak balravágása,  $D(s)$ -nek csak jobbravágása van és

$$ImD(s) = -\frac{k^3(s)}{\sqrt{s}} N(s) \quad (11)$$

$\rho$  bevezetésével együttjár:

$$\delta_1(m_\rho^2) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\delta_1}{ds}(m_\rho^2) = \frac{1}{m_\rho \Gamma_\rho}. \quad (12)$$

Gounaris és Sakurai [4] nyomán tegyük fel  $N(s)$  állandó,  $D(s)$  két levonásos diszperziós relációnak tesz eleget, a megoldás

$$h_1^{-1}(s) \rightarrow h_1^{-1}(z) = (z - 4m_\pi^2)f(z) + a + bz, \\ f(z) = \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{z}\right)^{1/2} \text{Log} [(z^{1/2} + (z - 4m_\pi^2)^{1/2})(-z^{1/2} + (z - 4m_\pi^2)^{1/2})^{-1}], \quad (13)$$

$$a = m_\pi^2 h_\rho + m_\rho^2 \left[ \frac{k_\rho^3}{m_\rho^2 \Gamma_\rho} + k_\rho^2 h'_\rho \right], \quad k_\rho = k(m_\rho^2), \quad h_\rho = h(m_\rho^2),$$

$$b = -\frac{1}{4} k_\rho - k_\rho^2 h'_\rho - \frac{k_\rho^3}{m_\rho^2 \Gamma_\rho}, \quad h(s) = \frac{2k(s)}{\pi s^{1/2}} \log \frac{2k(s) + s^{1/2}}{2m_\pi^2}.$$



Ugyanezt a megoldást kapták Frazer és Fulco is [5],  $D$ -ben egy levonást feltéve és a balvágást egy  $s = -s_1$  pólussal közelítve. (6)-ba helyettesítve nyerjük

$$G(z) = \left( a - \frac{m_\pi^2}{\pi} \right) h_1^{-1}(z),$$

$$F_\pi(s) = \left( 1 + \frac{s}{s_1} \right) m_\rho^2 \left( 1 + d_\rho \frac{\Gamma_\rho}{m_\rho} \right) \left[ m_\rho^2 - s + \frac{m_\rho^2 \Gamma_\rho}{k_\rho^3} \{ k^2(s) [h(s) - h_\rho] + (m_\rho^2 - s) k_\rho^2 h'_\rho \} - \right. \\ \left. - i m_\rho \Gamma(s) \right]^{-1}, \quad (14)$$

$$\Gamma(s) = \Gamma_\rho \frac{k^3(s) m_\rho}{k_\rho^3 s^{1/2}}, \quad d_\rho = \frac{m_\pi^2 m_\rho}{k_\rho^3} \left( \frac{3}{2} h_\rho - \frac{1}{\pi} \right) + \frac{m_\rho}{2\pi k_\rho}.$$

$d_\rho$  véges szélesség korrekció.  $h^{-1}(-s_1) = 0$ ,  $s_1 = 9,6 \cdot 10^6 m_\rho^2$ -re, ezért a polinom leghagyható  $F_\pi$ -ben.  $\rho$  tömeg körül  $\{ \dots \}$  elhagyható.  $m_\rho$ ,  $\Gamma_\rho$ ,  $d_\rho$  ismeretlennek tekintendő. (14) jó analitikus szerkezettel rendelkezik.

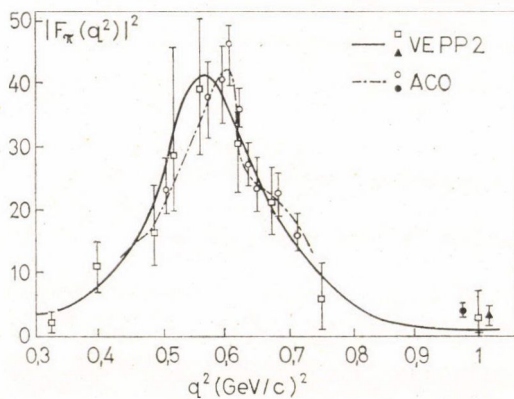
3.3. A legújabb ACO mérések [6] eredményét a 4. ábra szemlélteti, az Orsay fit (14) felhasználásával  $+\omega$ -pólus járulékl figyelembevételével történt:

$$m_\rho = (780,2 \pm 5,9) \text{ MeV}, \quad \Gamma_\rho = (152,8 \pm 15,1) \text{ MeV} \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{csúcs}} (= e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-) = (0,96 \pm 0,09) \text{ nb}$$

$$d_\rho = 0,66 \pm 0,37, \quad \frac{f_\rho^2}{4\pi} = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} = 2,56 \pm 0,22.$$

$f_\rho$  a  $\gamma - \rho$ ,  $g_{\rho\pi\pi}$  a  $\rho\pi\pi$  vertex erősségét jellemzik és véges szélesség korrekciókat tartalmaznak. A Novoszibirszki méréseket Breit—Wigner-alakkal illesztették.  $\sqrt{s} = 1 - 2 \text{ GeV}$  tartományban az Adone és VEPP—2 mérések szisztematikusan nagyobb hatáskeresztmetszetet adnak, mint a (15)-tel továbbhúzott görbe. Valóban, ilyen energiáknál a farokeffektusokat az unitaritásba betett  $K\bar{K}$ ,  $\pi\omega$ ,  $p\bar{p}$  stb. járulékok növelhetik.



4. ábra



Szokás  $d_q=0$ -val illeszteni,

$$F_\pi(s) = \frac{m_\rho^2 g_{\rho\pi\pi}}{f_\rho} (m_\rho^2 - s - im_\rho \Gamma(s))^{-1}, \quad (16)$$

$\Gamma(s)$  a fenti és

$$\Gamma_\rho = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2 k_\rho^3}{6\pi m_\rho^2}, \quad \Gamma(\rho \rightarrow e^+ e^-) = \frac{4\alpha^2 \pi m_\rho}{3f_\rho^2}. \quad (17)$$

(15) helyett adódik:

$$m_\rho = (775,4 \pm 7,3) \text{ MeV}, \quad \Gamma_\rho = (149,6 \pm 23,2) \text{ MeV}. \quad (18)$$

$$\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} = 2,84 \pm 0,5, \quad \frac{f_\rho^2}{4\pi} = 2,26 \pm 0,25.$$

3.4. Vegyük most szemügyre a vektor mezon dominancia (VMD) jöslatát [1]. VMD közelítésben az elektromos áram mátrixeleme definíció szerint

$$\langle B | j_\mu^{\text{elm}}(0) | A \rangle = \sum_V A'_V(s) = \frac{m_V^2}{f_V} \langle B | j_\mu^V(0) | A \rangle, \quad (19)$$

az összeg a vektor mezonokra megy,  $j_\mu^V$  a  $V$ -mezon forrása,  $A'_V$  a vektor mezon propagátor,  $m_V^2/f_V$  jellemzi a fotonhoz való csatolás erősségét. (19)-ben általában a foton és a vektor mezon tömeghéjon kívül van, feltesszük  $\langle B | j_\mu^V | A \rangle$ , az  $A + V \rightarrow B$  amplitúdója, simán viselkedik  $\sqrt{s} = m_V$  közelében.

Alkalmazzuk (19)-et  $\rho$ -tartományban  $|A\rangle = |0\rangle$ ,  $|B\rangle = |2\pi\rangle$ -re, kinematikai faktorokkal egyszerűsítve

$$F_\pi(s) = \frac{m_\rho^2 g_{\rho\pi\pi}(s)}{f_\rho(W_\rho(s) - s)}, \quad W_\rho(s) - s = A'_\rho(s)^{-1}, \quad (20)$$

ahol  $W_\rho(s)$  a  $\rho$ -mezon tömegoperátora. Az  $S$ -mátrix unitaritásából  $2\pi$ -közelítésben

$$\begin{aligned} -ImW_\rho(s) &= \Sigma_{\rho\rho}^{(2\pi)}(s) \equiv \frac{1}{6} \int_{(2\pi)} (2\pi)^4 \delta(q - \Sigma p_i) |\langle 2\pi | j_\mu^\rho(0) | 0 \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{48\pi} g_{\rho\pi\pi}^2(s) s \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

A Gounaris—Sakurai modell akkor adódik vissza, ha  $g_{\rho\pi\pi}(s)$  állandó és  $W_\rho(s)$  két levonásos diszperziós relációnak tesz eleget (21) szolgáltatva imaginárius résszel. Ezért a VMD jól reprodukálja a pion alakfaktort.

Vegyük most (20)-at  $s=0$ -ban éles rezonancia közelítésben, azaz  $W_\rho(0) = m_\rho^2$ , ekkor a közismert KSFR relációra jutunk,  $g_{\rho\pi\pi}(0) = f_\rho$ .  $\rho$  véges szélessége miatt valójában  $W_\rho(0) = a_\rho m_\rho^2$  és  $g_{\rho\pi\pi}(0) = a_\rho f_\rho$ . FFGS-modellből  $a_\rho = 1,07$ .

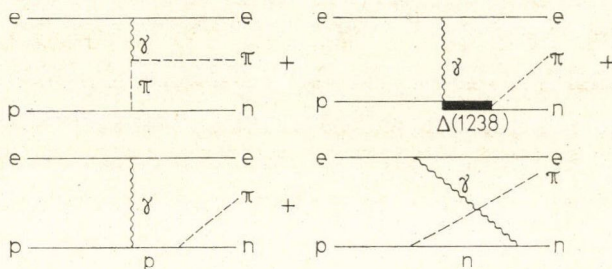
Nézzük most VMD jöslatát a pion elektromágneses sugarára [1]

$$\langle r_\pi^2 \rangle = 6F'_\pi(0) = 6 \frac{g_{\rho\pi\pi}}{f_\rho m_\rho^2} \left( \frac{m_\rho^2}{W_\rho(0)} \right)^2 (1 - W'_\rho(0)), \quad (22)$$



tehát éles rezonancia közelítésben  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6}/m_\rho = 0,64$  fermi (kísérleti adat  $0,8 f$ ). A véges szélesség korrekció kiesik, FFGS-modellekben  $W'_\rho(0) = -0,58\Gamma_\rho/m_\rho$ .

Némiképpen hihetetlen Serpukhov-UCLA  $e^-\pi^-$ -mérések a VMD jóslatnál kétszer nagyobb sugárnégyzetet jósolnak. Ha ez igaz volna, akkor Levin és Okubo szerint [7] küszöbhez közel  $\delta_1$   $55^\circ$ -ot is elérhetne. A számítás érdekes pontja, hogy a térszerű  $F_\pi$  alakfaktorra abszolút alsó és felső korlátokat találtak.



5. ábra

3.5. Lényeges lenne a tényleges (térszerű) pion alakfaktort pontosan mérni; az  $e^-\pi^-$ -szórás még elég hozzáférhetetlen, többet mutat az elektrokeltés [8]

$$\begin{aligned} e^- p &\rightarrow e^- \pi^+ n & (1) \\ e^- p &\rightarrow e^- p \pi^0 & (2). \end{aligned} \quad (23)$$

Az (1) folyamathoz küszöb körül az 5. ábrán mutatott gráfok járulnak hozzá, (2)-höz a legfelső gráf nem ad járulékot. Ezért (2) méréséből a  $\Delta(1238)$  átmeneti formfaktorát, majd (1) méréséből a térszerű pion alakfaktort extrapoláljuk. Az így nyert  $F_\pi$  elég bizonytalan, de  $\langle r_\rho^2 \rangle$  VMD-jóslatával inkább konzisztens, mint nagyobb értékekkel, bár 1 f-ig azok sem zárhatók ki.

#### 4. §. $p\bar{p}$ , $K\bar{K}$ , $\pi^+\pi^-\pi^0$ végállapotok

4.1.  $e^-e^+ \rightarrow p\bar{p}$ -re Frascatiban 14 eseményt találtak küszöbhez közel,  $s=4,4\text{ GeV}^2$  [8]. A differenciális hatáskeresztmetszet arányos

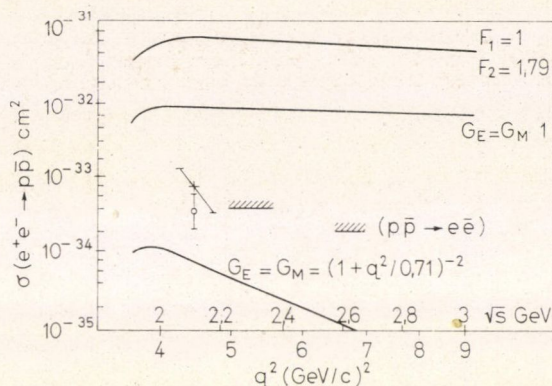
$$|G_M|^2(1 + \cos^2 \Theta) - \frac{1}{\tau} |G_E|^2 \sin^2 \Theta, \quad \tau = -\frac{s}{4M^2} \quad (24)$$

-tel [1]. Minthogy küszöbhez közel izotróp eloszlás várható,  $|G_M|=|G_E|$ , innen a teljes hatáskeresztmetszet arányos a nukleon  $G_E$  elektromos alakfaktorával, pontosan  $\sigma = |G_E|^2(1 - (2\tau)^{-1}) \cdot 10^{-32} \text{ cm}^2$ . Ez azzal is konzisztens, hogy  $\tau = -1$ -nél  $G_E = G_M$ , egyébként az  $F_{1p}$ ,  $F_{2p}$  proton alakfaktorok [1] divergálnának

$$F_{1p} = \frac{\tau G_M + G_E}{1 + \tau}, \quad F_{2p} = \frac{G_M - G_E}{(1 + \tau)(\mu - 1)} \quad (25)$$



$\mu - 1$  a proton anomális mágneses momentuma magnetonban. A kísérleti helyzetet a 6. ábra mutatja. Úgy látszik a nukleon alakfaktorok dipól illesztése nem folytatható el időszerű tartományba és a  $G_E/G_M = \mu$  skálatörvény sem teljesül. Pfister [9] felhívja a figyelmet a skálatörvény sérülésére: analitikus extrapolációs technikákat használva  $\tau \approx -1$ -re  $G_E = G_M$  részesül előnyben.



6. ábra

4.2. A  $\Phi$  tömeg körül a  $K$ -mezonos végállapotokat a  $\Phi$ -mezon dominancia magyarázza. Novisibirszkben a  $K^+K^-$ , Orsayban a  $K^+K^-$ ,  $K_S^0K_L^0$ ,  $\pi^+\pi^-\pi^0$  bomlás-módot mérték. Tavalyi ACO fitből  $f_\Phi^2/4\pi = 11.2$ . Az egyes parciális szélességek  $\Gamma_\Phi$ -hez való arányai [10]

$$B(K^+K^-) = 49.1 \pm 2\%$$

$$B(K_S^0K_L^0) = 30.7 \pm 2.4\% \quad (26)$$

$$B(\pi^+\pi^-\pi^0) = 17.5 \pm 2.5\%$$

$$B(e^+e^-) = 0.032 \pm 0.003\%, \quad \Gamma_\Phi = 4.4 \pm 0.3 \text{ MeV.}$$

Általában Breit—Wigner-alakkal illesztnek.  $\Phi$  farka konzisztens az  $m_\Phi$  fölött rendelkezésre álló négy VEPP II eseménnyel. Ezek nagy hibája még lehetetlenné teszi a  $K$ -mezon elektromágneses alakfaktora VMD-közelítésének maradéktalan ellenőrzését.

4.3. Benaksas és munkatársai [6] 1972-ben számoltak be  $e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  új ACO méréseiről

$$\sigma_{\text{csúcs}}(e^+e^- \rightarrow \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0) = (1.8 \pm 0.2) \mu\text{b}, \quad (27)$$

$$\Gamma_\omega = (9.1 \pm 0.8) \text{ MeV.}$$

Minthogy [1, 2]

$$\sigma_{\text{TOT}}(e^+e^- \rightarrow F)_{s=m_V^2} = \frac{12\pi}{m_V^2} B(V \rightarrow e^+e^-) B(V \rightarrow F) \quad (28)$$



és

$$\begin{aligned}
 B(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) &= 0,898 \pm 0,045 \text{ [10]}, \\
 \Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-) &= (0,76 \pm 0,08) \text{ keV}, \\
 \frac{f_\omega^2}{4\pi} &= 18,4 \pm 1,8.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Orsayban (29) még mindig eléggé apparátus függő.

### 5. § $\omega$ , $\Phi$ sugárzásos bomlásai

5.1. *Benaksas és munkatársai* [11] a közelmúltban  $e^+ e^-$  annihilációban  $\gamma$ -detektálással a  $3\gamma$ -s végállapotok analiziséből az  $\omega$ ,  $\Phi \rightarrow \eta\gamma$  (50 esemény),  $\pi^0\gamma$  (16 esemény) bomlásmódokat analizálták, eredmények:

$$\begin{aligned}
 B(\Phi \rightarrow \eta\gamma) &= (2,6 \pm 0,7)\%, \quad B(\Phi \rightarrow \pi^0\gamma) = (0,25 \pm 0,12)\%, \\
 \Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma)/\Gamma(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) &= (10,9 \pm 2,5)\% \\
 \Gamma(\omega \rightarrow \eta\gamma)/\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) &< 27\% \quad (90\% \text{ megbízhatóság}) \\
 \Gamma(\omega \rightarrow 2\pi^0\gamma)/\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) &< 15\% \quad (90\% \text{ megbízhatóság})
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

( $\omega$  bomlásmódjainál  $\varrho^0$  járuléka elhanyagolva).

5.2. A  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\Phi \rightarrow \pi^0\gamma$  bomlásmódok és  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  közt a VMD egyszerű kapcsolatot teremt [12]. Írjuk ugyanis

$$\langle \pi^0(q)\gamma(k) | j_\mu^{\text{elm}}(0) | 0 \rangle = \frac{e}{m_{\pi^0}} G_{\pi^0\gamma}(s) \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} q^\nu k^\varrho \varepsilon_\gamma^\sigma(k), \tag{31}$$

az  $e^+ e^- \rightarrow \pi^0\gamma$  hatáskeresztmetszetét  $G_{\pi^0\gamma}(s)$ , a  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  bomlás szélességét  $G_{\pi^0\gamma}(0)$  szabja meg, ahonnan [10]  $G_{\pi^0\gamma}(0) = (4,56 \pm 0,23) \cdot 10^{-2}$ . Defináljuk (31) példájára  $j_\mu^{\text{elm}}$  izoskalár és izovektor részével a  $G_{\pi^0\gamma}^{I=0,1}(s)$  alakfaktorokat, akkor

$$\begin{aligned}
 G_{\pi^0\gamma}(s) &= G_{\pi^0\gamma}^{I=0}(s) + G_{\pi^0\gamma}^{I=1}(s), \\
 G_{\pi^0\gamma}^{I=0}(0) &= G_{\pi^0\gamma}^{I=1}(0) = \frac{1}{2} G_{\pi^0\gamma}(0).
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Utóbbi abból következik, hogy  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -ban az egyik foton  $I=0$ , a másik  $I=1$ , s rájuk Bose-statisztika érvényes. Vezessük be a  $V\pi^0\gamma$ -csatolási állandót a

$$\langle \pi^0\gamma(k) | T | V(p) \rangle = \frac{e}{m_{\pi^0}} f_{V\pi^0\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} p^\mu e_V^\nu(p) k^\varrho \varepsilon_\gamma^\sigma(k) \tag{33}$$

$$\Gamma(V \rightarrow \pi^0\gamma) = \frac{\alpha}{24} f_{V\pi^0\gamma}^2 \left( \frac{m_V}{m_{\pi^0}} \right)^2 m_V.$$



(19), (31)—(33)-ból

$$G_{\pi^0\gamma}^{I=1}(s) = \frac{f_{\omega\pi^0\gamma} m_\omega^2}{f_\omega(W_\omega(s)-s)} = \frac{f_{\omega\pi^0\gamma}}{g_{\omega\pi\pi}} F_\pi(s) \quad (34)$$

és

$$G_{\pi^0\gamma}^{I=0}(s) = \frac{f_{\omega\pi^0\gamma} m_\omega^2}{f_\omega(W_\omega(s)-s)} + (\omega \rightarrow \Phi). \quad (35)$$

Mínthogy

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{\pi\alpha^2 m_{\pi^0}}{4} (G_{\pi^0\gamma}(0))^2, \quad (36)$$

(17), (33), (34)-ből  $s=0$ -ra (32)-t használva adódik

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma)}{\Gamma(\omega \rightarrow 2\pi)} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{m_\omega}{m_{\pi^0}} \right)^2 \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)}{m_{\pi^0}} = (8,7 \pm 0,9) \cdot 10^{-4}, \quad (37)$$

kísérletileg kisebb, mint  $50 \cdot 10^{-4}$ .

Vegyük most a (35) izoskalár mátrixelemeket  $s=0$ -nál

$$\frac{f_{\omega\pi^0\gamma} m_\omega^2}{f_\omega W_\omega(0)} + (\omega \rightarrow \Phi) = \frac{1}{2} G_{\pi^0\gamma}(0). \quad (38)$$

FFGS-modellben  $W_\omega(0) = m_\omega^2$ ,  $W_\Phi(0) = 0,85m_\Phi^2$ , így

$$\frac{f_{\omega\pi^0\gamma}}{f_\omega} + 1,17 \frac{f_{\Phi\pi^0\gamma}}{f_\Phi} = (2,28 \pm 0,12) \cdot 10^{-2}, \quad (39)$$

(30)-cal jól teljesül.

## 6. §. Részecske-rezonancia pár keltése $e^+ e^-$ -annihilációban

6.1. Nézzük az  $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \omega$  átmenetet és definiáljuk a  $\pi^0 \omega$  alakfaktort

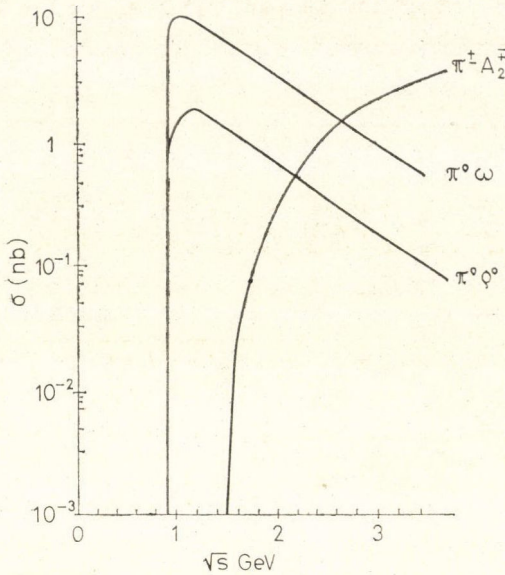
$$\langle \pi^0(p) \omega(k) | j_\mu^{\text{elm}}(0) | 0 \rangle = i F_{\pi\omega\gamma}(q^2) p^\alpha q^\beta \varepsilon(k)^\gamma \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}. \quad (40)$$

VMD közelítésben

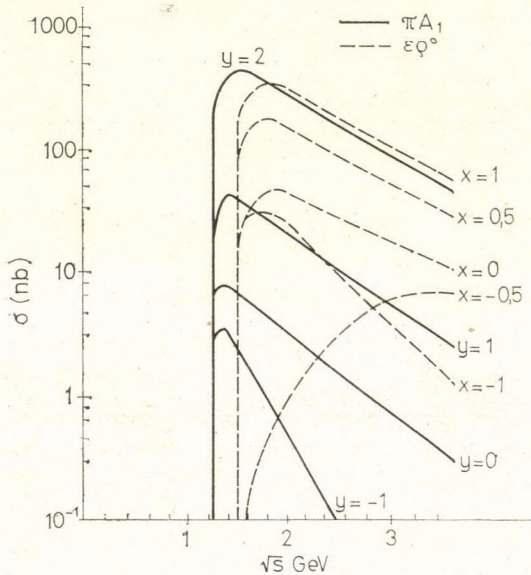
$$F_{\pi\omega\gamma}(s) = \frac{F_{\pi\omega\varrho} m_\varrho^2}{f_\varrho} (m_\varrho^2 - s - im_\varrho \Gamma(s))^{-1}, \quad (41)$$

ahol  $F_{\pi\omega\varrho} \alpha \langle \pi\omega | T | \varrho \rangle$  mátrixelem nagyságát jellemzi (l. pl.: (33)).  $s=0$ -nál  $F_{\pi\omega\gamma}$  arányos  $f_{\omega\pi^0\gamma}$ -val.  $\omega \rightarrow 3\pi$ -ből  $\frac{F_{\pi\omega\varrho}^2}{4\pi} = 26,4 \text{ GeV}^{-2}$  [13]. Betéve (33)-ba  $\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) = 1,5 \text{ MeV}$  (exp.:  $0,9 \pm 0,1 \text{ MeV}$ ). Ezzel az értékkel számított hatáskeresztmetszet a 7. ábrán látható [14]. A hatáskeresztmetszet küszöb fölött gyorsan eléri maximumát, majd lassan esik,  $\sigma_{\text{max}} \approx 10 \text{ nb}$ , nagy érték.  $\omega \leftrightarrow \varrho^0$  cserével a megfelelő formulák  $\pi^0 \varrho^0$  keltésre is alkalmazhatók (7. ábra). ACO mérések  $2E=0,99 \text{ GeV}$ -nél, ahol csak  $\pi^+ \pi^- \pi^0$  végállapotok vannak ( $\pi^0 \varrho^0$ ,  $\pi^\pm \varrho^\mp$ -ből), egyezésben vannak a most számolt  $3\sigma(\pi^0 \varrho^0)$ -lal.





7. ábra



8. ábra

hatáskeresztmetszetek küszöb fölött gyorsan nőnek és még  $\sqrt{s} = (2-3)$  GeV tartományban is számottevők.

A  $\pi A_2$ -keltés hatáskeresztmetszetének számolása a fentiekhez hasonló, (41) helyett  $\omega \leftrightarrow A_2$  és  $F_{\pi A_2 \varrho}$ -t az  $A_2 \rightarrow \varrho \pi$  szélességből vesszük.

6.2. A  $\pi A_1$  végállapot keltése annyiban különbözik az előzőktől, hogy két alakfaktor szerepel

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) A_1(k) | j_{\mu}^{\text{elm}}(0) | 0 \rangle &= (42) \\ &= F_{\pi A_1 \gamma}^1 (\varepsilon_{\mu}^*(k) q^2 - \varepsilon_{\nu}^*(k) q^{\nu} q_{\mu}) + \\ &+ F_{\pi A_1 \gamma}^2 (\varepsilon_{\mu}^*(k) p^{\nu} q_{\nu} - \varepsilon_{\nu}^*(k) q^{\nu} p_{\mu}). \end{aligned}$$

VMD-közelítésben mindkét alakfaktorra (41) érvényes,  $\omega \leftrightarrow A_1$ . Ily módon a  $\pi A_1$ -keltés teljes hatáskeresztmetszete két paramétertől függ:  $\Gamma(A_1 \rightarrow \varrho \pi) = 0,1$  GeV,  $y = F_{\pi A_1 \varrho}^2 / F_{\pi A_1 \varrho}^1$  [14] (8. ábra).  $y$  az  $A_1 \rightarrow \varrho \pi$  bomlás  $d/s$  hullám csatolási állandóinak arányától függ és kísérletileg bizonytalan, valószínűleg  $1,5 \leq y \leq 1,9$ . A  $\varrho^0 \varepsilon$  végállapot keltése a fentiekből  $A_1 \rightarrow \varrho$ ,  $\pi \rightarrow \varepsilon(0^+, m_{\varepsilon} = -0,75$  GeV) cserével adódik,  $x = F_{\varepsilon \varrho \varrho}^1 / F_{\varepsilon \varrho \varrho}^2$  (8. ábra). Elméleti megfontolásból  $\Gamma(\varepsilon \rightarrow 2\gamma) = 27,4$  keV.

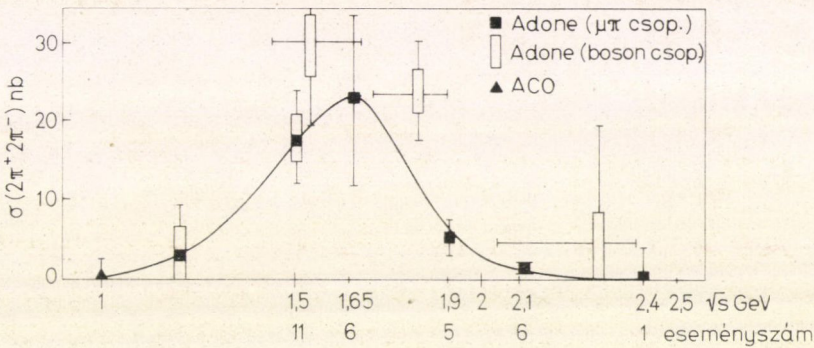
6.3. A  $\pi B$ -végállapot keltése  $\pi A_1$ -hez hasonlóan, de  $\omega$ -n keresztül megy végbe,  $\sigma_{\text{max}} \approx 30$  nb,  $y \approx 1,5$ ,  $\sqrt{s} = 1,6$  GeV [14]. Az  $\varepsilon \Phi$ ,  $\varepsilon \omega$ -végállapotok keltése  $\omega$ -n keresztül történhet és valószínűleg kisebb járulékot adnak, mint  $\varepsilon \varrho$ .  $e^+e^-$ -annihilációban  $\varrho^+\varrho^-$ -pár is keletkezhet, azonban a keltési hatáskeresztmetszet három alakfaktortól függ, melynek lefutása a fentiek lefutására emlékeztet és maximuma 10 nb körül van.

A fenti spekulációk azt mutatják, hogy  $e^+e^-$ -annihilációban a rezonanciakeltés nagy hatáskeresztmetszettel történik, Breit—Wigner-nevezők közreműködésével. A ha-



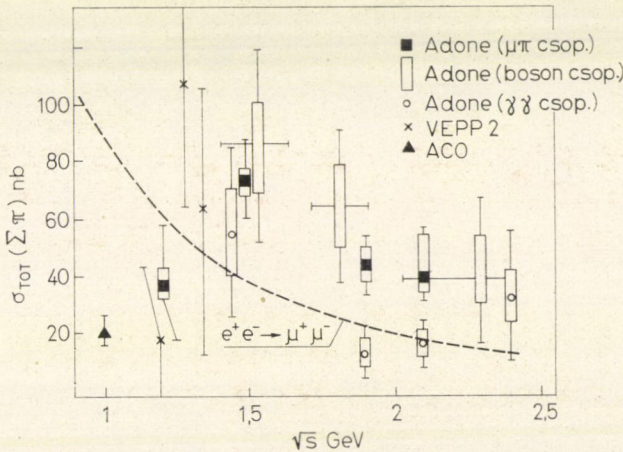
## 7. §. Többpionos végállapotok

7.1. 1972-ben Frascatiban  $1,2 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 2,4 \text{ GeV}$  tartományban  $e^-e^+$ -annihilációban sokpionos folyamatokat is észleltek. Minthogy korábban  $p\bar{p} \rightarrow n\pi$ -re  $n > 6$ -nál 10%-nál kevesebbet állítottak, valószínűtlen volt 6-nál több piont várni, valóban, Adone mérések szerint  $\sigma(3\pi^+3\pi^-)$  már relatív kicsinek bizonyult. Töltött pionok mellett  $1-2 \pi^0$  is keletkezett. Eredmények [15]: 1.  $\sigma(\pi^+\pi^-\pi^0) + \sigma(\pi^+\pi^-\pi^0) \approx 30 \text{ nb}$  lényegében energiafüggetlenül, átlagban 20 nb hibával. 2.  $\sigma(2\pi^+2\pi^-\pi^0) \approx 10 \text{ nb}$  energiafüggetlen (5–10) nb hibával. 3.  $\sigma(2\pi^+2\pi^-\pi^0)$  15 nb-ről ( $\sqrt{s} = 1,5 \text{ GeV}$ ) 2–3 nb-re ( $\sqrt{s} = 2,5 \text{ GeV}$ ) csökken 5 nb körüli hibával. 4.  $2\pi^+2\pi^-$ -csatornában rezonanciaszerű energiafüggés található (9. ábra). Az egyes mérési pontok alatt az eseményszámok olvashatók.



9. ábra

Általában a méréseket a Bhabha-szórás nagyon zavarta. Pl. 2,1 GeV-en 6187 összeseményt találtak. 5. A teljes hatáskeresztmetszet (10. ábra) ugyancsak csúcsot mutat. Láthatóan  $\sigma_r(\Sigma\pi) > \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ , arányok közel  $2 \cdot \sigma_r$  lefutása 2 GeV-től



10. ábra



konzisztens  $s^{-1}$ -gyel. 6. Ha a  $G = -1$ , ill.  $G = -1$  paritású végállapotok keltését összeadjuk, akkor a rezonanciaszerű csúcsot  $G = +1$  örökli, míg  $G = 1$ -hez lassan emelkedő teljes hatáskeresztmetszet tartozik. 7. Adone energiatartományban az átlagos multipllicitás 4—5.

A  $\sigma_T(\Sigma\pi)/\sigma(\mu^+\mu^-)$  arány különféle modellekben jósolható, szabad  $1/2$  spinű kvarkmodellben pl.  $2/3$ , színes kvarkmodellben, Han—Nambu-modellben 2, Bramon—Greco-féle VMD-modellben 1,25. Konklúzió: a közönséges kvark-modell lehetőségét a fenti kísérletek kiejtik.

A csúcs felléptét jól magyarázná egy új vektormezon,  $\varrho'$ . Konklúzió:  $m_{\varrho'} = 1,6$  GeV,  $\Gamma_{\varrho'} = 350$  MeV,  $J^{PC} = 1^{--}$  (l.  $j_{\mu}^{elm}$  tulajdonságai) és  $G = C(-1)^I$  miatt  $I^G = 1^+$ , tehát a  $\varrho$ -mezon testvéréről van szó.

7.2. Mielőtt a  $\varrho' - \gamma$  csatolást vizsgálnánk, idézzük Pais és Llewellyn—Smith eredményét az  $e^-e^+ \rightarrow N$  pion átmenet izospin szabályairól [16].

Páratlan  $N$ -re  $I=0$ ,  $\langle n_{\pi^0} \rangle = \frac{N}{3}$ , „csak  $\pi^0$ ”-t  $C$  tiltja, továbbá

$$\sigma_5(3\pi^0) = \frac{1}{2} \sigma_5(\pi^0),$$

$$\sigma_7 = \sum_{j=1,3,5} \sigma_7(j\pi^0) = \frac{1}{7} (3\sigma_7(\pi^0) + 9\sigma_7(3\pi^0) + 15\sigma_7(5\pi^0)), \text{ stb.} \quad (43)$$

ahol pl.  $\sigma_5(3\pi^0)$   $N=5$  pionra, köztük 3 semleges  $\pi$ -re vonatkozik.

Páros  $N$ -re  $I=1$  és

$$\frac{N-2}{5} \langle n_{\pi^0} \rangle < \frac{3N-2}{5}, \quad \sigma_4(0\pi^0) < 4\sigma_4(2\pi^0), \text{ stb.} \quad (44)$$

7.3. Összegezzük (28)-at minden  $F$ -re, s írjuk be  $\Gamma(\varrho' \rightarrow e^+e^-)$ -t, [l. (17)], ekkor

$$\frac{f_{\varrho'}^2}{4\pi} = \frac{4\pi\alpha^2}{m_{\varrho'} \Gamma_{\varrho'} \sigma_T^{\text{csúcs}}(e^+e^- \rightarrow \varrho' \rightarrow \Sigma\pi)}, \quad (45)$$

$f_{\varrho'}$  parametrizálja a  $\gamma\varrho'$ -csatolást. Fennáll

$$\sigma_T^{\text{csúcs}}(e^+e^- \rightarrow \varrho' \rightarrow \Sigma\pi) \cong \sigma_4^{\text{csúcs}}(0\pi^0) + \sigma_4^{\text{csúcs}}(2\pi^0) \cong 1,25\sigma_4^{\text{csúcs}}(0\pi^0). \quad (46)$$

Ha mindkét egyenlőtlenséget használjuk,  $f_{\varrho'}^2/4\pi \cong 18$ ; ha csak az elsőt,  $f_{\varrho'}^2/4\pi \cong 10 \pm 4$ .  $f_{\varrho'}^2/4\pi = 10$  esetén  $\varrho'$  kétszerite erősebben csatolódik a fotonhoz, mint  $\varrho$ :

$$\frac{m_{\varrho'}^2}{f_{\varrho'}} : \frac{m_{\varrho}^2}{f_{\varrho}} = \frac{1}{2}. \quad (47)$$

Különösnek tűnhet, hogy csak a  $2\pi^+2\pi^-$ -csatornában lép fel csúcs.  $m_{\varrho'}$  közelében  $\varrho' \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$  és  $\varrho' \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$  összemérhető, távolabb — feltehetően a  $\varrho\varrho'$ -interferencia következtében — nem. Általában az interferencia-effektusok kiátlagolhatnak csúcsokat.

A közelmúltban [17]  $\sqrt{s} = 1,6$  GeV-nél 18  $2\pi^+2\pi^-$  Adone-eseményt vizsgáltak meg 4 keltési mechanizmus szempontjából; közvetlenül  $2\pi^+2\pi^-$  (invariáns fázistér),  $\varrho^0\pi^+\pi^-$ -keltés (i. f.),  $A_1^\pm\pi^\mp$ -keltés (i. f.),  $\varrho^0e^0$ -keltés  $s$ -állapotban. A  $(\pi_1\pi_2)$  vs.  $(\pi_3\pi_4)$  kétpion tömegeloszlások egyértelműen a  $\varrho^0e^0$  ( $\Gamma_e = 0,3$  GeV) közbenső álla-



potot választották ki. Ekkor tehát a  $\rho' \rightarrow \rho^0 \varepsilon^0$  (850 MeV) bomlás magyarázata a csúcsot  $\sigma_T(\Sigma\pi)$ -ben és  $f_{\rho'}^2/4\pi = 17 \pm 5$ . Ha azonban a  $\pi^+\pi^-2\pi^0$  állapot  $\rho^0 \varepsilon^0$  és  $\omega\pi^0$ -n keresztül egyenlően érhető el,  $f_{\rho'}^2/4\pi = 13 \pm 5$ .

7.4. A múlt évben a Berkeley-SLAC együttműködés a  $\gamma p \rightarrow p 2\pi^+ 2\pi^-$  átmenetben perdöntően bizonyította a  $\rho'$  helyén fellépő csúcsot [18]. 250  $2\pi^+ 2\pi^-$  végállapot tömegeloszlásának analízise a  $\rho'$  helyén telítődést mutatott; a végállapot  $\rho^0 \sigma$ -n keresztül jött létre ( $\sigma$ :  $I=0$  s-állapotú  $\pi^+\pi^-$  rendszer). Eredmények:

$$m_{\rho'} = 1,43 \pm 0,05 \text{ GeV}, \quad \Gamma_{\rho'}(E_\gamma = 9,3 \text{ GeV}) = (0,65 \pm 0,1) \text{ GeV},$$

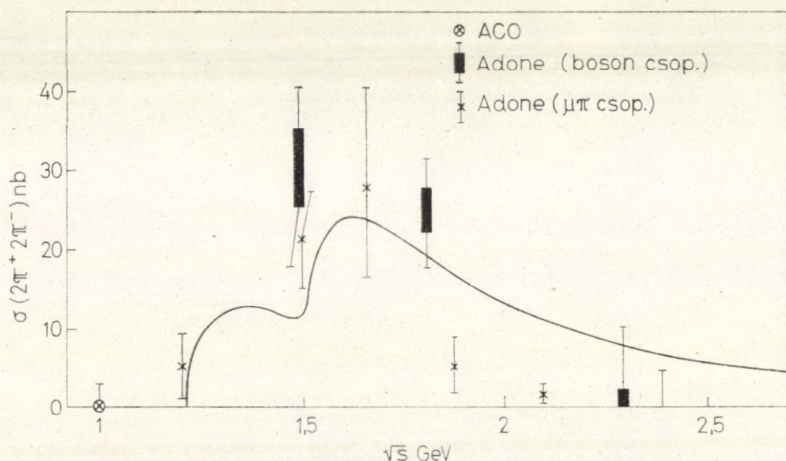
$$\sigma(\gamma p \rightarrow p \rho' \rightarrow p \rho^0 \sigma) = (2,4 \pm 0,6) \text{ nb}, \quad (48)$$

$$\frac{f_{\rho'}^2}{f_\rho^2} \frac{\text{VMD}}{\sigma(\gamma p \rightarrow \rho p)} = 6 \pm 2, \quad \frac{f_{\rho'}^2}{4\pi} = 15,6.$$

7.5. Ismeretes, hogy a VMD modell egyes mezonbomlásokat rosszul jósol (pl.  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ ). A helyzet javítására még 1971-ben feltételezték, hogy az ismert vektor mezon oktett mellett létezik egy másik,  $\rho'$ -t tartalmazó oktett [19]. Ebben a képben  $\Gamma_{\rho'} = 350 \text{ MeV}$  is értelmezhető. Ugyanis  $m_{\rho'}$ ,  $\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$ ,  $\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma)$ ,  $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)$  inputtal a  $\rho' \rightarrow P\bar{P}$ ,  $\omega\pi$ ,  $\rho\eta$ ,  $K\bar{K}$  bomlások szélességei MeV-ben ( $f_{\rho'}/f_\rho$ )-vel szorozva 8, 24, 7 és 4. Ez még csak kb. 215 MeV-et ad  $\Gamma_{\rho'}$ -höz, tehát lényeges bomlásmód hiányzik. Ezért megmutatták, hogy a  $\rho' \rightarrow \rho 2\pi^0$ ,  $\rho' \rightarrow \rho \pi^+ \pi^-$  szélességek szorzói 12, ill. 30. Mindezen bomlásmódok összege a korábbi  $f_{\rho'}^2/f_\rho^2 = 4$  értékkel reprodukálja a kísérleti  $\Gamma_{\rho'}$ -t. Az utóbbi bomlásmód összefér a 7.4-ből kiolvasható

$$\frac{\Gamma(\rho' \rightarrow 4\pi^\pm)}{\Gamma_{\rho'}} = (0,08 \pm 0,02) \left( \frac{f_{\rho'}}{f_\rho} \right)^2 \quad (49)$$

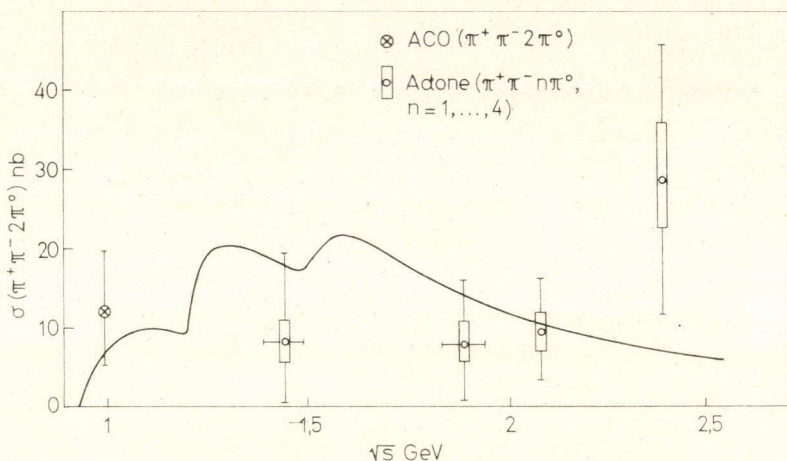
relációval. Végül, (49) megszabja az  $e^+e^- \rightarrow \rho' \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^-$  hatáskeresztmetszet energiafüggését is [2], az így kapott görbe egyezést mutat a 9. ábra kísérleti pontjaival.



11. ábra



7.6. Magyarázhatják-e a  $q'$ -nek tulajdonított csúcsot Kramer—Walsh-farok-effektusok [14]? A 6. §-ban láttuk, hogy a rezonancia + részecske keltés nagy hatás-keresztmetszettel történik. Minthogy a küszöb magasan fekszik, várható, hogy az Adone-eredményekhez  $q'$  feltevése nélkül is nagy járulékokat kapunk ( $q'$  rezonancia jellegét a  $\gamma p \rightarrow p q' \rightarrow p e^+ e^-$  észlelése nagyban alátámasztaná). A főcsatornák a  $2\pi^+ 2\pi^-$ -végállapot számára  $\pi A_1$ ,  $\varepsilon q$ ,  $\pi^+ \pi^- 2\pi^0$ -végállapotra pedig  $\pi A_1$ ,  $\varepsilon q$ ,  $\pi\omega$ . Az ezekből adódó hatáskeresztmetszetek kísérleti eredményekkel (11. és 12. ábra) való össze-



12. ábra

vetése szerint a  $2\pi^+ 2\pi^-$ -keltés kvalitatíve megmagyarázható  $q$ -farokeffektussal (eltekintve  $\sqrt{s} \geq 2$  GeV-től), a  $\pi^+ \pi^- 2\pi^0$ -keltés azonban általában ellenkező tendenciát mutat. Mindenesetre a modell elég sok helyen nyújt javításra lehetőséget, ezért a jövőben nagy hatáskeresztmetszetek magyarázatára izgalmas lehetőséget ígér.

## 8. §. Összegszabályok helyzete

8.1. Általában ismertnek tételezzük fel a vákuumértékek Lehmann-előállítást [1]. A renormált foton időrendezett Green-függvénye impulzus térben a

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{g_{\mu\nu}}{-q^2 + i\varepsilon} - \left( g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{-q^2 + i\varepsilon} \right) \Pi(-q^2) \quad (50)$$

alakba írható és a vákuumpolarizáció eleget tesz a

$$\Pi(s) = e^2 \int_0^\infty \frac{q(t) dt}{t^2(t-s-i\varepsilon)} \quad (51)$$

spektrálelőállításnak,  $q(t)$  a foton spektrálfüggvénye. Ha  $e^2$ -rendben számolunk, akkor  $q(t)$  már csak a hadronkorrekciókat tartalmazza. Ezért az  $e^+ e^-$ -annihiláció



teljes hatáskeresztmetszete hadronokba egy fotoncserés közelítésben

$$\sigma_T(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \Sigma F) \equiv \sigma_T(\Sigma F) = \frac{16\pi^3\alpha^2}{s^2} \varrho(s). \quad (52)$$

Innen a keresett hadronkorrekció

$$\Pi(s) = \frac{1}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty \frac{\sigma_T(\Sigma F) dt}{t-s-i\varepsilon}. \quad (53)$$

(53) többek között az  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  átmenet kvantum-elektrodinamikai hatáskeresztmetszetét is megváltoztatja

$$\frac{d\sigma}{d\cos\vartheta} = \left( \frac{d\sigma}{d\cos\vartheta} \right)_0 |1-s\Pi(s)|^2 \quad (54)$$

(Cabibbo—Gatto, 1961), a 0 index a  $\Pi=0$  esetre utal. (54) hadronkorrekcióit a  $\Phi$  tömeg közelében 1972-ben mérték ki [2].

(50)-ből a téregyenlet felhasználásával [1] a Schwinger-tag

$$\langle 0 | [j_0^{\text{elm}}(x, 0), j_k^{\text{elm}}(0)] | 0 \rangle = -i\partial_k \delta(x) \int_0^\infty \frac{\varrho(t) dt}{t}, \quad (55)$$

másszóval

$$C^{\text{SCHW}} = \frac{1}{16\pi^3\alpha^2} \int_0^\infty t \sigma_T(\Sigma F) dt. \quad (56)$$

A müon anomális mágneses momentumának hadronkorrekciói [3]

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2} = \frac{1}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty \sigma_T(\Sigma F) K_\mu^{(2)}(t) dt, \quad (57)$$

$K_\mu^{(2)}(t)$  a vertex függvény  $e^2$ -rendben ( $t \rightarrow \infty$ -re  $K_\mu^{(2)} \sim t^{-1}$ ). A hadronkorrekciók a töltésrenormalást is befolyásolják

$$\delta e_0^2 = e_0^2 - e^2 = e^2(Z_3^{-1} - 1) = e^4 \int_0^\infty \frac{\varrho(t) dt}{t^2} = \frac{1}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty \sigma_T(\Sigma F) dt. \quad (58)$$

Ha  $\sigma_T(\Sigma F)$  valóban  $s^{-1}$ -ként viselkedik  $s \rightarrow \infty$ -re, akkor  $C^{\text{SCHW}}$  lineárisan,  $\delta e_0^2$  logaritmikusan divergál;  $\Pi, a_\mu$  konvergál. Ha a Schwinger-tag véges,  $\delta e_0^2, \Pi, a_\mu$  is. Áramalgebraiban, szabad kvark terek áramaiból kiindulva,  $C^{\text{SCHW}}$  kvadratikusan divergál, innen  $\sigma_T(\Sigma F)$  nagy  $s$ -re állandó és  $\Pi, a_\mu, \delta e_0^2$  divergál ( $Z_3=0$ ). Téralkalgebraiban véges csúpsz tömegre  $C^{\text{SCHW}}$  véges és  $\sigma_T(\Sigma F) \sim s^{-3-\varepsilon}$  kis pozitív szám.

8.2. VMD-közelítésre áttérve, először is

$$\sigma_T(\Sigma F) = \sum_{F,V} \sigma_T(e^+e^- \rightarrow V \rightarrow F) = \sum_V \sigma_T(e^+e^- \rightarrow V), \quad (59)$$

$\sigma_T(e^+e^- \rightarrow V)$  a  $V$  vektor mezon keltésének teljes hatáskeresztmetszete. Az első egyenlőségénél elhagytuk a  $V_1 + F \rightarrow V_2 + F$  típusú nemdiagonális tagokat, mint



kicsiket. Ha a  $V$  vektor mezon propagátora levonásmentes diszperziós relációnak tesz eleget, akkor belátható [2, 3]

$$x_V = \frac{m_V^2}{W_V(0)} = \frac{\int_0^\infty t \sigma_T(e^+ e^- \rightarrow V) dt}{12\pi^2 \Gamma(V \rightarrow e^+ e^-) m_V}. \quad (60)$$

Egy levonásos diszperziós relációt használva [2, 3]:

$$y_V = \left( \frac{m_V^2}{W_V(0)} \right)^2 (1 - W'_V(0)) = \frac{m_V \int_0^\infty \sigma_T(e^+ e^- \rightarrow V) dt}{12\pi^2 \Gamma(V \rightarrow e^+ e^-)}. \quad (61)$$

Tegyük (60), (61)-et (56), (58)-ba:

$$C^{SCHW} = \sum_V x_V \frac{m_V^2}{f_V^2}, \quad \frac{\delta e_0^2}{e^2} = 4\pi\alpha \sum_V \frac{y_V}{f_V^2}. \quad (62)$$

A korábbi FFGS-modellben  $x_\rho=0,93$ ,  $x_\omega=1$ ,  $x_\phi=1,15$ ,  $y_\rho=0,95$ ,  $y_\omega=1$ ,  $y_\phi=1,075$ . (62)-be helyettesítve  $C^{SCHW}=35 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2$ ,  $\delta e_0^2/e^2=5 \cdot 10^{-3}$ . Hasonlóan  $a_\mu = (6,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-8}$ , míg a kvantumelektrodinamikában hatodrendben  $(116587 \pm 2) \cdot 10^{-8}$ . Kísérleti érték:  $(116616 \pm 31) \cdot 10^{-8}$ . A VMD-közelítés ésszerű hadron-korrekciókat szolgáltat.

8.3. Térjünk rá a Weinberg-féle összesszabályok [1] helyzetére [20].

Ismeretes, hogy az eredeti két Weinberg-összesszabály,

$$\int_0^\infty \frac{\varrho_V - \varrho_A}{t} dt = e_\pi^2, \quad \int_0^\infty (\varrho_V - \varrho_A) dt = 0, \quad (63)$$

$\varrho$ ,  $A_1$ -közelítésben az igen jól teljesülő  $m_A = \sqrt{2} m_\rho$  relációra vezet.  $\varrho'$  figyelembevételével azonban az egyezés elromlik, pl. (63)-ba KSFR (1.3.4. pont) és előbbi relációt téve  $m_\rho/m_\omega = \sqrt{2}$  adódik, míg a helyes arány 2. Láthatóan fel kell tételezni  $\varrho'$  csavar partnerét is,  $A'_1$ , ami (63)-at rendbe hozhatja.  $A'_1$  az  $A_1$  mezon testvére,  $G = -1$  többpion végállapotokban keresendő. Azt várjuk, hogy  $m_{A'}$  aránylag közel essék  $m_\rho$ -höz [20].

A ( $j=3$ ,  $i=8$ ) Weinberg-féle első összesszabály [1],  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\Phi$ ,  $\varrho'$ -közelítésben

$$\sum_{i=\omega, \Phi} m_i \Gamma(i \rightarrow ll) = \frac{1}{3} \sum_{i=\varrho, \varrho'} m_i \Gamma(i \rightarrow ll). \quad (64)$$

A szimmetriasértéssel tökéletesített második Weinberg-összesszabály [1]  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\Phi$ ,  $\varrho'$ ,  $K^*$ -közelítésben:

$$-\frac{1}{3} \sum_{i=\varrho, \varrho'} m_i (m_i^2 - 4m_K^2) \Gamma(i \rightarrow ll) = 3 \sum_{i=\omega, \Phi} m_i^3 \Gamma(i \rightarrow ll). \quad (65)$$

Numerikus adatok [10] a 3. táblázatban láthatók [20]. (64)  $f_{\varrho'}$  nagyobb, (65) pedig  $f_{\varrho'}$  kisebb értékeit tünteti ki. Látható azonban, hogy további javulást  $\omega$  és  $\varrho'$  újabb testvérei eredményezhetnének (vagy megfelelően nagyobb kontinuum).



## 3. TÁBLÁZAT

járulék

	$\omega + \Phi$	$q$	$q'$	$f_q^2/4\pi$
(64):	2	1,4	1,5	10
	2	1,4	0,9	17
(65):	5,6	3,7	0,9	10
	5,6	3,7	0,5	17

A  $q'$  véges szélesség korrekcióktól nem várjuk a mérleg teljes helyreállítását.

8.4.  $q'$  feltételezésével némiképpen javul a fotokeltés összszabályának helyzete is. Mielőtt erre rátérnénk, térjünk vissza a VMD (19) alatti alapegyenleténél felmerülő folytatási problémákra. Ha  $q^2=0$ ,  $V=q$ , (19) bal oldala a  $\gamma_{\text{izov.}} + A \rightarrow B$  átmenetet írja le, a jobb oldal — feltéve, hogy  $q$  mátrixeleme  $q^2=m_V^2$ -től  $q^2=0$ -ig simán extrapolálható — a  $q^0 + A \rightarrow B$  átmenetet írja le. Pl.

$$T(\gamma p \rightarrow \gamma p) \cong \sum_V \frac{e}{f_V} T(\gamma p \rightarrow V p). \quad (66)$$

Mint hogy  $\gamma$  transzverzális polarizációval rendelkezik, kell, hogy a  $V$  vektormezon is transzverzális legyen. Mint hogy azonban a polarizáció rendszerfüggő, kérdezhetjük: melyik rendszerben hasonlít a foton legjobban a vektor mezonra? Nem mindegy, hogy az említett simasági feltevést melyik rendszerben kötjük ki, általában a sima amplitúdók alkalmas vonatkoztatási rendszerekben elvesztik simaságukat.  $V \lambda = \pm 1, 0$  helicitásához tartozó  $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$  polarizációs vektorok az  $e_{xyz}$  ( $x, y, z$  irányú) lineáris polarizációs egységvektorokból

$$\varepsilon_\mu^{(\pm)} = \mp \left( \frac{e_x \pm i e_y}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \varepsilon_\mu^{(0)} = \frac{1}{m_V} (q_0 e_z, i |q|) \quad (67)$$

szerint épülnek fel,  $q_\mu = (p^B - p^A)_\mu$ ,  $V$  impulzusa  $z$  irányú,  $\varepsilon^{(\lambda)} \cdot q = 0$ .  $V + A \rightarrow B$ -hez tartozó helicitásamplitúdók

$$f_\pm = \varepsilon_\mu^{(\pm)} \langle B | j_\mu^V(0) | A \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \langle B | j_x^V(0) \pm i j_y^V(0) | A \rangle, \quad (68)$$

$$f_0 = \varepsilon_\mu^{(0)} \langle B | j_\mu^V(0) | A \rangle = \langle B | j_z^V(0) | A \rangle \frac{q^2}{m_V q_0},$$

ugyanis áram megmaradásból

$$\langle B | j_0^V(0) | A \rangle = \frac{|q|}{q_0} \langle B | j_z^V(0) | A \rangle. \quad (69)$$

$V$  transzverzális amplitúdójának simasága  $q^2$ -ben a  $\lambda = \pm 1$  helicitás amplitúdók simaságát jelenti, ez már relativisztikus kijelentés.  $f_0$  lineárisan nő  $\sqrt{q^2}$ -tel, ha  $j_r^V(0)$



mátrixeleme simán változik. Ilyen példák mutatják, hogy a VMD-relációk helicitás-rendszerben igazak. Bármely más rendszerbeli VMD-relációt a helicitás-rendszerből átranzformálva kapunk meg.

8.5. Visszatérve a fotokeltés összesszabályra (Stodolsky és mások, 1967), jelölje a  $\gamma p$ -rendszer energiáját tömegközépponti rendszerben  $W$ , a fotoabszorpció teljes hatáskeresztmetszetét protonon  $\sigma_{\gamma p}(W^2)$ , a  $V^{\lambda=\pm 1} + p$  ütközés teljes hatáskeresztmetszetét  $\sigma_{Vp}^{\lambda=\pm 1}(W^2)$  és

$$r_V = \left( \frac{e}{f_V} \right)^2 \frac{\sigma_{Vp}^{\lambda=\pm 1}(W^2)}{\sigma_{\gamma p}(W^2)}. \quad (70)$$

VMD-közelítésben [22]

$$\sigma_{\gamma p} r_V = \left[ 16\pi \left( \frac{e}{f_V} \right)^2 \frac{d\sigma}{dt} (\gamma p \rightarrow Vp) |_{t=0} \cdot (1 + \eta_V)^{-2} \right]^{1/2}, \quad \sum_V r_V = 1, \quad (71)$$

ahol  $\eta_V$  az előre vektor mezon keltési amplitúdó valós és képzetes részének aránya.  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\Phi$  közelítésben [23]

$$r_\varrho = 0,65 \quad r_\omega = 0,08 \quad r_\Phi = 0,05, \quad (72)$$

azaz (71)-ből 22% hiányzik.  $\varrho'$  további 11%-kal javítja az összesszabályt, a hiányzó 11%-ot magasabb vektor mezonok magyarázhatnák.

## 9. §. Általánosított VMD-modell

9.1. Az előző §-ban láthattuk, hogy  $\varrho'$  sok összesszabály javítására képes, s további vektorállapotokra is szükség van. A 7.5. pontban egy új vektor ponett nyújtotta lehetőségekre mutattunk rá. E vonatkozásban a  $P \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $PP\gamma$ ,  $V \rightarrow P\gamma$ ,  $PPP$  bomlások jobb leírására is rámutattak [24]. (71) helyzete tovább javul végtelen sok  $V$  feltételezésével [19].

Foglalkozzunk most a végtelen sok vektor mezon feltevésével; ha az  $e^+e^-$  annihiláció és mélyen rugalmatlan  $e^+p$ -szórás törvényeit is megértjük, akkor egy nagy és egy kis energiákon egyaránt használható képhez jutottunk, szemben a fénykúp-, vagy parton-fizikával. (A különféle képek közös eredete egyszer bebizonyulhat.) Ebben az irányban biztató jelek látszanak [25]:

a)  $\sigma_T(\Sigma F)$  végtelen sok vektor mezon feltételezésével az

$$\frac{m_n^2}{f_n^2} \rightarrow \text{állandó}, \quad n \rightarrow \infty \quad (73)$$

feltétel mellett viselkedik  $s^{-1}$ -ként. (73)  $\varrho$ ,  $\varrho'$ -re jól teljesül. Ha az egyes  $m_n^2$  tömegek lineáris (Veneziano) tömegképletnek tesznek eleget,  $\sigma_T(\Sigma F)/\sigma(\mu\bar{\mu}) \approx 1,25$  (1.7.1.).

b) Az előbbi gondolat körben egyszerű modelleket konstruáltak az elektrokeltésben a skálázás és neutron-proton arány megértésére. Lényegében ezeket az eredményeket diszkrét vektorállapotok helyett folytonosan elhelyezkedő  $V$ -állapotokkal is elérték [23, 26] (l. következő pont).



9.2. A térszerű,  $q^2 > 0$ , tömegű transzverzális foton protonon való abszorpciójának teljes hatáskeresztmetszete 8.4.5 jelöléseivel:

$$\sigma_T(W^2, q^2) = \frac{2\pi\alpha}{K} (2\pi)^4 \sum_B |\langle B | j_{x,y}^{\text{elm}}(0) | p \rangle|^2 \delta^4(p + q - p^B), \quad (74)$$

$$K = \frac{1}{2m_p} (W^2 - m_p^2) = \nu - \frac{q^2}{2m_p}, \quad (75)$$

$$q = (0, 0, q_z), \quad p = (0, m_p), \quad q = (q, i\nu), \quad E - E' = \nu, \quad E(E')$$

az elektrokeltésben a belépő (kilépő) elektron energiája. (19)-ből

$$\sigma_T(W^2, q^2) = \sum_V \frac{r_V}{(1 + q^2/m_V^2)^2} \sigma_{\gamma p}(W^2). \quad (76)$$

$q^2=0$ -ra  $\sigma_T(W^2, 0)$  éppen a valódi fotoabszorpciót írja le, (76) (71)-et reprodukálja. (Kihasználtuk, hogy a nemdiagonális  $V$ -átmenetek kicsik.)

(74)-hez hasonlóan, a longitudinális virtuális fotonabszorpció VMD-közelítésben

$$\sigma_S(W^2, q^2) = \sum_V \frac{q^2 r_V \xi_V}{m_V^2 (1 + q^2/m_V^2)^2} \sigma_{\gamma p}(W^2), \quad (77)$$

$$\xi_V = \frac{\sigma_{Vp}^{\lambda=0}}{\sigma_{Vp}^{\lambda=\pm 1}}.$$

Szokásos VMD-közelítésben (76)  $q^{-4}$  viselkedést jósol, éles ellentétben a kísérletekkel,  $q'$  betétele sem sokat segít. Továbbá,  $R = \sigma_S/\sigma_T \approx q^2/m_\rho^2$ , valójában pedig alig függ  $q^2$ -től. Minthogy nagyenergiájú elektrokeltésről van szó,  $W^2 \gg q^2$ ,  $\omega' = 1 + \frac{W^2}{q^2} \gg 1$ , kis tömegű  $V$  betehető volt. Hogy  $W^2 \gg q^2$ -re mégis magyarázhatassuk a mélyen rugalmatlan  $e^-p$ -szórást, ki kell mozdulnunk az alacsonyan fekvő  $V$ -közelítésből, (76) kontinuum általánosítása [23]:

$$\sigma_T(W^2, q^2) = \int_0^\infty dm^2 \frac{\varrho_T(W^2, m^2)}{(1 + q^2/m^2)^2} \quad (78)$$

(nemdiagonális  $V$ -szórás korrekció elhagyva). (78) abban is több (76)-nál, hogy  $q^2 > 0$ -tól  $q^2 \approx -m^2$ -ig (pl. nagy fix  $m^2$ )  $V$  keltése,  $\varrho_T$ ,  $q^2$ -től független.

Hasonlóan, (77) általánosítása

$$\sigma_S(W^2, q^2) = \int_0^\infty dm^2 \frac{q^2 \varrho_S(W^2, m^2)}{m^2 (1 + q^2/m^2)^2}. \quad (79)$$

Az  $e^-p$ -inelasztikus szórás struktúra függvényei

$$W_1 = \frac{K}{4\pi^2\alpha} \sigma_T, \quad W_2 = \frac{K}{4\pi^2\alpha} \frac{q^2}{q^2 + \nu} (\sigma_T + \sigma_S) = W_2^T + W_2^L. \quad (80)$$

$W_1$  és  $\nu W_2$  skálázása csak a  $\varrho_T \sim m^{-4}$  (nagy  $m$ )  $\rightarrow \sigma_T \sim q^{-2}$ ,  $q^2 \rightarrow \infty$  esetben következik be, feltéve, nagy  $W$ -re  $\sigma_T$  független  $W$ -től.  $\nu W_2^L$  skálázásának feltétele:  $\varrho_S m^{-4}$ -nél gyorsabban tart 0-hoz  $m \rightarrow \infty$ -re, vagy  $V$  véges (77)-ben.



A kontinuumot közelítsük pólus-alakkal, mint szokásos, és vizsgáljuk a következő modellt

$$\begin{aligned} \varrho_T &= \left( \sum_{\varrho, \omega, \Phi} r_V \delta(m^2 - m_V^2) + r_c \frac{m_0^2}{m^4} \Theta(m^2 - m_0^2) \right) \sigma_{\gamma p} \\ \varrho_S &= \left( \sum_{\varrho, \omega, \Phi} r_V \xi_V \delta(m^2 - m_V^2) + r_c \xi_c \frac{m_0^2}{m^4} \Theta(m^2 - m_0^2) \right) \sigma_{\gamma p}, \end{aligned} \quad (81)$$

$r_c, m_0, \xi_c$  állandók. (81)-ből

$$\begin{aligned} \sigma_T &= (76) + \frac{r_c \sigma_{\gamma p}}{1 + q^2/m_0^2}, \\ \sigma_S &= (77) + \xi_c r_c \left[ \frac{m_0^2}{q^2} \ln \left( 1 + \frac{q^2}{m_0^2} \right) - \frac{1}{1 + q^2/m_0^2} \right] \sigma_{\gamma p}. \end{aligned} \quad (82)$$

A kontinuum kezdetére ésszerű  $m_0 = 1,4$  GeV-et venni,  $r_c$  a Stodolsky-összegszabályból következik,  $r_c = 0,22$ . A maradék paraméterek két választását hasonlítjuk össze a SLAC—MIT kísérletekkel: I.  $\xi_V = \xi_c = \xi = \text{állandó}$ , II.  $\xi_V = \xi = \text{állandó}$  ( $V = \varrho, \omega, \Phi$ ),  $\xi_c = 0$ . Legyen  $\xi = 0,25$ . Eredmények [23]: 1.  $\nu W_2$  II-ben skálázik, I-ben logaritmikusan sérül a skálázás. Mindkét modell reprodukálja a jelenleg kimért  $\nu W_2$  vs.  $q^2$  pontokat. 2. Mindkét modell összefér a  $\sigma_S/\sigma_T$  arány mért pontjaival. Az I. modelltől közölték, hogy a mért  $\sigma_T + \varepsilon \sigma_S$  vs.  $q^2$  pontok jól egyeznek a számítottakkal,  $\varepsilon = 0,59 - 0,91$  és  $W = 3$  GeV, 4 GeV.  $\omega' \cong 8$ -ra különösen jó az illeszkedés.

A most tárgyalt  $W^2 \gg q^2 > 0$  tartományban pomeron csere domináns. Kisebb  $\omega'$ -nél nempomeron járulékok is bejönnek, a neutron-proton arány,  $\sigma_T^n/\sigma_T^p$  erre érzékeny. A fenti kép könnyen általánosítható  $p$  és  $n$  tárgyalására [26], (78)-ba most  $V$  tömegben diagonális, izospionban diagonális és nemdiagonális tagok is bejönnek ( $\varrho_T \rightarrow \varrho_T^{AI=0} \pm \varrho_T^{AI=1}$ ). Az összes paraméterek fotokeltés adatokból meghatározhatók és  $\sigma_T^n/\sigma_T^p$  a teljes mért tartományban jól reprodukálódik még egyhez közeli  $\omega'$ -nél is.

Kis  $\omega'$ -nél a  $\gamma_{\text{virt.}} + N \rightarrow N +$ -mezon rendszer átmenet küszöbének erős  $\omega'$ -függése ( $q^2 \cong W_{\text{nagy}}^2$ ) a határkeresztmetszetek  $q^2$ -függésének megváltozását okozza (ezt a fentiekben nem vettük figyelembe). Amint  $q^2$  nő,  $W$  fix, a küszöb is nő. E függés egy  $\omega' \rightarrow 1$ -re exponenciálisan levágó kinematikai faktorról szorozva a korábbi  $\sigma_T$ -t (és  $n/p$ -ből kiesik). Az így kiegészített kép a mélyen rugalmatlan  $e^-p$ -ütközések minden jelenleg ismert tulajdonságát magyarázza.

## 10. §. Összefoglalás

A vektor mezonok több, mint 30 éve jelentek meg, először a magerők elméletében. Több, mint 10 éve kísérletileg is ismerünk vektor mezon típusú rezonanciákat, ezek kb. a 760 MeV—1,6 GeV tartományban foglalnak helyet, s a megfelelő csatornában lényegében uralják az amplitúdókat. Létrejöttük mikroszkópikus körülményei (milyen alkotórészekből állnak életükben), végső számuk még nem ismeretesek. Elméletileg azonban inkább végtelen sok (vektor) nívót könnyebb jóslani (pl. Bethe—Salpeter-egyenletből). Elég jól ismertek bomlásaik és kevésbé keltésük elmélete.



Amennyiben valóban végtelen sok közelfekvő vektor állapot létezik, a hatáske-  
resztmetszet leírásába csak az adott energia közelébe eső néhány vektor állapot szól be-  
le lényegesen. A helyzet azáltal bonyolódhat, hogy egyes rezonanciák nagy farok-  
effektusokat produkálnak. Ha megbízhatóan tudnánk jósolni a vektor állapotok  
tömegspektrumát, kísérletet lehetne tenni a rezonanciák kiátlagolódásának vizs-  
gálatára Adone-energiákon túl is. Jelenlegi energiákon inkább a farokeffektusok  
másodlagosságára következtetünk.

Az a tény, hogy Adone-energiákon a sokpionos hatáske-  
resztmetszetek nagyok, önmagában is jelentős és pontosabb mérések modell-osztályokat végleg kizárhatnak.  
A jelen elméleti háttér azonban különféle csatornák összekapcsolására is képes,  
ily módon sok összesszabályban többféle nagy járulékot várunk.

Az általánosított VDM további megalapozásával a magerők mezonelmélete is  
újjaszülethet.

### IRODALOM

1. Pócsik Gy.: Kvantumtérelmélet és diszperziós relációk, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó Budapest, 1970.
2. Hráskó P., XI. Magyar Elméleti Fizikai Iskolán tartott előadás, 1973.
3. M. Gourdin, Előadások a 11. Skót Egyetemek Nyári Iskoláján, 1970.
4. G. Gounaris és J. J. Sakurai, Phys. Rev. Lett., 21, 244, 1968.
5. W. R. Frazer és J. Fulco, Phys. Rev. Lett., 2, 365, 1959 és Phys. Rev., 117, 1503, 1609, 1960.
6. D. Benaksas és mtsi., Phys. Lett., 39B, 289, 1972.
7. D. N. Levin és S. Okubo, Rochester preprint UR-386, 1972.
8. B. Bartoli és mtsi., Frascati preprint LNF-72/69, 1972.
9. H. Phister, Tübingen preprint, 1970.
10. A. H. Rosenfeld és Mtsi., Particle Properties, 1972.
11. D. Benaksas és mtsi., Proc. 1 st EPS Conf. Bologna, 1971. 235. o. és Orsay preprint, 1972.
12. E. Cremmer és M. Gourdin, Nucl. Phys., B10, 179, 1969.
13. H. Goldberg és Y. Srivastava, Phys. Rev. Lett., 22, 749, 1232, 1969.
14. G. Kramer, Proc. CERN School, Grado, 1972, 403 o.
15. B. Borgia és mtsi., Frascati preprint LNF-72/71, 1972.
16. V. Silvestrini, Trieszti előadás, 1972.
17. F. Ceradini és mtsi., Frascati preprint, LNF-72/90, 1972.
18. G. Wolf, DESY preprint, 72/61, 1972.
19. A. Bramon és M. Greco, Lett. Nuovo Cimento, 3, 693, 1972.
20. Pócsik Gy., ITP—Budapest, Report No. 314, 1973.
21. J. J. Sakurai, Erice előadás, UCLA (71). TEP 39, 1971.
22. L. Stodolsky, Phys. Rev. Lett., 18, 135, 1967.
23. J. J. Sakurai és D. Schildknecht, Phys. Lett., 40B, 121, 1972.
24. A. Bramon és mtsi., Frascati preprint, LNF-72/20, 1972.
25. A. Bramon és mtsi., Frascati preprint, LNF-72/45, 1972.
26. J. J. Sakurai és D. Schildknecht, UCLA/72/TEP/57, 1972; SLAC-PUB-1094, 1972.







# KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

## CSOPORTOK ÉS ÁBRÁZOLÁSAIK KONTRAKCIÓJÁRÓL

ERDAL INONU ÉS WIGNER JENŐ

### BEVEZETÉS

A klasszikus mechanika határesetek a relativisztikus mechanikának. Ennélfogva az előbbinek a csoportja, a Galilei-csoport, bizonyos értelemben a relativisztikus mechanika csoportjának határesetek kell, hogy legyen; az előbbinek az ábrázolásait mint az utóbbi ábrázolásainak határesetét kell megkapnunk. Vannak más példák is hasonló kapcsolatra csoportok között. Így az inhomogén Lorentz-csoportnak ugyanilyen értelemben a de Sitter-csoportok határesetének kell lennie. E közlemény célja: meglehetősen általánosan megvizsgálni, milyen értelemben lehetnek bizonyos csoportok más csoportoknak a határesetek (I. szakasz), és miképpen kaphatók meg ábrázolásaik azon csoportok ábrázolásaiból, amelyeknek ők maguk a határesetek (II. szakasz). A III. szakasz röviden tárgyalja az átmenetet az inhomogén Lorentz-csoportból a Galilei-csoportba. Itt megmutatjuk, miképpen kapjuk meg a Galilei-csoportnak a Schrödinger-egyenletben foglalt, tényező erejéig adott ábrázolását, mint az inhomogén Lorentz-csoport ábrázolásának határesetét, azonkívül okát adjuk annak, hogy a Galilei-csoport igazi ábrázolásainak fizikai értelmezése miért nem lehetséges.

### I. CSOPORTOK KONTRAKCIÓJA

Tekintsünk valamely tetszőleges Lie-csoportot, melynek  $n$  paraméterét  $a^i$ -vel, infinitezimális operátorait pedig  $I_i$ -vel jelöljük. Ezeket a szokásnak megfelelően az

$$I_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h e_i) - g(0)}{h} \quad (1)$$

képlet adja meg, ahol a 0 az egységelem paramétereit adja meg,  $e_i$  pedig  $a^i$ -nek eggyel való megnövelésében különbözik a 0-tól. Ha a csoport unitér mátrixokból áll, az  $I_j$ -k antihermitikus mátrixok; helyettük gyakran használják az  $iI_j$  hermitikus mennyiségeket. Egyenleteink valamivel egyszerűbbek maradnak, ha az  $I_j$ -k segítségével írjuk fel őket. A  $C$  szerkezeti állandókat

$$[I_i, I_j] = \sum_k C_{ij}^k I_k \quad (2)$$

definiálja. Ha az  $I_i$ -ket lineáris homogén nem-szinguláris transzformációnak vetjük alá, a  $C$ -k helyét más állandók foglalják el. Ezeket a  $C$ -kből a felső és alsó indexek kontragrediens transzformációja útján kapjuk. Az ilyen transzformációnak ter-



mészetesen nincs hatása a csoport szerkezetére. Jelölje a szóban forgó transzformációt

$$J_v = \sum_i I_i U_v^i. \quad (3)$$

Ez a

$$a^i = \sum_{\kappa} U_{\kappa}^i b^{\kappa} \quad (3a)$$

transzformációnak felel meg; eszerint a  $J$ -k ugyanazon, (1) alatt felírt egyenlet segítségével kaphatók meg, mint az  $I$ -k, azzal az eltéréssel, hogy az  $e_i$ -ket ebben az egyenletben a  $b$ -kre vonatkozóan definiált analóg mennyiséggel kell helyettesíteni.

A fenti transzformáció új csoporthoz csak akkor vezethet, ha a (3) egyenlet  $U$  mátrixa szinguláris. A műveletet, mellyel új csoportot kapunk a régi csoport infinitezimális elemeinek szinguláris transzformációja útján, ez utóbbi csoport *kontrakciójának* fogjuk nevezni. Ezen elnevezés oka alább majd kiviláglik. A szinguláris mátrix határesetete lesz egy nem-szinguláris mátrixnak. Az utóbbi lineárisan fog függni az  $\varepsilon$  paramétertől, mely majd zérushoz tart:

$$U_v^i = u_v^i + \varepsilon w_v^i. \quad (4)$$

Ha  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , (4) determinánsa zérustól különböző,  $\varepsilon=0$  esetén pedig eltűnik.

A (4) egyenletet  $J_v$ -nek, valamint  $I_i$ -nek nem-szinguláris és  $\varepsilon$ -tól független transzformációja segítségével normálalakra fogjuk hozni. Ha a megfelelő transzformációk mátrixait  $\alpha$ -val, ill.  $\beta$ -vel jelöljük,  $u$  és  $w$  helyére  $\beta u \alpha^{-1}$  és  $\beta w \alpha^{-1}$  lép. Ilyen transzformáció segítségével  $u$ -nak és  $w$ -nek az

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

alakot adhatjuk. Az egységmátrix sorainak és oszlopainak száma  $u$ -ban, valamint  $v$  sorainak és oszlopainak száma egyenlő az  $u$  mátrix + rangjával. Célszerű a transzformált  $J$  és  $I$  mátrixokat egy indexpárral jellemezni; az első index  $u$ -nak (5) alatt megadott felbontására vonatkozik, a második pedig ezen felbontáson belül jellemzi az egyes  $J$  és  $I$  mátrixokat. Eszerint (3) a

$$J_{1v} = I_{1v} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^r v_{\mu v} I_{1\mu} \quad (v = 1, 2, \dots, r),$$

$$J_{2v} = \varepsilon I_{2v} \quad (v = 1, 2, \dots, n-r) \quad (6)$$

alakot ölti. A csoportparaméterek megfelelő transzformációja:

$$a_{1v} = b_{1v} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^r v_{\mu v} b_{1\mu} \quad (v = 1, 2, \dots, r),$$

$$a_{2v} = \varepsilon b_{2v} \quad (v = 1, 2, \dots, n-r). \quad (6a)$$

Jó visszaemlékezni arra, hogy az  $a$  paraméterek az  $I$ , a  $b$  paraméterek a  $J$  infinitezimális elemekre vezetnek. Az utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy a  $b$  paraméterek adott rendszere csökkenő  $\varepsilon$  mellett az  $a_2$  paraméterek mind kisebb és kisebb értékeinek felel meg. Az  $\varepsilon=0$  limeszben (ha ez a limesz létezik) az egész csoport az egyedül



az paraméterekkel definiált csoport infinitezimálisan kicsiny környezetére kontrahálódik. Ez indokolja a vizsgált eljárás elnevezését.

Az infinitezimális elemek fent elvégzett transzformációja megváltoztatja a szerkezeti állandókat is; (2) helyett írjuk:

$$[I_{\alpha\nu}, I_{\beta\mu}] = \sum_{\kappa=1}^r C_{\alpha\nu, \beta\mu}^{1\kappa} I_{1\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{n-r} C_{\alpha\nu, \beta\mu}^{2\kappa} I_{2\kappa}; \quad (7)$$

itt  $\alpha$  és  $\beta$  az 1 és 2 értékeket veheti fel. Ily módon kapjuk:

$$\begin{aligned} [J_{1\nu}, J_{1\mu}] &= [I_{1\nu}, I_{1\mu}] + \varepsilon \sum (v_{\nu\nu'} \delta_{\mu\mu'} + \delta_{\nu\nu'} v_{\mu\mu'} + \varepsilon v_{\nu\nu'} v_{\mu\mu'}) [I_{1\nu'}, I_{1\mu'}] = \\ &= \sum_{\kappa} C_{1\nu, 1\mu}^{1\kappa} J_{1\kappa} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\kappa} C_{1\nu, 1\mu}^{2\kappa} J_{2\kappa} + 0(1). \end{aligned}$$

Eszerint ha  $J_{1\nu}$  és  $J_{1\mu}$  kommutátora  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén a  $J$ -k valamely lineárkombinációjához konvergál, a szerkezeti állandókra fennáll:

$$C_{1\nu, 1\mu}^{2\kappa} = 0, \quad (8)$$

azaz: az  $I_{1\nu}$  operátoroknak alcsoporthoz kell kifizíteniük. Másrészt ha ez a helyzet, a szerkezeti állandók  $\varepsilon \rightarrow 0$  mellett meghatározott  $C_{\alpha\nu, \beta\mu}^{1\kappa}$  értékekhez fognak tartani:

$$\begin{aligned} c_{1\nu, 1\mu}^{1\kappa} &= C_{1\nu, 1\mu}^{1\kappa}, & c_{1\nu, 1\mu}^{2\kappa} &= C_{1\nu, 1\mu}^{2\kappa} = 0, \\ c_{1\nu, 2\mu}^{1\kappa} &= 0, & c_{1\nu, 2\mu}^{2\kappa} &= C_{1\nu, 2\mu}^{2\kappa}, \\ c_{2\nu, 2\mu}^{1\kappa} &= c_{2\nu, 2\mu}^{2\kappa} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ezek a szerkezeti állandók eleget tesznek a Jacobi-azonosságnak, minthogy a  $J$ -khez tartozó szerkezeti állandók is eleget tesznek neki el nem tűnő  $\varepsilon$  mellett. Azt fogjuk mondani, hogy a fenti művelet a csoport kontrakciója az  $I_{1\nu}$  infinitezimális elemekre vonatkozóan, vagy hogy az  $I_{2\nu}$  infinitezimális elemeket kontrakciónak vetjük alá. Ekkor (9)-ből adódik az

1. tétel. Minden Lie-csoport kontrahálható bármely folytonos alcsoporthoz és csakis azokra vonatkozóan. Azt az alcsoporthoz, amelyre vonatkozóan a kontrakciót végrehajtjuk,  $S$ -sel jelöljük. A kontrakciónak alávetett infinitezimális elemek Abel-féle invariáns alcsoporthoz képezik a kontrahált csoportnak. Az  $S$  alcsoporthoz, melyre vonatkozóan a kontrakciót végrehajtottuk, izomorf ezen invariáns alcsoporthoz faktorcsoporthoz. Megfordítva, egy Abel-féle invariáns alcsoporthoz létezése és az a lehetőség, hogy ennek minden egyes mellékosztályából kiválasztható egy-egy elem oly módon, hogy ezek egy  $S$  alcsoporthoz képezzenek, szükséges feltétele annak, hogy a csoport egy másik csoportból legyen nyerhető kontrakció útján.

A kontrakció hatása az egész csoportra könnyen szemléltethető. Az  $S$  alcsoporthoz, melyre vonatkozóan a kontrakciót végrehajtjuk, változatlan marad és a csoportparamétereket előnyös oly módon választani, hogy az egész  $S$  alcsoporthoz  $a_{2\nu} = 0$  legyen. Ekkor a (6a) egyenlet a következővel helyettesíthető:

$$a_{1\nu} = b_{1\nu}, \quad a_{2\nu} = \varepsilon b_{2\nu} \quad (6b)$$



és feltehető, hogy ez az egész csoporton érvényes, nem csak az egységelem környezetében. Amint  $\varepsilon$  csökken, a  $b$  paraméterek adott tartománya  $S$  egyre kisebb környezetét fogja leírni. Amint  $\varepsilon$  zérushoz tart, a  $b_{2v}$ -k tartománya végtelenné válik és csak azokat a csoportelemeket írja le, amelyek infinitezimálisan különböznek  $S$  elemeitől. Azok az elemek, amelyek az eredeti csoport egységelemeinek környezetébe esnek, de  $b_{2v}$  paramétereik végesek, kommutálni fognak s ezek képezik az előbb említett kommutatív invariáns alcsoportot. Természetesen ennek az invariáns alcsoportnak az elemei általában nem fognak kommutálni az  $S$  alcsoport elemeivel: az  $a_{2v} = \varepsilon b_{2v}$  paraméterek megváltozása, ha  $S$  véges elemeivel hajtunk végre transzformációt, ugyanolyan nagyságrendű lesz, mint a paraméterek maguk. Természetesen az eredeti csoport konvergenciája a kontrahált csoporthoz tipikusan nem-egyenletes konvergencia.

Minden Lie-csoport kontrahálható bármely egyparaméteres alcsoportjára vonatkozóan. Ha a háromdimenziós forgáscsoportot kontraháljuk ily módon, a kétdimenziós euklideszi csoportot kapjuk. A homogén Lorentz-csoport kontrakciója azon alcsoportra vonatkozóan, amely az időkoordinátát változatlanul hagyja, a homogén Galilei-csoportot adja; az inhomogén Lorentz-csoport kontrakciója a térbeli elforgatások és időbeli eltolások generálta csoportra vonatkozóan a teljes Galilei-csoportot adja. A de Sitter-csoportok kontrakciója az inhomogén Lorentz-csoportot adja. Végül megjegyzendő, hogyha valamely csoportot, amelyet egy másik csoportból nyertünk az  $S$  alcsoportra vonatkozó kontrakcióval, újból kontrahálunk  $S$ -re vonatkozóan, a második kontrakció hatástalan marad.

A fenti megfontolások bizonyos hasonlóságot mutatnak I. E. Segal munkájával.<sup>1</sup> Segal megfontolásai azonban általánosabbak a mieinknél, minthogy ő a Lie-csoportok egy sorozatát vizsgálja, melyeknek szerkezeti állandói egy nem-izomorf csoport szerkezeti állandóihoz tartanak. A fentiekben mi csak egy Lie-csoportot vizsgáltunk, abban azonban a koordinátarendszereknek egy sorozatát vezettük be és azt a határesetet tanulmányoztuk, amikor ezek a koordinátarendszerek szingulárisá válnak. Annak folytán, hogy a mi problémánk korlátozottabb, konkrétabb eredményeket tudtunk levezetni.

## II. ÁBRÁZOLÁSOK KONTRAKCIÓJA

Ha a (6) transzformációt alkalmazzuk annak a csoportnak az infinitezimális elemeire, amelyet kontrakciónak vetettünk alá, és  $\varepsilon$ -nal zérushoz tartunk, a  $J_{2v}$  operátorok szintén zérushoz fognak tartani. Az ábrázolás izomorf lesz az  $S$  alcsoport ábrázolásával, azaz: az invariáns alcsoport faktorcsoporthoz lesz az ábrázolása. Abból a célból, hogy hű ábrázolást kapjunk, vagy egy  $\varepsilon$ -tól függő transzformációnak kell alávétünk a  $J_{2v}$ -ket, vagy pedig különböző ábrázolásoknak megfelelő  $J_{2v}$ -ket kell tekintenünk, pl. egyre magasabb dimenziós ábrázolásokra kell áttérnünk, amint  $\varepsilon$  csökken. Mindkét eljárásra adunk példákat.

<sup>1</sup> Segal, I. E., Duke Math. J., **18**, 221 (1951).



**a) A kontrahált csoport ábrázolása  $\varepsilon$ -tól függő transzformáció alkalmazásával.**

Az első eljárás csak akkor alkalmazható, ha az infinitezimális elemek nem korlátos operátorok, azaz: ami az irreducibilis ábrázolásokat illeti, csak akkor, ha a csoport nem kompakt. A legegyszerűbb nemkompakt nemkommutatív csoport az  $x' = e^\alpha x + \beta$  lineáris transzformációk csoportja. A csoport általános eleme  $O_{\alpha, \beta} = T(\beta)R_\alpha$ ; fennállnak a következő csoportrelációk:

$$T(\beta)T(\beta') = T(\beta + \beta'), \quad R_\alpha R_{\alpha'} = R_{\alpha + \alpha'} \quad \text{és} \quad R_\alpha T(\beta) = T(e^\alpha \beta) R_\alpha.$$

Ezen csoport egyetlen hű irreducibilis unitér ábrázolása a  $0 < x < \infty$  intervallumon négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terében adható meg:

$$R_\alpha \psi(x) = e^{(1/2)\alpha} \psi(e^\alpha x), \quad T_\beta \psi(x) = e^{i\beta x} \psi(x). \quad (10)$$

Az infinitezimális operátorok:

$$I_\alpha = I_1 = \frac{1}{2} + x \frac{d}{dx}, \quad I_\beta = I_2 = ix, \quad (10a)$$

a struktúra-reláció:

$$[I_1, I_2] = I_2. \quad (10b)$$

Az  $x' = e^\alpha x$  transzformáció-csoportra vonatkozó kontrakció változatlanul hagyja a csoportot: az egyetlen el nem tűnő szerkezeti állandó  $C_{12}^2$  és (9) azt mutatja, hogy ez nem változik meg. Megpróbálhatjuk ezért  $I_1$ -et és  $\varepsilon I_2$ -t egy  $\varepsilon$ -tól függő unitér mátrixszal oly módon transzformálni, hogy  $I_1$  változatlan maradjon,  $\varepsilon I_2$  transzformáltja pedig  $I_2$ -höz konvergáljon:

$$S_\varepsilon^{-1} I_1 S_\varepsilon = I_1, \quad \varepsilon S_\varepsilon^{-1} I_2 S_\varepsilon \rightarrow I_2. \quad (11)$$

Ez valóban lehetséges: az  $S_\varepsilon = R_{\ln \varepsilon}$  választással kell élnünk. Ez az operátor kommutál  $I_1$ -gyel. A csoportrelációból következik, hogy

$$S_\varepsilon^{-1} T(\beta) S_\varepsilon = R_{-\ln \varepsilon} T(\beta) R_{\ln \varepsilon} = T(\beta/\varepsilon),$$

így tehát  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén kapjuk:

$$\begin{aligned} \varepsilon S_\varepsilon^{-1} I_2 S_\varepsilon &= \varepsilon S_\varepsilon^{-1} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (T(h) - 1) S_\varepsilon \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon h^{-1} (T(h/\varepsilon) - 1) = I_2. \end{aligned} \quad (11a)$$

Eszerint  $\varepsilon S_\varepsilon^{-1} I_2 S_\varepsilon$  nem csupán konvergál  $I_2 = I_2$ -höz, hanem egyenlő vele minden  $\varepsilon$ -ra.

Meglepőbb ennél talán, hogy ugyanez a módszer akkor is alkalmazható, ha a csoportot a  $T(\beta)$  alcsoportra vonatkozóan kontraháljuk. A kontrahált csoport ebben az esetben a kétparaméteres Abel-csoport. Ebben azt megköveteljük, hogy  $S_\varepsilon$  legyen felcserélhető  $I_\beta$ -val, és így (10a) folytán  $x$  valamely függvényével való szorzás legyen. Minthogy  $S_\varepsilon$  unitér, az  $\exp(if(x, \varepsilon))$  alakban írhatjuk fel. A (10a) képlettel megadott  $\varepsilon I_\alpha$  operátor  $S_\varepsilon$ -nal elvégzett transzformációja az

$$\begin{aligned} \varepsilon S_\varepsilon^{-1} I_\alpha S_\varepsilon &= \varepsilon e^{-if(x, \varepsilon)} \left( \frac{1}{2} + x d/dx \right) e^{if(x, \varepsilon)} \\ &= \varepsilon \left( \frac{1}{2} + x d/dx \right) + \varepsilon i x d/dx f(x, \varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$



eredményt adja. Az első tag 0-hoz konvergál, amint annak lennie is kell, mivel (12)-nek egy  $ix$ -szel kommutáló operátorhoz kell tartania. A második tag  $J_2 = ix f'(x) = ig(x)$ -hez konvergál, ahol az

$$f(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} f(x) \quad (12a)$$

jelölést alkalmaztuk. Eszerint a kontrahált csoportnak az  $\alpha, \beta$  paraméterekhez tartozó transzformációja az

$$e^{i\alpha g(x) + i\beta x} \quad (13)$$

faktorral való szorzás, ami megint hű (reducibilis) ábrázolása a kontrahált csoportnak

A véges csoportelemeknek megfelelő operátorokat közvetlenül megkaphattuk volna  $O_{\alpha, \beta} = T(\varepsilon\beta)R_\alpha$ -nak  $R_{\ln \varepsilon}$ -nal való transzformációja útján. Hasonlóképpen (13)-at is közvetlenül meg lehetett volna kapni  $O_{\alpha, \beta} = T(\beta)R_{\varepsilon\alpha}$ -nak  $\exp(\varepsilon^{-1}if(X))$ -szel való transzformációja útján.

Nem világos azonban, hogy általában miképpen lehet a kontrahált csoport hű ábrázolását megkapni az eredeti csoport hű ábrázolásának  $\varepsilon$ -tól függő transzformációjával és a paraméterek (6b) szubsztitúciójával. Bizonyos, hogy az eljárás nem alkalmazható kompakt csoportok irreducibilis ábrázolásaira, vagy általánosabban, ha az infinitezimális operátorok korlátosak.

#### b) A kontrahált csoport ábrázolásának leszármaztatása az ábrázolások egy sorozatából

Most néhány példát adunk a második eljárásra, amikor is a kontrahált csoport ábrázolását oly módon kapjuk meg, hogy kiválasztjuk az unitér ábrázolások egy  $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(l)}, \dots$  sorozatát, úgyhogy az

$$I_{1\nu}^{(l)}, \varepsilon I_{2\mu}^{(l)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, r; \quad \mu = 1, 2, \dots, n-r) \quad (15)$$

operátorok mindegyike véges operátorhoz konvergáljon, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$  és  $l \rightarrow \infty$ . Megkívánhatjuk ehelyett azt is, hogy a véges csoportelemeknek megfelelő

$$D^{(l)}(b_{1\nu}, \varepsilon b_{2\nu}) \quad (15a)$$

transzformáció konvergáljon a kontrahált csoport unitér ábrázolásához, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$  és  $l \rightarrow \infty$ . A  $b$ -k a kontrahált csoport paraméterei; a (15) operátor az  $l$  ábrázolásban az eredeti csoport azon elemének felel meg, amelynek  $a$  paramétereit (6b) adja meg. A (15a) véges csoportelemek felhasználásával megadott megfogalmazás egyértelmű, mivel unitér operátorok konvergenciájára vonatkozik; az első megfogalmazást rendszerint könnyebb közvetlenül alkalmazni.

A (15) és (15a) sorozatok konvergenciája nem csupán azoktól az értékektől fog függni, amelyeket az  $\varepsilon$  felvesz, valamint a megfelelő  $D^{(l)}$  ábrázolásoktól; függni fog attól is, hogy milyen alakban vesszük fel ezt az ábrázolást. Ennélfogva az (a) módszer az itt tárgyalt módszer azon speciális esetének tekinthető, amikor valamennyi  $D^{(l)}$  unitér-ekvivalens.

A kontrahált csoport mindig nyílt csoport, mivel a  $b$ -k változási tartománya végtelen. Ennélfogva ábrázolásaik rendszerint végtelen dimenziósak. Ha a  $D^{(l)}$ -ek véges dimenziósak, ezt úgy kell felfogni, hogy a Hilbert-tér koordinátái közül csupán véges számúra hatnak.



A legegyszerűbb nemkommutatív kompakt csoport a háromdimenziós forgáscsoport. Ennek minden alcsoportja egyparaméteres; a csoportot a közönséges tér derékszögű koordinátarendszerének  $z$ -tengelye körül végrehajtott elforgatásokra vonatkozóan fogjuk kontrahálni. A kontrahált csoport a sík euklideszi csoportja, azaz: az inhomogén kétdimenziós forgáscsoport. A  $D^{(l)}$ -eknek azokat az ábrázolásokat fogjuk választani, amelyeket szokásosan  $D^{(l)}$ -lél jelölnek.<sup>2</sup> A  $D^{(l)}$  ábrázolás  $2l+1$  dimenziós ( $l$  tetszőleges egész szám) és azt rendszerint olyan térben írják le, amelyben a koordinátatengelyek indexei  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ . Ennek megfelelően a Hilbert-tér koordinátatengelyeit a  $-\infty$ -tól  $\infty$ -ig terjedő összes  $m$  egész számmal indexeltük. Korábbi jelölésünkkel összhangban a  $z$ -tengely körül végrehajtott elforgatásoknak megfelelő infinitezimális elemeit  $M_z = I_1$ -gyel jelöljük. Ekkor  $|m| \leq l$ ,  $|m'| \leq l$  mellett írható:

$$(I_1^{(l)})_{mm'} = (M_z^{(l)})_{mm'} = im\delta_{mm'}, \quad (16)$$

$$(I_{2x}^{(l)})_{mm'} = (M_x^{(l)})_{mm'} = -\frac{1}{2} \sqrt{(l-m)(l+m')} \delta_{m'm+1} + \frac{1}{2} \sqrt{(l-m')(l+m)} \delta_{m'm-1},$$

$$(I_{2y}^{(l)})_{mm'} = (M_y^{(l)})_{mm'} = \frac{i}{2} \sqrt{(l-m)(l+m')} \delta_{m'm+1} + \frac{i}{2} \sqrt{(l-m')(l+m)} \delta_{m'm-1}.$$

Ha  $|m|$  vagy  $|m'|$  nagyobb  $l$ -nél, valamennyi mátrixelem eltűnik. Ha  $l \rightarrow \infty$ ,  $I_1$  a következő jól meghatározott operátorhoz konvergál:

$$(J_1)_{mm'} = im\delta_{mm'} \quad (-\infty < m, m' < \infty). \quad (17a)$$

Ez a konvergencia erős abban az értelemben, hogy  $I_1\varphi$  erősen konvergál  $J_1\varphi$ -hez, ha  $\varphi$  benne van  $J_1$  értelmezési tartományában. Ha  $\varepsilon$  zérushoz,  $l$  pedig végtelenhez tart, oly módon, hogy  $l\varepsilon \rightarrow \Xi$ , a két másik infinitezimális elem is konvergálni fog  $J_{2x}$ -hez, ill.  $I_{2y}$ -hoz, ahol

$$(J_{2x})_{mm'} = \frac{1}{2} \Xi (\delta_{m'm-1} - \delta_{m'm+1}), \quad (17b)$$

$$(J_{2y})_{mm'} = \frac{i}{2} \Xi (\delta_{m'm-1} + \delta_{m'm+1}).$$

Abból a tényből, hogy  $I_{2x}$ -nek és  $I_{2y}$ -nak véges számú (két) zérustól különböző mátrix-eleme van, következik, hogy az  $I_{2x}$ ,  $I_{2y}$  operátorok teljesítik a kontrahált csoport felcserélési összefüggéseit:

$$[J_{2x}, J_{2y}] = 0, \quad [J_1, J_{2x}] = J_{2y}, \quad [J_1, J_{2y}] = -J_{2x}. \quad (18)$$

Az

$$(I_1^{(l)})^2 + (I_{2x}^{(l)})^2 + (I_{2y}^{(l)})^2 = -l(l+1)$$

egyenletből  $\varepsilon^2$ -tel való szorzás és a fenti limesz képzése útján következik, hogy

$$J_{2x}^2 + J_{2y}^2 = -\Xi^2. \quad (18a)$$

<sup>2</sup> Vö. pl Wigner, E., *Gruppentheorie und ihre Anwendungen* etc. Friedr. Vieweg, Braunschweig (1931) és Edwards Brothers, Ann Arbor (1944), XV. fejezet.



Ahhoz, hogy  $I_1^{(1)}$  és  $\varepsilon I_2^{(1)}$  konvergens sorozatait kapjuk, lényeges volt feltenni, hogy  $D^{(1)}$  a (16) alatt felírt alakban van megadva. Ez az alak az  $S$  alcsoportra nézve kiredukált alak és ez eredményezte esetünkben az  $I_1^{(1)}$  sorozat konvergenciáját. Az  $\varepsilon I_2^{(1)}$  sorozat konvergenciája nem következik az  $I_1^{(1)}$ -ek konvergenciájából és így a  $D^{(1)}$  ábrázolások kiredukált alakjából, azonban azt ez a körülmény legalábbis lehetővé tette.

Mielőtt rátérnénk a Lorentz-csoportok vizsgálatára, érdemesnek látszik egy utolsó megjegyzést tenni a fenti kontrakcióra vonatkozóan, még akkor is, ha ennek nem sok köze van tárgyunkhoz. Először a véges csoportelemeknek megfelelő mátrixokat fogjuk meghatározni. Erre a célra a fenti ábrázolást abban az alakban célszerű szemügyre venni, amelyben a Hilbert-tér  $x$  és  $y$  függvényeiből áll és az infinitezimális operátorok az euklideszi csoport infinitezimális operátorai számára természetes alakot öltik ( $\alpha$  és  $r$  polárkoordináták:  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ):

$$J'_1 = -\partial/\partial\alpha = y \partial/\partial x - x \partial/\partial y, \quad (19)$$

$$J'_{2x} = \partial/\partial y, \quad J'_{2y} = -\partial/\partial x. \quad (19a)$$

Tartsuk emlékezetben, hogy a  $J'_{2x}$  operátor  $I_{2x}$ -ből származott, ami az  $x$ -tengely körül végrehajtott infinitezimális elforgatás; a  $-y$  irányú eltolásnak felel meg. Hasonlóképpen  $J'_{2y}$  az  $x$  irányú eltolásnak felel meg.

A  $\varphi(\alpha, r)$  függvény az új Hilbert-térben azon vektornak felel meg, melynek (17a) és (17b) Hilbert-terében  $\varphi_m$  a komponense. A (18a) egyenletből következik továbbá, hogy

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = -\Xi^2 \varphi; \quad (20)$$

ennek alapján írhatjuk:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int e^{-i\Xi(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')} g(\alpha') d\alpha' \\ &= \int e^{-i\Xi r \cos(\alpha - \alpha')} g(\alpha') d\alpha' \\ &= \int e^{-i\Xi r \cos \alpha'} g(\alpha - \alpha') d\alpha'. \end{aligned} \quad (20a)$$

Integrálni mindegyik esetben 0-tól  $2\pi$ -ig kell. A  $g(\alpha - \alpha')$  függvényt az  $\alpha - \alpha'$  változó Fourier-sorába fejthük ki:

$$\varphi(x, y) = \int e^{-i\Xi r \cos \alpha'} \sum g_m e^{-im(\alpha - \alpha')} d\alpha'; \quad (20b)$$

$m$  mínusz végtelentől végtelenig fut. Az utóbbi alak felhasználásával könnyen kiszámíthatjuk  $J'_1$ -et (19) alapján; az első alak lehetővé teszi  $J'_{2x}$  és  $J'_{2y}$  könnyű kiszámítását. Az ily módon kapott kifejezések összehasonlítása (17a)-val és (17b)-vel azt mutatja, hogy  $g_m = \varphi_m$ . A szokásos jelöléssel összhangban definiáljuk a

$$2\pi J_m(z) = i^m \int e^{-iz \cos \alpha'} e^{im\alpha'} d\alpha'$$

függvényt<sup>3</sup>;  $J_m$  az  $m$ -edrendű közönséges Bessel-függvény. Ezt felhasználva (20b) így írható:

$$\varphi(\alpha, r) = 2\pi \sum \varphi_m i^{-m} e^{-im\alpha} J_m(\Xi r). \quad (21)$$

<sup>3</sup> Vö. Jahnke, E., és Emde, F., *Tables of Functions*, Dover Publications, 1943, 149. old.; vagy Watson, G. N., *Treatise on Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, 1922, a 19. oldaltól kezdődően.



A (19a) képleteket tekintetbe véve nyomban felírhatjuk a véges csoportoperációkat. A  $T(\xi, \eta)$  eltolásoperátor, mely az  $x$  irányban  $\xi$ -vel, az  $y$  irányban  $\eta$ -val való eltolásnak felel meg, a következőképpen hat:

$$T(\xi, \eta)\varphi(x, y) = \varphi(x - \xi, y - \eta). \quad (22)$$

Eszerint ha ugyanezen operáció mátrixát az eredeti Hilbert-térben  $T(\xi, \eta)_{mm'}$ -vel jelöljük, írhatjuk:

$$\varphi(x - \xi, y - \eta) = 2\pi \sum_m \sum_{m'} T(\xi, \eta)_{mm'} \varphi_{m'} i^{-m} e^{-imx} J_m(\Xi r). \quad (22a)$$

Ez elehetővé teszi a  $T(\xi, \eta)_{mm'}$  mátrixelemek explicit meghatározását. Ezt a meghatározást nem végezzük el teljesen, hanem (22a)-t csak az  $r=0$  érték mellett vizsgáljuk. Minthogy valamennyi  $J_m(0)=0$ , kivéve a  $J_0(0)=1$  értéket, az  $m$ -re vonatkozó összegzés a jobb oldalon eltűnik. A bal oldal ugyanakkor (21) szerint

$$\varphi(-\xi, -\eta) = 2\pi \Sigma \varphi_m i^{-m} e^{-im(\beta + \pi)} J_m(\Xi \varrho), \quad (22b)$$

ahol  $\beta, \varrho$  a  $\xi$ -nek és  $\eta$ -nak megfelelő polárkoordináták. Összehasonlítva (22a)-t és (22b)-t,  $\xi=0, \beta = \frac{1}{2}\pi, \eta=\varrho$  mellett kapjuk:

$$J_m(\Xi \varrho) = T(0, \varrho)_{0m}. \quad (23)$$

A csoportrelációk, valamint az infinitezimális operátorok (19a) alakja azonnal megadja a Bessel-függvényekre vonatkozó legfontosabb összefüggéseket, amilyen az addíciós tétel, a differenciálegyenlet (vö. (20)) stb. Mindeddig a gondolatmenet nem új, hanem csupán a kétdimenziós euklideszi csoport esetében való megismétlése a korábban a forgáscsoportra vonatkozóan megadott<sup>4</sup> okoskodásnak. Ez a

$$D^{(l)}(0\beta 0)_{0m} = \bar{P}_l^m(\cos \beta) = \left( \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \beta) \quad (24)$$

egyenletre vezetett<sup>4</sup>, ahol  $P_l^m$  az elsőfajú asszociált Legendre-függvény;  $\bar{P}_l^m$  ugyanarra az értékre van normálva, mint  $P_l^0 = P_l$ . Mivel  $0, \beta, 0$  az  $x$ -tengely körül végrehajtott elforgatás,  $T(0, \varrho)$  definíciója folytán

$$T(0, \varrho)_{m'm} = (-1)^{m'} \lim D^{(l)}(0, \Xi \varrho/l, 0)_{m'm}. \quad (25)$$

Ez, a (23) egyenlettel együtt, az asszociált Legendre-függvények aszimptotikus kifejezését<sup>5</sup> adja:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \bar{P}_l^m(\cos(\varrho/l)) = J_m(\varrho). \quad (25a)$$

<sup>4</sup> A 2. lábjegyzetben idézett mű, XIX. fejezet, különösen a 230, 232. old. Vö. ezenkívül Wigner, E. P. J. Franklin Inst., 250, 477(1950), és Godement, R., Trans. Amer. Math. Soc. 73, 496(1952).

<sup>5</sup> Az  $m=0$  esetre ez Watson Bessel Functions (3. lábjegyzet) c. könyvének 65. oldalán található meg.



### III. LORENTZ-CSOPORTOK KONTRAKCIÓJA

Tekintsük először az egy térbeli és egy időbeli dimenzióknak megfelelő Lorentz-csoportot. Ezt az

$$\begin{aligned}x' &= x \operatorname{ch} \lambda + t \operatorname{sh} \lambda + a_x, \\t' &= x \operatorname{sh} \lambda + t \operatorname{ch} \lambda + a_t\end{aligned}\quad (26)$$

transzformáció adja meg. A kontrakciót a  $t' = t + a_t$  időbeli eltolások alcsoportjára vonatkozóan kívánjuk végrehajtani. A (26) csoport infinitezimális elemei: az  $I_1$  időbeli eltolás, az  $I_{2x}$  térbeli eltolás és az  $I_{2y}$  téridőbeli „elforgatás”. Felcserélési összefüggéseik:

$$[I_1, I_{2x}] = 0, \quad [I_1, I_{2\lambda}] = -I_{2x}, \quad [I_{2x}, I_{2\lambda}] = -I_1. \quad (27)$$

Eszerint (9) alapján a kontrahált csoport felcserélési összefüggései

$$[J_1, J_{2x}] = 0, \quad [J_1, J_{2\lambda}] = -J_{2x}, \quad [J_{2x}, J_{2\lambda}] = 0. \quad (27a)$$

A téridőbeli „elforgatások”, a térbeli eltolásokkal együtt, kommutatív invariáns alcsoportot képeznek.

A

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \lambda & \operatorname{sh} \lambda & a_x \\ \operatorname{sh} \lambda & \operatorname{ch} \lambda & a_t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (26a)$$

mátrixok a (26) transzformációk csoportjának természetes, jóllehet nem unitér ábrázolását képezik. A kontrakciót az  $a_t = b_t$ ,  $\lambda = \varepsilon v$ ,  $a_x = \varepsilon b_x$  vagy  $\lambda = v/c$ ,  $a_x = b_x/c$  helyettesítés és az  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $c \rightarrow \infty$ ) határátmenet elvégzése útján hajthatjuk végre. Ha ezt közvetlenül (26a)-ban tesszük meg, a kapott ábrázolás a kontrahált csoportnak nem lesz hű ábrázolása. Ezért (26a)-t alkalmas,  $\varepsilon$ -tól (vagy  $c$ -től) függő mátrix segítségével transzformációnak vetjük alá: az első sort  $c$ -vel, az első oszlopot  $1/c$ -vel szorozzuk meg. Ha  $c$  végtelenhez tart az ily módon kontrahált mátrixban, a kontrahált csoport transzformációira kapjuk:

$$\begin{aligned}x' &= x + vt + b_x, \\t' &= t + b_t.\end{aligned}\quad (27a)$$

Ez az inhomogén Galilei-csoport egy térbeli dimenzióval. Az  $x' = x + vt + b_x$ ,  $t' = t$  transzformációk képezik a kommutatív invariáns alcsoportot.

Ugyanez a kontrakció elvégezhető akárhány térbeli dimenziós inhomogén Lorentz-csoport esetében is. Az egyetlen különbség az, hogy az  $S$  alcsoport, amelyre vonatkozóan a kontrakciót elvégezzük, nem csupán az időbeli eltolásokat tartalmazza, mint a fenti példában, hanem az összes térbeli elforgatást is, azaz mindazokat a homogén transzformációkat, amelyek a  $t$  időt változatlanul hagyják. A kontrahált csoport invariáns alcsoportja az összes térbeli eltolást, valamint a Galilei-transzformációkat tartalmazza:  $x'_i = x_i + v_i t + b_i$ ,  $t' = t$ .



### A Lorentz-csoport unitér ábrázolásainak kontrakciója

Itt főképpen a speciális relativitáselmélet csoportjával fogunk foglalkozni, azaz: az inhomogén Lorentz-csoporttal, három térszerű és egy időszzerű dimenzió esetében. Az  $S$  alcsoport, amelyre vonatkozóan a kontrakciót végrehajtjuk, az időbeli eltolásokat, a térbeli elforgatásokat, és ezen operációk szorzatait tartalmazza. A kontrahált csoport a közös Galilei-csoport, azaz: a klasszikus mechanika csoportja.

A három térbeli koordinátatengely irányába eső eltolásoperátorokat  $I_k$ -val ( $k=1, 2, 3$ ), az időtengelymenti eltolás operátorát pedig  $I_0$ -al fogjuk jelölni. A  $kl$  síkbeli elforgatást  $I_{kl}$ -lel, a  $k$ -tengely irányába eső akcelerációt  $I_{k0}$ -al jelöljük. A  $I_0$  és  $I_{kl}$  operátorok az  $S$  alcsoportot feszítik ki.

Az

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - I_0^2 = P \quad (28)$$

menyiség egy-egy irreducibilis ábrázoláson belül állandó és az irreducibilis ábrázolások három osztályba sorolhatók ezen konstans értékének megfelelően.<sup>6</sup> Az első osztályban  $P < 0$  és az impulzusok (melyek az infinitezimális operátorok  $-i$ -szeresei) térszerűek. A második osztályban  $P = 0$  és az impulzusok null-vektort képeznek; a harmadik osztályban  $P > 0$ .

Általánosan elfogadott, hogy az első osztály ábrázolásainak nincs fizikai jelentése, mivel minden megfigyelt részecske impulzusa vagy időszzerű vektor, vagy pedig null-vektor. Így ezen ábrázolások közül csak a legegyszerűbbet fogjuk megvizsgálni. Ennek operátorait a legkönnyebb három változó:  $p_1, p_2, p_3$  függvényeinek Hilbert-terében megadni:  $p_1, p_2, p_3$  legyen a  $\sqrt{-P}$  sugarú gömb külsejére korlátozva. Az infinitezimális operátorok kifejezései:

$$I_k = ip_k, \quad I_0 = -i(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + P)^{1/2}. \quad (28a)$$

Ez utóbbi egyenlet egyszersmind megadja annak okát, miért kell a  $p_k$  változókat a  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > -P$  egyenlőtlenséggel korlátoznunk: ha ez az egyenlőtlenség nem teljesül,  $I_0$  nem antihermitikus többé és így az ábrázolás nem unitér. Továbbá

$$I_{kl} = p_l \partial / \partial p_k - p_k \partial / \partial p_l \quad (28b)$$

$$I_{k0} = -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + P)^{1/2} \partial / \partial p_k \quad (28c)$$

Célszerű a  $p_k$ -k helyett új változókat bevezetni, egyrésztől azért, hogy a változók tartományának definícióját egyszerűbbé tegyük, másrésztől azért, hogy az  $S$  alcsoport operációit a  $P$ -től független alakra hozzuk. A legegyszerűbben akkor járunk el, ha új változókként a következőket vezetjük be:

$$p_0 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + P)^{1/2}, \quad \Omega_k = p_k / (p_0^2 - P)^{1/2}. \quad (29)$$

Az  $\Omega_k$  változók az egységgömbre vannak korlátozva,  $p_0$  pedig 0-tól  $\infty$ -ig változik. Ezen változók segítségével  $\varphi$  és  $\psi$  skalárszorzata a

$$(\varphi, \psi) = \int d\Omega \int dp_0 (p_0^2 - P)^{1/2} \bar{\varphi} \psi \quad (29a)$$

<sup>6</sup> Vö. pl. Bargmann, V. és Wigner, E. P. Proc. Nat. Acad. Sci. **34**, 211 (1948) magyarul: e sorozat 4. cikke, Magyar Fizikai Folyóirat **21**, ... (1973) és az ott idézett további irodalom.



alakban írható fel, ahol  $d\Omega$  annak az egységgömbnek a felületeleme, amelyen az  $\Omega$  változók változnak. Az új változókkal kifejezve az infinitezimális operátorok az

$$I_{kl} = \Omega_l \partial / \partial \Omega_k - \Omega_k \partial / \partial \Omega_l, \quad I_0 = -ip_0 \quad (30)$$

és

$$I_k = i\Omega_k(p_0^2 - P)^{1/2}, \quad (30a)$$

$$I_{k0} = -(p_0^2 - P)^{1/2} \Omega_k \partial / \partial p_0 - \frac{p_0}{(p_0^2 - P)^{1/2}} \sum_l \Omega_l (\Omega_l \partial / \partial \Omega_k - \Omega_k \partial / \partial \Omega_l)$$

alakot öltik. Ha  $J_k = \varepsilon I_k$ , a  $J_k$  operátorok zérushoz fognak tartani, hacsak  $-P$  nem fordítva arányos  $\varepsilon^2$ -tel, azaz  $-\varepsilon^2 P$  nem konvergál egy meghatározott  $P$  limeszhez. Ha ezt a feltevést tesszük,  $\varepsilon I_{k0}$  második tagja zérushoz fog tartani, és a kontrahált csoport ábrázolásának infinitezimális elemei a következők lesznek:

$$J_{kl} = \Omega_l \partial / \partial \Omega_k - \Omega_k \partial / \partial \Omega_l, \quad J_0 = -ip_0, \quad (31)$$

$$J_{k0} = -P \Omega_k \partial / \partial p_0, \quad J_k = iP \Omega_k. \quad (31a)$$

Ezek az operátorok tényleg a Galilei-csoport egy unitér ábrázolását feszítik ki és a Galilei-csoport ábrázolásainak legutóbb elvégzett meghatározásakor<sup>7</sup> II-vel jelölt esetnek ( $m=0$ ) felelnek meg. Az idézett dolgozat  $p_k$ -ja a mi  $P \Omega_k$ -nknek felel meg, az  $s$  változót  $iP \partial / \partial p_0$  adja meg. Azt is megértjük most, hogy miért volt lehetetlen fizikai értelmezést találni ezen ábrázolás számára: ez a relativisztikus csoport képzetes  $P^{1/2}$  tömeghez tartozó ábrázolásának határeset. Ugyanez igaz valószínűleg a Galilei-csoport többi igazi ábrázolására is.<sup>7</sup>

Térjünk át most a pozitív  $P$ -vel jellemzett legegyszerűbb ábrázolás: a Klein—Gordon-egyenletnek megfelelő ábrázolás vizsgálatára. Az infinitezimális operátorokat ismét (28a), (28b), (28c) adja meg. Mivel azonban most  $P$  pozitív, a  $p$ -k változási tartománya az egész háromdimenziós térre kiterjed. A  $\varphi, \psi$  függvények skalárszorzatát most

$$(\varphi, \psi) = \int \int \int dp_1 dp_2 dp_3 \bar{p}_0 \bar{\varphi} \psi \quad (32)$$

adja meg, ahol  $p_0$ -t továbbra is (29) definiálja.

Legyen (6)-nak megfelelően

$$J_k = \varepsilon I_k = \varepsilon i p_k \quad (33)$$

az időbeli eltolás operációja; ekkor

$$iJ_0 = iI_0 = (-I_1^2 - I_2^2 - I_3^2 + P)^{1/2} = \varepsilon^{-1} (-J_1^2 - J_2^2 - J_3^2 + \varepsilon^2 P)^{1/2}. \quad (33a)$$

Minthogy a  $J_k$ -k antihermitikusak, négyzeteik pozitív definit hermitikus operátorok. Minthogy  $\varepsilon^2 P$  ugyancsak pozitív, az  $iJ_0$  operátor  $(\varphi, iJ_0 \varphi)$  várható értéke bármely  $\varphi$  állapotban nagyobb, mint az  $iJ_1$  operátor várható értékének  $\varepsilon^{-1}$ -szerese. Ebből következik, hogyha  $J_1 \varphi$  a Hilbert-tér egy vektorához konvergál  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén, a  $J_0 \varphi$  vektornak minden határon túl növekednie kell. Ugyanez igaz természetesen a többi  $J_k$ -ra is. Ebből következik, hogy a vizsgált ábrázolások nem kontrahálhatók az előző szakaszban tárgyalt értelemben és hogy ugyanez igaz a  $P \geq 0$  osztályok minden ábrázolására.

<sup>7</sup> Inonu, E. és Wigner, E. P., Nuovo Cimento **9**, 705(1952) magyarul: e sorozat 6. cikke, Magyar Fizikai Folyóirat **22**, ... (1974).



Elvégezhetjük azonban ezen ábrázolások kontrakcióját oly módon, hogy a Galilei-csoportnak tényező erejéig adott ábrázolásait kapjuk. A tényező erejéig adott ábrázolások infinitezimális elemeinek felcserélési összefüggései a valódi ábrázolások felcserélési összefüggéseitől abban különböznek, hogy a szerkezeti relációkban megjelenik egy konstans. Eszerint

$$[J_\alpha, J_\beta] = \Sigma c_{\alpha\beta}^\gamma J_\gamma + b_{\alpha\beta} 1, \quad (34)$$

ahol  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  az ábrázolandó csoport (esetünkben az inhomogén Galilei-csoport) szerkezeti állandóit,  $b_{\alpha\beta} 1$  pedig az egységoperátor többszöröseit jelöli. Ennélfogva a tényező erejéig adott ábrázolások infinitezimális elemeit oly módon fogjuk megkapni, ha (6) helyett írjuk:

$$J_{1v} = I_{1v} - a_{1v} 1, \quad J_{2v} = \varepsilon I_{2v} - a_{2v} 1, \quad (34a)$$

ahol valamennyi  $a$  függhet  $\varepsilon$ -től. Minthogy a (34a) alatt másodikként álló tagok kommutálnak minden más operátorral, azok (34) bal oldalát nem változtatják meg. Így ezeket kompenzálni kell a jobb oldalon is; ezt teszi meg a  $b_{\alpha\beta} 1$  tag. Az  $a 1$  tagok bevezetésének (34a) alatt — ami azután szükségessé teszi a  $b$ -k bevezetését (34)-be — az a lényege, hogy (34a) alatt a jobb oldalon álló kifejezések véges el nem tűnő operátorokhoz konvergálhatnak még akkor is, ha  $I_{1v}$ ,  $\varepsilon I_{2v}$  nem tehetők konvergensek.

A kontrakció fogalmának fenti általánosítása valóban lehetővé teszi a (28a), (28b), (28c) alatt megadott ábrázolások kontrakcióját a  $P > 0$  esetben is. Amint  $P$ -vel végtelenhez tartunk,  $I_0$  szintén végtelenhez tart  $[(I_0 \varphi, I_0 \varphi)]$  végtelenhez tart minden  $\varphi$ -re]. Ha azonban  $-iP^{1/2} 1$ -et levonjuk  $I_0$ -ból, a kapott kifejezés a következő határértékhez konvergál:

$$\begin{aligned} J_0 &= \lim -i(-I_1^2 - I_2^2 - I_3^2 + P)^{1/2} + iP^{1/2} \\ &= (i/2P^{1/2})(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = (i/2P^{1/2}\varepsilon^2)(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2). \end{aligned} \quad (35)$$

Ez azt mutatja, hogy  $I_0$  véges operátorhoz konvergál, ha a  $J_k = \varepsilon I_k$  operátorok is ezt teszik és ha  $P^{1/2}\varepsilon^2$  egy  $m$  véges állandóhoz tart, miközben  $P \rightarrow \infty$  és  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mindkettő elérhető, ha feltesszük, hogy az ábrázolás olyan alakú, hogy (28a) helyett az

$$I_k = ip_k/\varepsilon, \quad I_0 = -i(P + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/\varepsilon^2)^{1/2} \quad (36)$$

képletek érvényesek. Ez valóban lehetséges, mivel  $p_k$  változási tartománya nem korlátos és az infinitezimális elemek fenti alakja unitér transzformáció segítségével megkapható a (28a) alatt megadott operátorokból. Ez a transzformáció a (28b) alatt felírt  $I_{kl}$ -eket változatlanul hagyja, a (28c) alatt megadott  $I_{k0}$  operátorokat a következő operátorokba transzformálja:

$$I_{k0} = -\varepsilon(P + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/\varepsilon^2)^{1/2} \partial/\partial p_k. \quad (36b)$$

Ily módon kapjuk:

$$\begin{aligned} J_0 &= \lim -i(P + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/\varepsilon^2)^{1/2} + iP^{1/2} = -(i/2m)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \\ J_{kl} &= p_l \partial/\partial p_k - p_k \partial/\partial p_l \end{aligned} \quad (37.1)$$

$$J_k = \lim \varepsilon(ip_k/\varepsilon) = ip_k,$$

$$\begin{aligned} J_{k0} &= \lim -\varepsilon(P + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/\varepsilon^2)^{1/2} \varepsilon \partial/\partial p_k \\ &= \lim -(P\varepsilon^4 + \varepsilon^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2))^{1/2} \partial/\partial p_k = -m \partial/\partial p_k. \end{aligned} \quad (37.2)$$



Az olvasó, aki előtt ismeretes a Klein—Gordon-egyenletről a Schrödinger-egyenletre való áttérés, fel fogja ismerni a nyugalmi tömegnek  $c$  növekedtével való növekedését, valamint e nyugalmi tömeg kiküszöbölését  $-iP^{1/2}$  1-nek azaz időbeli eltolás operátorából való levonásával. A kontrahált csoport (37.1), (37.2) infinitezimális operátorai ténylegesen megegyeznek a Schrödinger-elmélet infinitezimáloperátoraival. Valószínű, hogy hasonló kontrakció lehetséges a többi pozitív nyugalmi tömegű ( $P>0$ ) ábrázolás esetében is. Ezt, valamint a  $P=0$  ábrázolások viselkedését itt nem tárgyaljuk tovább.

*Fordította: Györgyi Géza*

Technikai szerkesztő: Turchányi György

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sós Attila

A kézirat beérkezett: 1973. november 16. — Terjedelem: 7,35 (A/5) ív

73-5046 — Szegedi Nyomda



A MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,  
1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhető.



Ára: 10,— Ft  
Előfizetés kötetenként: 48,— Ft

INDEX: 26 491

## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Gálfi László: A sokrészcseke-keltés Regge fenomenológiája</i> .....	195
<i>Ungár Tamás: A röntgen abszorpciós élek finom szerkezetének auto-ionizációs modellje</i> .....	213
<i>Pócsik György: Ütköző sugár fizika</i> .....	242

## A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>Erdal Inonu és Wigner Jenő: Csoportok és ábrázolásaik kontrakciójáról</i> .....	265
--	-----



307.226

IV.

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

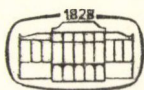
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,  
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR  
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI  
JÁNOSSY LAJOS

XXII. KÖTET

4. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ  
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST 1974



# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10–10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóirattól évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Jánossy Lajos akadémikus  
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út  
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmú ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölik. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.



# A SZENNYEZŐ ATOMOK MÁGNESES MOMENTUMA ANOMÁLIS HŐMÉRSÉKLET- FÜGGÉSÉNEK VIZSGÁLATA VAS ÉS NIKKEL ALAPÚ ÖTVÖZETEK BEN\*

VINCZE IMRE

MTA Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

## TARTALOM

I. Bevezetés .....	279
II. Előzmények .....	280
1. A hiperfinom tér .....	280
2. Egy-szennyezés probléma kristályban .....	282
3. A szennyezés hiperfinom terének anomális hőmérsékletfüggése .....	284
III. Kísérleti módszer és eredmények .....	289
1. Mössbauer effektus (ME) .....	289
2. Berendezés .....	291
3. Minták .....	292
4. A mérések kiértékelése .....	293
IV. Kísérleti eredmények .....	297
1. Nem mágneses szennyezések (Al, Ga, Sn) .....	302
2. 3d szennyezések (Ti, V, Cr, Mn, Co, Ni) .....	303
3. 4d és 5d szennyezések (Mo, Ru, Rh, Pd, W, Re, Os, Ir, Pt) .....	304
V. Diskusszió .....	306
1. Nem mágneses szennyezések — a lokalizált momentum kép érvénytelensége .....	306
2. A Mn, Ru, Os, Ni, Pd, és Pt szennyezések vasszomszédjainál megfigyelt anomália magyarázatáról .....	308
3. A szennyezés helyén levő momentum anomális hőmérsékletfüggésének kvalitatív magyarázata .....	312
4. A tiszta ferromágneses fémek mágnesezettségének és hiperfinom terének eltérő hőmérsékletfüggése .....	315
5. A szennyezés és a mátrix hiperfinom terének eltérő hőmérsékletfüggése .....	318
VI. Összefoglalás .....	319
Köszönetnyilvánítás .....	320
Irodalom .....	321

## I. Bevezetés

A ferromágnesség eredetének megértése szempontjából különösen fontos híg ötvözetekben levő szennyezések lokális tulajdonságainak vizsgálata magfizikai módszerekkel. Ezekben a kísérletekben a mag mint érzékeny próbatest szerepel, amely az elektron hullámfüggvények bizonyos részleteinek tanulmányozására alkalmas.

A vas Fermi-felülete metszi a keskeny 3d- és a széles 4s-sávot, ezért ha szennyezést helyezünk a mátrixba, a többlet magtöltés leárnýékolása miatt mindkét sáv

\* Kandidátusi disszertáció. 1972. Érkezett 1973. IV. 17.



perturbálódik. A szennyezés illetve a mátrix atomok helyén mért hiperfinom tér rendelkezik mind  $3d$ -, mind  $4s$ -járulékkal, és így hasznos információt ad a perturbációk nagyságáról és jellegéről mindkét sávban.

Néhány híg vas és nikkal alapú ötvözetben ( $\text{FeMn}$ ,  $\text{NiRu}$ ) megfigyelték, hogy a szennyezés hiperfinom tere a mátrixétól eltérően viselkedik a hőmérséklet függvényében, melyet a szennyezésmomentum hasonló viselkedésének tulajdonítottak.

Ezek az anomáliák rendkívül fontosak a fémek és ötvözetek mágneses viselkedésének leírására használt lokalizált momentum kép, illetve a sávmodell szempontjából. Azonban a nagy kísérleti nehézségek miatt eddig nem történt meg annak rendszeres vizsgálata, hogy mely szennyező atomok mágneses momentuma mutat anomális viselkedést a hőmérséklet függvényében.

Jelen dolgozat tartalmazza híg vasalapú ötvözetekben a szennyezést környező vasatomok hiperfinom tere hőmérsékletfüggésének Mössbauer-módszerrel végzett első szisztematikus vizsgálatának eredményeit.

A II. fejezetben röviden tárgyaljuk a későbbiekben szükséges mennyiségeket és módszereket, valamint méréseink közvetlen előzményeit. A III., IV. és V. fejezet tartalmazza kísérleti eredményeinket és azok interpretációját, ez a három túlnyomórészt önálló munka. Eredményeink összefoglalása a VI. fejezetben található.

## II. Előzmények

### 1. A hiperfinom tér

A hiperfinom tér különböző járulékainak részletes diszkussziója megtalálható az [1–3] hivatkozásokban. Ebben a pontban csupán röviden ismertetjük a későbbiekben felhasználásra kerülő fogalmakat.

A mag mágneses dipólmomentuma és az atom saját elektronjai mágnesesen kölcsönhatnak, a kölcsönhatási energia alakja:

$$H = -g g_I \mu_B \mu_N \left\{ \frac{8\pi}{3} \delta(\mathbf{r}) \mathbf{I} \mathbf{S} + r^{-3} \mathbf{I} \mathbf{L} + r^{-3} [3r^{-2} (\mathbf{I} \mathbf{r}) (\mathbf{S} \mathbf{r}) - \mathbf{I} \mathbf{S}] \right\}. \quad (\text{II.1})$$

A fenti kifejezést Fermi [4] vezette le az 1930-as években a Dirac-egyenletből, és szigorúan csak a magon kívül levő egyetlen elektron esetén érvényes. (II.1)-ben  $g$  és  $g_I$  az elektron ( $g=2$ ) és a mag  $g$ -faktorát,  $\mu_B$  a Bohr-magnetont,  $\mu_N$  a mag-magnetont  $\delta(\mathbf{r})$  a delta függvényt,  $\mathbf{r}$  az elektron helyvektorát a magtól mérve,  $\mathbf{I}$  a mag impulzusmomentumát,  $\mathbf{S}$  és  $\mathbf{L}$  pedig az elektron spin és pályamomentumát jelöli (az utolsó három mennyiség  $\hbar$  egységekben értendő). Az első tag a szokásos Fermi-féle kontakt tag (mely csak  $s$ -elektronokra nem zérus), a másik két járulék pedig az elektron pályamozgásából és a mag momentummal való dipól-dipól kölcsönhatásából származik. Kőbös fémekben, mint pl. vasban a pálya-járulék kicsi, mert a pályamozgás „befagyott”, és a dipól-járulék nulla, ugyancsak szimmetria okok miatt. Az (II. 1) egyenlettel leírt kölcsönhatás a mag energianívóinak felhasadását okozza. A megfelelő energianívók:

$$E_m = -g_I \mu_N m_I H_{\text{hf}}, \quad m_I = I, I-1, \dots, -I, \quad (\text{II.2})$$

ahol a  $H_{\text{hf}}$  hiperfinom tér a kölcsönhatásnak megfelelő effektív tér, amelybe kőbös szimmetriájú fémekben a döntő járulékot a Fermi-féle kontakt tér adja. Ez a kontakt



tag a magok helyén levő polarizált spinsűrűséggel kapcsolatos, azaz

$$H_{\text{hf}} = \frac{8\pi}{3} g\mu_B S \sum_{ns} \{ |\Psi_{ns\uparrow}(0)|^2 - |\Psi_{ns\downarrow}(0)|^2 \}, \quad (\text{II.3})$$

ahol  $ns$  a különböző  $n$  héjakból származó  $s$ -elektron járulékokat jelöli és a  $\uparrow$  irány a  $d$ -elektronok polarizációjának iránya. A belső  $s$ -elektronok ( $n=1, 2, 3$ ) spin-polarizációját, éppúgy, mint a külsőkét ( $n=4$ ) a  $3d$ -elektronokkal való kicserélődési kölcsönhatásuk okozza. A Pauli-elv következményeként a paralel spinű elektronok igyekeznek elkerülni egymást. Az elektronok közti coulomb taszítás viszont ekkor nagyobb hatással van antiparalel spinű elektronokra, hiszen az átlagos távolság köztük kisebb. A két hatás végeredményeképpen a belső  $s$ -elektronok radiális eloszlásában dominál a Pauli-elv hatása és a felfelé álló spinű elektronok töltéssűrűsége csökken, a lefelé álló spinűeké pedig nő a mag helyén. Ennek eredménye negatív spinsűrűség a mag helyén. A külső  $s$ -elektronokra az effektus a részletes számolások szerint éppen ellenkező előjelű lenne az atomokban, azonban fémes állapotban a polarizációs járulék ugyancsak negatívvá válik.

A hiperfinom tér értékének egzakt számítása nagyon bonyolult probléma, amely még tiszta ferromágneses fémek esetén sem tekinthető megoldottnak [5], híg ötvözetek esetén pedig egyáltalán nem végeztek ab initio számításokat. A következőkben röviden ismertetjük azt az egyszerű félempirikus modellt [1, 3], amely jól magyarázza a vas, kobalt és nikkelt mátrixban levő szennyezések helyén mért hiperfinom tér értékeket.

E szerint a modell szerint a hiperfinom tér két fő járulékkal rendelkezik:

$$H_{\text{hf}} = H_{\text{CP}} + H_{\text{CEP}}, \quad (\text{II.4})$$

ahol  $H_{\text{CP}}$  a törzspolarizációs járulék, mely az atom saját mágneses momentumával arányos és a belső  $s$ -elektronok polarizációjából származik,  $H_{\text{CEP}}$  pedig a vezetési elektron polarizációs járulék, mely a környező atomok hatását tükrözi a  $4s$ -elektronok polarizációja révén. Az utóbbi járulék magyarázza a pl. vasban levő nemmágneses  $d^{10}s$  és  $d^{10}s^2$  konfigurációjú szennyezések helyén mért nagy negatív teret (pl.  $H_{\text{Cu}} = -213$  kG,  $H_{\text{Zn}} = -100$  kG,  $H_{\text{Ag}} = -300$  kG,  $H_{\text{Cd}} = -350$  kG,  $H_{\text{Au}} = -1280$  kG [1] stb.). Ebben az esetben a hiperfinom térben a zárt  $d$ -héj miatt a belső  $s$ -elektronok járuléka, azaz  $H_{\text{CP}}$  elhanyagolható a külső  $s$ -elektronok járulékához ( $H_{\text{CEP}}$ ) képest, mely egyszerűen leírható a szennyezés vezetési elektronokkal történő leárnýékolásának figyelembevételével [3, 6]. Ebben az egyszerű modellben a szennyezést négyzög potenciál reprezentálta, melynek mélységét a Friedel-féle összesszabályon [3, 6] keresztül a szennyezés többlettöltése határozta meg, és a vezetési elektronok szóródását ezen szabad elektron közelítésében tárgyalták. Ily módon kielégítő egyeztetést kaptak a nemmágneses szennyezések hiperfinom terének mért és számított értéke között. A nyitott  $d$ -héjjal rendelkező szennyezések hiperfinom tere azonban eltért az előző módon számított CEP értéktől. Az eltérés jól magyarázható volt egy másik járulék feltételezésével [1, 3]. Ez a  $H_{\text{CP}} = a \mu_i$  törzspolarizációs járulék, mely abból származik, hogy a  $\mu_i$  szennyezésmomentum polarizálja a belső  $s$ -elektronokat. Az „ $a$ ” törzspolarizációs állandó gyakorlatilag konstansnak adódott egy-egy átmeneti fém szennyezés sorozatra;  $a = 50\text{--}70$  kG/ $\mu_B$  a  $3d$ -,  $a = 400$  kG/ $\mu_B$  a  $4d$ - és  $a = 1000$  kG/ $\mu_B$  a  $5d$ -szennyezések esetén. Ezen hiper-



finom tér szisztematika alapján a vas  $-330$  kG-os teréből körülbelül  $-150$  kG a törzspolarizációs és  $-180$  kG a vezetési elektron polarizációs járulék.

Szennyezés hatására megváltozik a szennyezést környező mátrixatomok helyén a hiperfinom tér. A változás nagysága különböző aszerint, hogy a szennyezés hányadik szomszédságban levő vasatomról van, így  $T=0^\circ\text{K}$ -n kialakul egy hiperfinom tér eloszlás. A szennyezés  $i$ -ik koordinációs szférájában levő vasatom hiperfinom terének  $\Delta H_i$  megváltozása (II.4)-nek megfelelően két járulékból áll:

$$\Delta H_i = \Delta H_{\text{CP}}^i + \Delta H_{\text{CEP}}^i, \quad (\text{II.5})$$

ahol  $\Delta H_{\text{CP}}^i$  a törzspolarizációs járulék megváltozása, mely arányos a szennyezés, leárnýékolása által létrehozott  $\Delta \mu_{\text{Fe}}^i$  vasmomentum-változással ( $\Delta H_{\text{CP}}^i = a \Delta \mu_{\text{Fe}}^i$ )  $\Delta H_{\text{CEP}}^i$  pedig a vezetési elektron polarizációs komponens megváltozása, melyet az  $V/2$ . pontban részletesebben tárgyalunk.

## 2. Egy-szennyezés probléma kristályban

Az ötvözetek legegyszerűbb modellje a másként tökéletes kristályban jelenlevő egyetlen szennyező atom esete [7]. Ennek kielégítő leírása alapvető az ötvözetek tulajdonságainak megértése szempontjából. Az egy-szennyezés probléma és az ötvözetek tárgyalásának közös tulajdonsága az, hogy a rácsperiodicitás elromlik és így a kváziimpulzus nem lesz jó kvantumszám többé. Ezért célszerű koordináta reprezentációt használni és különösen egyszerű és elegáns tárgyalás adható Green-függvényes technikával. A különböző típusú, de jól lokalizált (azaz csak egy, — a szennyezés helyén létező) perturbáció (pl. a ferromágneses kristályban levő szennyezés, mely a mátrixétól különböző spinű és kicserélődési kölcsönhatású; a más tömegű és erőkonstansú szennyezés; a mátrixétól eltérő töltéssel rendelkező szennyezés) hatása azonos: a perturbáció erősségétől függően a megfelelő elemi gerjesztések (spin hullámok, fononok, elektronsáv) állapotsűrűsége hirtelen változást mutat: a folytonos spektrumon kívül lokalizált állapotok, vagy a folytonos spektrumon belül virtuális nívók jelennek meg. A részletes matematikai tárgyalást mellőzve egy egyszerű tipikus példán mutatjuk meg az állapotsűrűség-perturbációk jellegét. Ha a szennyezés  $V_0$  jól lokalizált potenciálja csak egy elektronsávban jelentős, akkor a tiszta fém elektron-állapotsűrűségének megváltozása a következő [8]:

$$\delta \varrho(E) = - \frac{V_0^2 F_0'(E) \varrho_0(E) + V_0(1 - V_0 F_0(E)) \varrho_0'(E)}{[1 - V_0 F_0(E)]^2 + [\pi V_0 \varrho_0(E)]^2}, \quad (\text{II.6})$$

ahol  $\varrho_0(E)$  a perturbálatlan kristály elektron-állapotsűrűsége, és

$$F_0(E) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_0(E')}{E - E'} dE' \quad (\text{II.7})$$

( $P$  az integrál főértékét jelenti.) Ez az állapotsűrűség-változás rezonancia jellegű azon  $E_0$  energia körül, melyre

$$1 - V_0 F_0(E_0) = 0 \quad (\text{II.8})$$

Ezen  $E_0$  körül

$$\delta \varrho(E) \simeq \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_0(E)}{(E - E_0)^2 + \Gamma_0^2(E)}, \quad (\text{II.9})$$



ahol

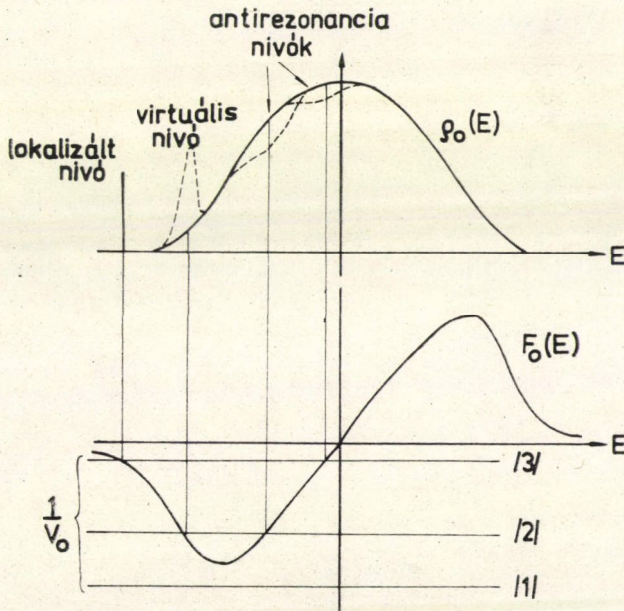
$$\Gamma_0(E) = -\frac{\pi \varrho_0(E)}{F'_0(E)}. \quad (\text{II.10})$$

Az 1. ábrán mutatott állapotsűrűség görbe esetén a szennyezéspotenciál  $V_0$  értékétől függően a következő esetek különböztethetők meg (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy vonzó potenciálról van szó, azaz  $V_0 < 0$ ):

1.  $V_0$  kicsi és így a (II.8) egyenletnek nincs  $E_0$  megoldása.
2.  $V_0$  elegendő nagy ahhoz, hogy (II.8)-nak van megoldása. Ekkor két eset lehetséges:
  - a) mindkét  $E_0$  megoldás az ideális kristály folytonos spektrumán belül van; ekkor  $\Gamma_0$  véges, az állapotsűrűségben megjelenik egy éles nívó (virtuális nívó) a sáv aljánál és egy széles állapotsűrűségcsökkenés (antirezonancia) a sáv közepén (ui. az utóbbinál az állapotsűrűség nagy, így  $\Gamma_0$  is nagy).
  - b) Az egyik  $E_0$  megoldás az ideális kristály folytonos spektrumán kívül van; ekkor  $\Gamma_0 = 0$ ,  $\delta \varrho(E) \rightarrow \delta(E - E_0)$  azaz lokalizált nívó jelenik meg. Most is megjelenik a sáv közepén egy széles antirezonancia. Ennek oka az, hogy a kristályban levő állapotok száma változatlan.

Taszító szennyező potenciál ( $V_0 > 0$ ), esetén a virtuális és a lokalizált nívó a sáv tetejének közelében képződik.

Az itt vázolt modell általánosításával (a szennyezés potenciál self-konzisztens



1. ábra. Állapotsűrűség perturbáció különböző szennyezéspotenciál értékeknél (lásd. szöveg)



meghatározása a Friedel-összeg szabályon keresztül, realisabb sávalak) jól leírható a vas, kobalt és nikkel mátrixokban levő szennyezések mágneses momentuma, az átlagmágnesezettség szennyezés okozta  $\frac{d\bar{\mu}}{dc}$  megváltozása [9—12], az elektron fajhő, a termoelektromos erő megváltozása [13, 14] stb.

### 3. A szennyezés hiperfinom terének anomális hőmérsékletfüggése

A II/1. pontban részletezték alapján várható, hogy tiszta mátrix esetén az atomok helyén mért hiperfinom tér jól követi a mátrix mágnesezettségét a hőmérséklet-függvényében, mivel a hiperfinom teret a polarizált  $d$ -elektronok hozzák létre. Azt találták azonban, hogy a hiperfinom tér egy kicsit gyorsabban csökken, mint a mágnesezettség (1—4%-kal, a hőmérséklettől függően). Ennek egy lehetséges magyarázatára az V/4. pontban részletesen visszatérünk. Az ötvözetekben levő szennyezés-mag helyén mért hiperfinom tér hőmérsékletfüggése általában szintén jól egyezik a mátrixatomok helyén mért hiperfinom terével, néhány esetben azonban lényegesen eltér attól. A későbbiekben a hiperfinom tér hőmérsékletfüggését minden esetben *anomálisnak* nevezzük, ha az eltér a perturbálatlan mátrixatomok helyén mért hiperfinom tér hőmérsékletfüggésétől.

Ilyen jellegű viselkedést először a  $\text{FeMn}$  ötvözetben figyeltek meg 1964-ben *Koi et al.* [15]. Azt találták, hogy a  $^{55}\text{Mn}$  mag NMR rezonanciafrekvenciája sokkal gyorsabban csökken növekvő hőmérséklettel, mint a vas mátrixé. Az anomáliát *Jaccarino et al.* [16] a Mn momentum gyors csökkenésének tulajdonították, mely a Mn hiperfinom terének törzspolarizációs járulékán keresztül hat. A szennyezésmomentum anomális hőmérsékletfüggését Heisenberg-modellben írták le elsőszomszéd-kölcsönhatást feltéve.

A Heisenberg-modellben az anomális momentum-viselkedés oka az, hogy a szennyezés-mátrix kicserélődési kölcsönhatás jóval kisebb, mint a mátrix-mátrix kicserélődési kölcsönhatás. Ennek eredményeként a spinhullám spektrumban alacsony energiájú „s-típusú” virtuális spinhullám nivó jelenik meg, amely nagy állapotsűrűség növekedést okoz. Ezért a hőmérséklet növelésekor ezek az alacsony energiájú állapotok a spinrendezetlenség felgyülemeléséhez vezetnek a szennyezés és annak helyének közelében. Következésképpen a szennyezés és a környező mátrixatomok mágnesezettsége jóval gyorsabban csökken mint a perturbálatlan mátrixatomoké [17, 18].

A Heisenberg-modell molekuláris tér közelítésében a virtuális spinhullám nivó megjelenésének az felel meg, hogy a Weiss-féle kicserélődési tér a szennyezés helyén jóval kisebb, mint a perturbálatlan mátrixatomok helyén.

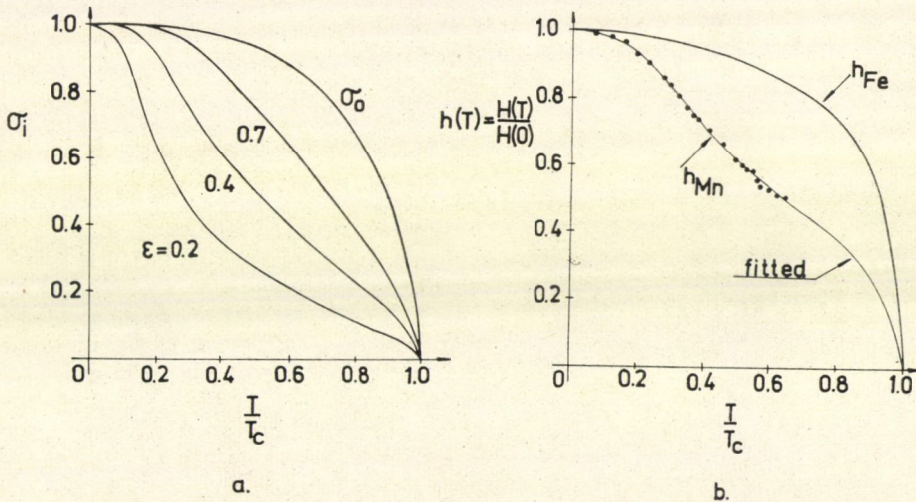
A legegyszerűbben tárgyalható az egyetlen szennyező atom esete a Heisenberg-modell molekuláris tér közelítésében, csak elsőszomszéd kölcsönhatásokat feltéve. A kicserélődési tér  $H_{ex} \sim \sum_{\delta} J(\delta)M(\delta)$ , — ahol az összegzés az elsőszomszédokra

történik;  $M(\delta)$  és  $J(\delta)$  pedig a mágnesezettség és a kicserélődési kölcsönhatás a  $\delta$  helyen — a  $B_S$  Brillouin-függvényen keresztül határozza meg a vizsgált momentum hőmérsékletfüggését. Így egy csatolt egyenletrendszer adódik a  $\sigma_i$  relatív mágnesezettségekre, ahol  $\sigma_{\text{Mn}}$  a szennyezés mágnesezettsége,  $\sigma_{1,2,3,4,5}$  pedig a szennyezés első, második, harmadik, negyedik és ötödik vas szomszédjának mágnesezettsége. Az egyenletrendszer szétcsatolását a  $\sigma_5 = \sigma$  feltevéssel végezzük, ahol  $\sigma$  a tiszta vas-



mátrix mágneszettsége. Az egyenletek alakja:

$$\begin{aligned}\sigma &= B_S \left( \frac{3S}{S+1} \frac{\sigma}{\tau} \right) \\ \sigma_{\text{Mn}} &= B_{S'} \left( \frac{3S'}{S+1} \varepsilon \frac{\sigma_1}{\tau} \right) \\ \sigma_1 &= B_S \left( \frac{3S}{S+1} \frac{\varepsilon S' / S \sigma_{\text{Mn}} + 3\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma}{8\tau} \right) \\ \sigma_2 &= B_S \left( \frac{3S}{S+1} \frac{\sigma_1 + \sigma_4}{2\tau} \right) \\ \sigma_3 &= B_S \left( \frac{3S}{S+1} \frac{\sigma_1 + 2\sigma_4 + \sigma}{4\tau} \right) \\ \sigma_4 &= B_S \left( \frac{3S}{S+1} \frac{\sigma_2 + 2\sigma_3 + 5\sigma}{8\tau} \right),\end{aligned}\quad (\text{II.11})$$



2. ábra

a) A szennyezés mágneszettsége különböző kicserélődési kölcsönhatásokra

$$\left( \varepsilon = J_{\text{Fe-Mn}} / J_{\text{Fe-Fe}}, S = 1, \tau = \frac{T}{T_c} \right)$$

b) A Mn hiperfinom terének hőmérsékletfüggése [15] és a (II.11) egyenlet alapján számított görbe

$$(\varepsilon = 0.44, H_{\text{CEP}}(0) = -36 \text{ kG})$$



ahol  $\tau = T/T_c$  a redukált hőmérséklet,  $T_c$  a Curie-pont;  $\varepsilon = J_{\text{Mn-Fe}}/J_{\text{Fe-Fe}}$  a kicserélődési kölcsönhatások aránya;  $S'$  és  $S$  a Mn és a mátrix atomok spinje;

$$B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \text{cth} \left( \frac{(2S+1)}{2S} x \right) - \frac{1}{2S} \text{cth} \left( \frac{x}{2S} \right)$$

a Brillouin függvény. A Mn momentumának a hőmérsékletfüggését ebben a modellben

$$\mu_{\text{Mn}}(T) = \mu_{\text{Mn}}(0) \sigma_{\text{Mn}}(T) \quad (\text{II.12})$$

adja, a Mn hiperfinom terének hőmérsékletfüggését pedig a II/1. pontban mondottak szerint a

$$H_{\text{Mn}}(T) = H_{\text{CP}}(T) + H_{\text{CEP}}(T) = a\mu_{\text{Mn}}(T) + H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0) \sigma_{\text{Fe}}(T) \quad (\text{II.13})$$

összefüggés írja le, ahol a  $H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0)$  a Mn hiperfinom terének vezetési elektron polarizációs járuléka  $T=0^\circ\text{K}$ -n. (II.13)-nak a mérésre való illesztéséből adódik  $\varepsilon$  és  $H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0)$  [16, 1]. A modell alapján számított szennyezés mágneszettségeket és Mn hiperfinom teret a 2. ábra mutatja. Ezen elmélet egyezését a kísérletileg mért Mn hiperfinom tér hőmérsékletfüggéssel tökéletesnek mondhattuk (a relatív eltérés kisebb, mint 0,005 az egész mérési tartományban)  $S'$  értékétől függetlenül, melytől azonban  $\varepsilon$  és  $H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0)$  értéke függött.

Az I. táblázat mutatja a különböző  $S'$  Mn spin érték feltevésével kapott paramétereket. Világosan látszik, hogy nincs jelentős változás a kapott illesztések minőségében, amiből következik, hogy  $S'$ -t nem lehet egyedül a hőmérsékletfüggésből meghatározni. A másik lényeges jellemzője a leírásnak, hogy csak nagyon kicsi vezetési elektron polarizációs járulék feltevése ad jó fittet [ $H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0)/H_{\text{hf}}^{\text{Mn}}(0) < 0,2$ ], míg a szennyezés hiperfinom tér szisztematika [1, 3] szerint a  $\text{Mn } H_{\text{hf}}^{\text{Mn}}(0) = -227 \text{ kG}$ -os teréből  $H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0) = -160 \text{ kG}$  a vezetési elektron polarizációs járulék.

### I. TÁBLÁZAT

A Mn hiperfinom terének hőmérsékletfüggéséből különböző  $S'$  Mn spin feltevésével meghatározott paraméterek FeMn-ban [1].  $\varepsilon = J_{\text{Fe-Mn}}/J_{\text{Fe-Fe}}$  a kicserélődési kölcsönhatások aránya,  $H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0)$  a Mn hiperfinom terének vezetési elektron polarizációs járuléka. Az illesztések minőségére jellemző átlagos eltérést is feltüntettük.

$S'$	$\varepsilon$	$H_{\text{CEP}}^{\text{Mn}}(0) [\text{kG}]$	Átlagos eltérés
1/2	0,44	- 36	0,56%
1	0,37	- 23	0,38%
3/2	0,31	- 7	0,29%
2	0,28	+ 9	0,32%
5/2	0,26	+ 27	0,41%

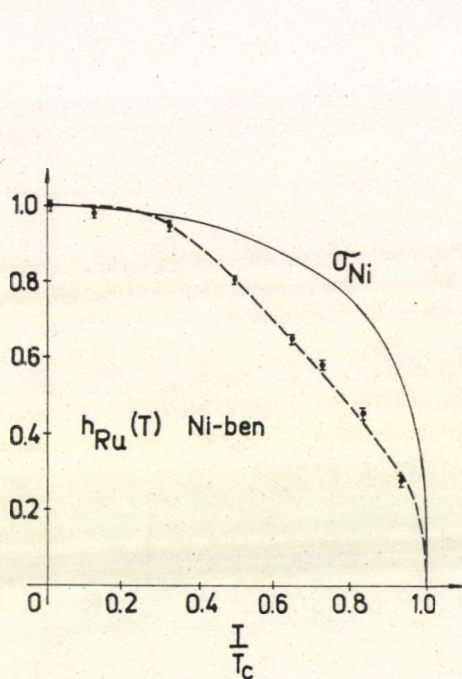
Hasonlóképpen a méréssel egyezésben magyarázható a FePd-ban a Pd [19], a NiRu-ban a Ru [1] hiperfinom terének anomális hőmérsékletfüggése. A 3. ábra mutatja a NiRu-ban a Ru szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggését a számítottal együtt. Ebben az esetben sem lehet a Ru spinjét egyértelműen meghatározni a mérésből [1].

A Heisenberg-modellből következik, hogy a Mn szennyezéseket környező vasatomok mágneszettsége gyorsabban csökken a perturbálatlan vasatomokénál ( $\sigma_0$ ). A 4. ábra mutatja a (II.11) egyenletekből számított  $\sigma_0 - \sigma_1$  különbséget a hőmérséklet függvényében, ahol  $\sigma_1$  a Mn elsőszomszéd vasatomjainak relatív mágneszettségét jelöli. A II/1. pontban írottak értelmében ennek az anomáliának meg kell jelennie a hiperfinom tér törzs-

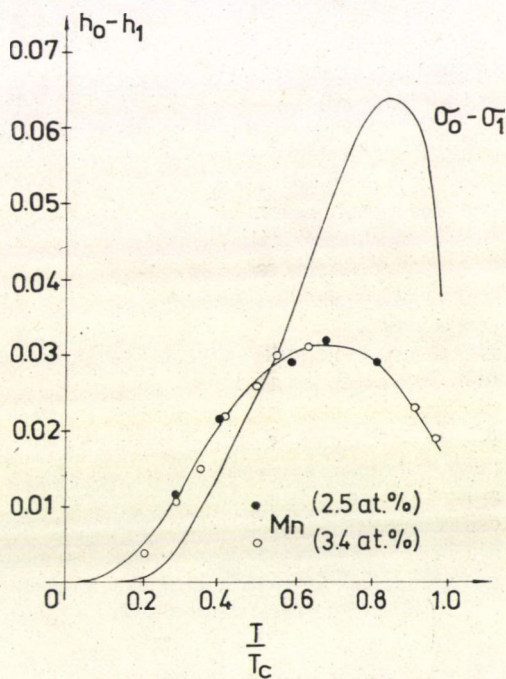


polarizációs járulékan keresztül a szennyezést környező vasatomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggésében.

A szennyezést környező vasatomok hiperfinom terének tudomásunk szerinti egyetlen megbízható hőmérsékletfüggő vizsgálatát *Cranshaw et al.* [20] végezte el Fe-7.5 at.% Mn ötvözetben 80 °K és 500 °K között. Anomális csökkenést figyeltek meg a Mn szennyezések első vasszomszédjainak hiperfinom terében, és ezt Heisenberg-modellben próbálták magyarázni, a szennyezéssel szomszédos vasatomok mágnesezettségének gyorsabb csökkenésének tulajdonítva. Nem sikerült azonban jó egyezést elérni az elmélet és a kísérlet között. A 4. ábra mutatja a vasatomok relatív hiperfinom terének különbségét a hőmérséklet függvényében a IV. fejezetben részletesen tárgyalt méréseink alapján. Jól látható, hogy a mennyiségi eltérésen kívül a  $h_0 - h_1$  és  $\sigma_0 - \sigma_1$  görbék alakja is lényegesen eltér.



3. ábra. A Ru szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggése nikkelben [1] és a Heisenberg modell alapján számított elméleti görbe ( $\varepsilon=0,82$ ,  $H_{CEP}(0)=+42$  kG)



4. ábra. A Heisenberg modellben (II.11) egyenletek alapján számított relatív mágnesezettségek különbsége és a mért relatív hiperfinom terek különbsége vasatomokra  $\text{FeMn}$ -ban

Adataink jó egyezésben vannak *Cranshaw et al.* [20] méréseivel az általuk vizsgált hőmérséklet tartományban. Méréseiknél azonban nehézséget okozott a magas szennyezéskonzentráció, ami miatt a minta kétfázisú volt. Ez limitálta a mérések hőmérséklettartományát, mert magas hőmérsékleten megjelent a  $\gamma$ -fázisnak megfelelő paramágneses csúcs a Mössbauer-spektrumban, jelezve a fázisátalakulás elkezdődését. Feltétlenül szükségesnek látszott újabb mérés elvégzése alacsonyabb Mn



koncentrációknál a hőmérséklet-intervallum kiterjesztésével az anomália okának megértéséhez.

A Heisenberg-modell alkalmazhatóságára ugyancsak bizonyítéknak tekintették a nemmágneses szennyezések hiperfinom terének a mátrixénál kicsit gyorsabb csökkenését (pl.  $\text{FeSn}$ -ben és  $\text{NiSn}$ -ben az  $\text{Sn}$  [21],  $\text{FeCu}$ -ban a  $\text{Cu}$  [22],  $\text{NiCd}$ -ban [1] vagy  $\text{GdCd}$ -ben a  $\text{Cd}$  [23] hiperfinom tere). Ezekben az esetekben ugyanis a teljes szennyezés hiperfinom tér vezetési elektron polarizációból származik ( $\mu_i \equiv 0$ ) és így hőmérsékletfüggése az elmélet szerint túlnyomórészt az elsőszomszéd mátrixatomok momentumának hőmérsékletfüggését követi. Ezen atomok mágnesezettsége pedig a Heisenberg-modell szerint gyorsabban csökken, mint a perturbálatlan mátrixatomoké, mert a nemmágneses szennyezés szomszéd miatt a kicserélődési tér kisebb a helyükön. Ez az elmélet a  $\text{FeSn}$  kivételével — ahol gyorsabb csökkenést figyeltek meg — jól leírja a nemmágneses szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggését.

Úgy tűnt, hogy a Heisenberg-modell legalábbis kvalitatíve sikeresen tudja leírni a ferromágneses mátrixban levő szennyezések hiperfinom terének hőmérsékleti anomáliáit. Két nyitott kérdés maradt, melyekre a modell nem tudott válaszolni:

1.  $\text{FeMn}$  és  $\text{NiRu}$  esetén a szennyezés hiperfinom terének vezetési elektron polarizációs járulékára adódó érték minden paraméter sorozatra lényegesen eltért a szennyezés hiperfinom tér szisztematikákból adódó értéktől [1, 24].
2. A modell nem ad választ arra, hogy a vasban miért éppen a  $\text{Mn}$  momentuma mutat anomális hőmérsékletfüggést [12], azaz miért éppen a  $\text{Mn}$  momentuma van lazán csatolva a mátrixéhoz, míg pl. a  $\text{V}$  [15],  $\text{Co}$  [25] és  $\text{Ni}$  [26] hiperfinom tere vasban csak lényegesen kisebb anomáliát mutat.

Campbell [24] 1970-ben kifejtett egy alternatív elképzelést, melyben a szennyezés momentumának anomális hőmérsékletfüggését a szennyezés többlettöltésének leárnnyékolásakor a Fermi-nívó közelében keletkező állapotsűrűség-perturbáció okozza. Ha a szennyezés töltését csökkentjük (változtatva a szennyezés fajtáját  $\text{Ni}$ -től  $\text{Ti}$ -ig), akkor egy kritikus szennyezés töltés értékénél a szennyezés indukálta nagy állapotsűrűség hirtelen lecsökken annak megfelelően, hogy a virtuális nívó a Fermi-energia fölé emelkedik (rezonancia-antirezonancia átmenet). Ezt a hirtelen csökkenést egy 5  $d$ -elektronnal töltött kötött állapot kiürülése okozza, mely a kötött állapot Fermi-nívó fölé ugrásának következménye. Ez az átmenet jelentkezik pl. a szennyezésmomentum hirtelen csökkenésében, az átlagmágnesezettség változásának  $\left(\frac{d\bar{\mu}}{dc}\right)$  előjelváltásában.

Az átmenetnek egy csúcs felel meg a maradékellenállásban, melyet az erős  $s-d$  szórás hoz létre, aminek az az oka, hogy egy kötött állapot képződik a spin-fel Fermi-nívó közelében. Az átmenet a kísérleti adatok szerint  $T=0^\circ\text{K}$ -n a  $\text{Fe}$ ,  $\text{Co}$  és  $\text{Ni}$  mátrixokban a  $\text{Mn}$ ,  $\text{Ru}$  és  $\text{Os}$  szennyezések közelében fordul elő.

Ha a hőmérsékletet növeljük, a leárnnyékolási feltételek kicsit megváltoznak a Fermi-nívó termikus elkenődése miatt, ami nagy változást képes létrehozni a Fermi-nívó közelében levő keskeny kötött állapot betöltésében. Campbell [24] maradék ellenállás adatok alapján a már ismerteken kívül a következő esetekben várta a szennyezésmomentum anomális hőmérsékletfüggését:  $\text{NiCr}$ ,  $\text{NiOs}$ ,  $\text{CoMn}$ ,  $\text{CoRu}$ ,  $\text{CoOs}$  és  $\text{FeRu}$  vagy  $\text{FeTc}$ .

A szennyezésmomentum anomális hőmérsékleti viselkedésének megértése szempontjából nagyon fontos tehát annak ismerete, hogy mely szennyezések esetén



figyelhető meg anomália. A szennyezésmomentum hőmérsékletfüggésének közvetlen mérése diffúz neutronszórással a kísérleti nehézségek miatt jelenleg gyakorlatilag nem valószínűsíthető meg. Másik lehetséges módszer a szennyezések hiperfinom tere hőmérsékletfüggésének vizsgálata, ez azonban különböző magfizikai módszereket igényel és szintén nagy kísérleti nehézségekkel jár, ezért csak néhány magra végezték el szélesebb hőmérséklet intervallumban. Problémát jelent, hogy a szennyezés hiperfinom tere kissé különbözhet a mátrixétól akkor is, ha a momentuma nem mutat anomáliát — mint erre később visszatérünk — így nem ad egyértelmű információt az anomális szennyezésmomentum hőmérsékletfüggésére. Mégis lehetséges szisztematikus vizsgálat a szennyezést környező mátrixatomok hiperfinom tere hőmérsékletfüggésének mérésével, mely a hiperfinom tér CEP járuléka révén tartalmaz információt a szennyezésmomentumának hőmérsékletfüggésére is. Jelen dolgozat tartalmazza az első ilyen jellegű rendszeres vizsgálatok eredményeit, melyeket vasmátrix esetén Mössbauer-effektus segítségével végeztünk el.

### III. Kísérleti módszer és eredmények

#### 1. Mössbauer-effektus (ME)

A  $\gamma$ -sugarak visszalökődésmentes rezonancia abszorpcióját, mely különösen alkalmas a magnívók energia változásainak meghatározására, 1958-ban fedezte fel R. L. Mössbauer. A módszer lényege az, hogy a forrásban levő gerjesztett  $^{57}\text{Fe}$  magok ( $^{57}\text{Co}$ ) által emittált  $\gamma$ -sugarak energiáját megváltoztatjuk a forrás sebességének változtatásával (a Doppler-effektus révén) és így az alkalmas az abszorbensben levő  $^{57}\text{Fe}$  magok megváltozott energianívóinak letapogatására. Így a mérés eredménye egy abszorpciós spektrum a forrás megváltozott energiájának (azaz sebességének) függvényében.

Jelenleg több összefoglaló cikk és könyv [27—30] foglalkozik elveivel és alkalmazásaival, ezért csak röviden foglalkozunk a Mössbauer-spektrumból meghatározható paraméterek leírásával. Vasban Mössbauer-effektust a  $^{57}\text{Fe}$  mag alapállapota és első gerjesztett állapota közötti  $\gamma$ -átmenetekre figyeltek meg. Az első gerjesztett állapot félélettartama  $0,14 \mu\text{sec}$ , mágneses dipólmomentuma  $\mu_e = -0,155$  magmagneton, quadrupol momentuma  $Q_e = 0,3$  b, spinje  $I_e = 3/2$ . Az alapállapotba való  $\gamma$ -átmenet energiája  $14,4 \text{ keV}$ . A  $^{57}\text{Fe}$  alapállapotának spinje  $I_g = 1/2$ , mágneses dipólmomentuma  $\mu_g = +0,0903$  magmagneton.

A Mössbauer-spektrum vonalszerkezetét  $^{57}\text{Fe}$  esetén három kölcsönhatás alakítja ki. Az elektrosztatikus kölcsönhatás a mag pozitív töltése és a mag helyén levő elektron töltéssűrűsége között adja az izomer shiftet. A mag mágneses dipólmomentuma és a mag helyén levő effektív tér közti kölcsönhatás adja a mágneses hiperfinom felhasadást. Végül a mag elektromos kvadrupol momentuma és a mag helyén levő elektromos térgradiens közötti kölcsönhatás adja a kvadrupol felhasadást. Ez utóbbi vasban és vasalapú ötvözetekben elhanyagolhatóan kicsi, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

**Vonal alak.** A Mössbauer-effektus abszorpciós vonalai elvben Lorentz-alakúak, melyek szélességét a gerjesztett nívó élettartama határozza meg. Véges abszorbens vastagság esetén a  $\gamma$ -sugárzás energiaeioszlásának alakja torzul amint végighalad az abszorbensen. Ezt jó közelítéssel egy kiszélesedett Lorentz-alak írja le [31].



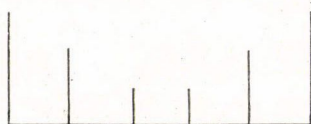
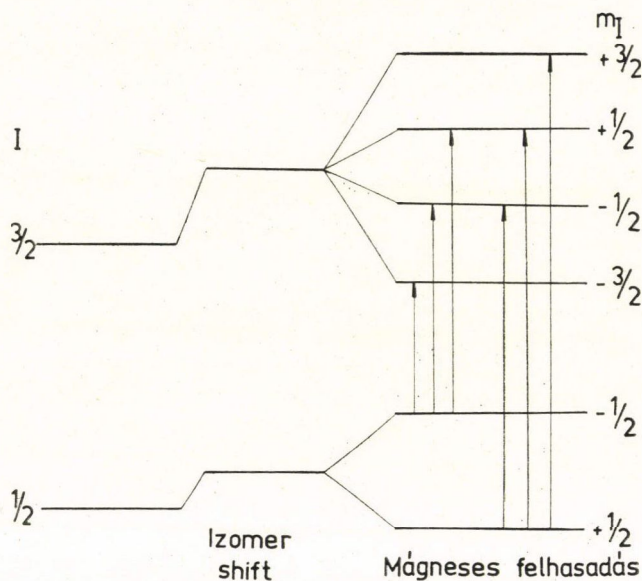
A vonal további kiszélesedését okozza a forrásban végbemenő önabszorpció, valamint az apparatív instabilitás és nonlinearitás.

*Izomer shift.* Az elektron és magtöltés átlapolása miatti elektrosztatikus kölcsönhatás energiája különböző a két nívóra, mert a mag alap és gerjesztett állapotában különböző effektív töltéssugárral rendelkezik és ezért a  $\gamma$ -sugár energiája eltolódik. Relativisztikus effektusokat elhanyagolva, az izomer shift:

$$i = \frac{4\pi}{5} Ze^2 [|\Psi_a(0)|^2 - |\Psi_s(0)|^2] R^2 \frac{\Delta R}{R} \quad (\text{III.1})$$

ahol  $\Delta R$  a gerjesztett állapot magsugarának növekedése az alapállapotéhoz képest,  $Z$  a magtöltés,  $|\Psi_a(0)|^2$  és  $|\Psi_s(0)|^2$  az elektron sűrűségek a mag helyén az abszorbenzben és a forrásban.

*Mágneses hiperfinom felhasadás.* A mag helyén ható effektív tér hatására a mag



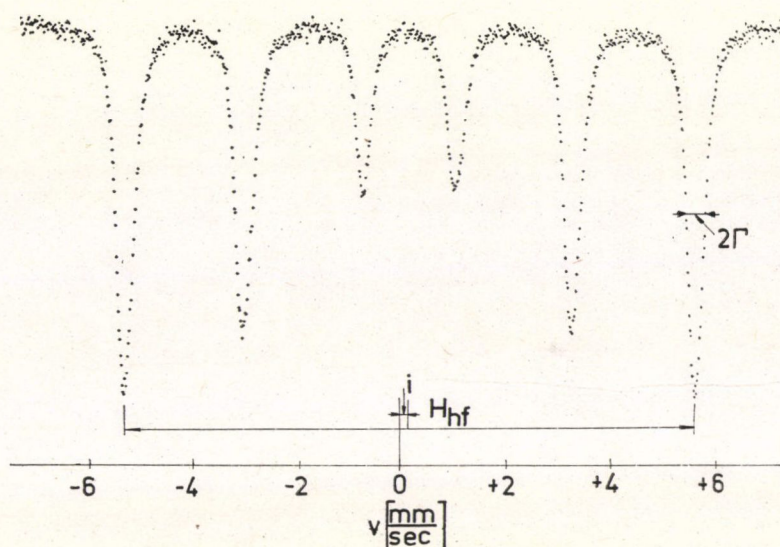
Az átmeneteknek megfelelő spektrumvonalak

a.

5. a. ábra

A  $^{57}\text{Fe}$  magnívóinak felhasadása és a köztük levő átmenetek





5. b. ábra. Mössbauer spektrum tiszta vas esetén

nívói Zeeman-felhasadást mutatnak.  $^{57}\text{Fe}$ -ban a  $3/2$ -es spinű gerjesztett nívó 4 alnívóra, az  $1/2$ -es spinű alapállapotú nívó 2 alnívóra hasad fel. Az  $M1$  átmenetekre érvényes kiválasztási szabályok 6 átmenetet engednek meg ezen nívók között, és a vonalak intenzitását, polaritását a Zeeman-átmenetekre érvényes szabályok határozzák meg. A mag helyén mért effektív tér két fő járulékát már említettük a II/1. pontban, részletes diszkussziójuk az idézett munkákban található [1–3].

Fentieket összefoglalva, tiszta vasban a Mössbauer-spektrum 6 Lorentz-alakú görbéből áll a forrás sebességének függvényében, mely a következőképpen írható le:

$$L(s) = A_0 - a \sum_{k=1}^6 \frac{j(k)}{\left( \frac{s - i + g(k)H_{hf}}{\Gamma} \right)^2 + 1}, \quad (\text{III.2})$$

ahol  $s$  jelenti a forrás sebességét,  $A_0$  az alapvonal (a háttér beütésszám),  $a$  az effektus nagysága,  $g(k)$  a gerjesztett és alapállapot  $g$ -faktoraiból képzett lineárkombináció,  $j(k)$  az egyes átmenetek intenzitás aránya (polikristályos mintára: 3:2:1:1:2:3),  $i$  és  $H_{hf}$  a mag helyén mért izomer shift és hiperfinom tér,  $2\Gamma$  pedig a vonalszélesség.

Az 5. ábra mutatja  $^{57}\text{Fe}$  esetén a magnívók felhasadását és a köztük levő átmeneteket, valamint a Mössbauer spektrumot és a belőle meghatározható paramétereket tiszta vas esetén.

## 2. Berendezés

A mérésekre konstans gyorsulási Mössbauer-spektrométert használtunk, melyet a MTA Központi Fizikai Kutató Intézetében fejlesztettek ki és építettek meg [32]. Ezen berendezés hosszú idejű stabilitása és linearitása jobb mint az általánosan használt hasonló berendezéseké. A mérésekben a differenciális nonlinearitás



kisebb volt mint 0,1% és nem volt mérhető változás a sebességben és a sebesség nullpontjában több napos üzem alatt sem.

A Mössbauer-forrás 10 mCi, illetve 50 mCi  $^{57}\text{Co}$  volt Cr mátrixba diffundálva. A spektrumokat 1024 csatornás analizátorban tároltuk, és a spektrumonkénti  $100\text{--}300 \cdot 10^3$  impulzus/csatorna begyűjtéséhez kb. 24 órás mérésekre volt szükség. A mérések hőmérséklettartománya folyékony nitrogén hőmérséklettől az ötvözetek Curie-pontjáig terjedt ( $700\text{--}800^\circ\text{C}$ ). Az alacsony hőmérsékletű mérésekre egy ún. „hidegujjas” kriosztátot, a magas hőmérsékletű mérésekre pedig egy vákuumkályhát használtunk. Mindkét esetben a hőmérsékletet szabályozórendszerrel  $\pm 0,5^\circ\text{C}$ -nál jobban stabilizáltuk. A mérések reprodukálhatósága a kísérleti hibahatáron belül volt.

### 3. Minták

A méréseket vasalapú rendezetlen ötvözeteken ( $\alpha$ -fázisú) végeztük (melyeket a KFKI Szilárdtestfizikai Főosztályának Technológiai Csoportja készített el), a következő szennyezések és koncentrációk esetén:

*Nemmágneses szennyezések:*

Al (2,7, 4,0, 11,0 és 16,0 at. %), Ga (2,8, 4,0 és 10,0 at. %) és Sn (4,0 at. %).

*3d szennyezések:*

Ti (3,0 at. %), V (2,0 és 5,0 at. %), Cr (2,2 at. %), Mn (2,5 és 3,4 at. %), Co (3,0 at. %) és Ni (3,0 és 5,0 at. %).

*4d szennyezések:*

Mo (1,0 at. %), Ru (3,6 at. %), Rh (3,0 at. %) és Pd (1,0 at. %).

*5d szennyezések:*

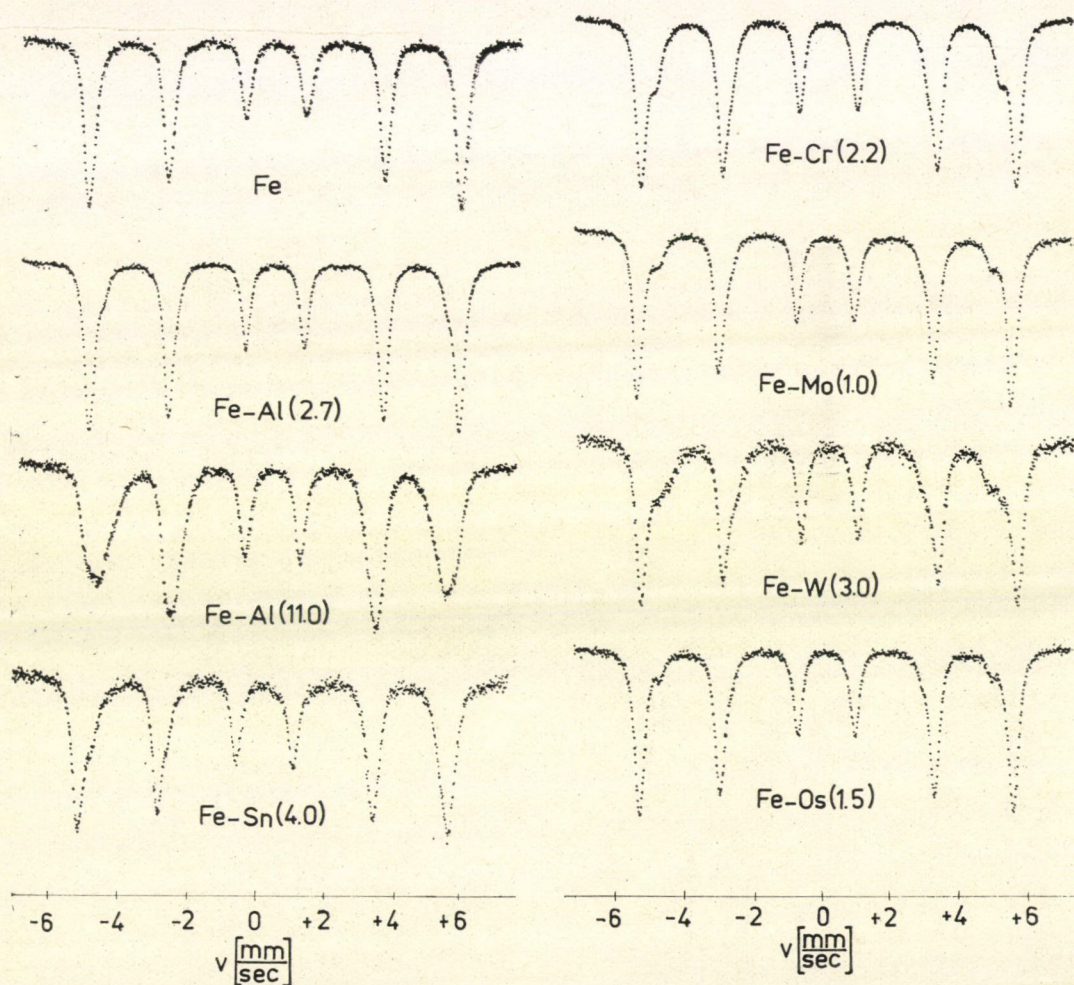
W (5,0 at. %), Re (3,0 at. %), Os (1,5 at. %), Ir (3,0 at. %) és Pt (3,0 at. %).

Mint látható, méréseket végeztünk az összes mágneses *d*-szennyezésen, melyek oldathatók vasban. A minták 99,99% tisztaságú vasból és szennyezőből készültek vákuumban történő indukciós olvasztással. Az Al és Ga tartalmú ötvözeteken végzett kémiai analízis nem mutatott  $\pm 0,2$  at. %-nál nagyobb eltérést a névleges koncentrációnál. A többi minta esetén nem történt analízis, de az olvasztás utáni súlyvesztés csekély volt, így a névleges összetételt helyesnek fogadtuk el. A minták összetétele jól egyezett a Mössbauer-spektrumokból meghatározott összetétellel. Az olvasztás után a minták  $1100^\circ\text{C}$ -nál 1/2 órás homogenizáló hőkezelést kaptak, majd  $20\text{--}30\ \mu$  vastagságú lemezeket hengereltünk belőlük a 10,0 at. % Ga, 4,0 at. % Sn és 5,0 at. % W tartalmú minták kivételével. Ezeket részben törekenységük, részben keménységük miatt nem lehetett hengerelni, és ezért a mérések  $50\ \mu$ -nál kisebb szemcsészetű pormintákon történtek. A mintákat a hengerelés után három napon keresztül  $850^\circ\text{C}$ -on  $\text{H}_2$  atmoszférában homogenizáltuk. Ezen hőkezelések után nem volt változás tapasztalható a szobahőmérsékleten mért paraméterek értékében a magas hőmérsékleten végzett mérések után.



## 4. A mérések kiértékelése

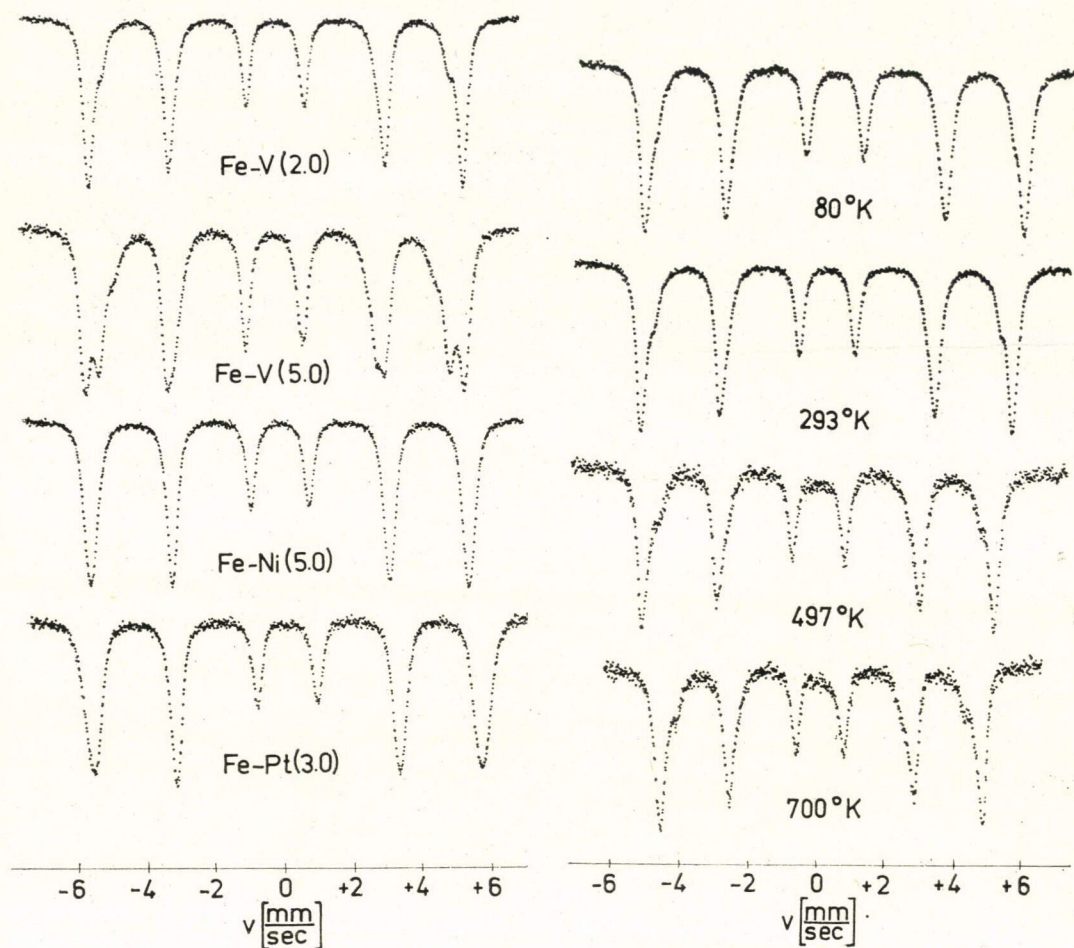
A szennyezések hatására megváltozik a környezetükben levő Fe atomok elektron eloszlása, és így természetesen ezeknek a magjukkal való kölcsönhatása, aminek következtében a mag energianívói eltolódnak. Ez azt jelenti, hogy a szennyezést környező Fe atomok izomer shiftje és hiperfinom tere megváltozik a perturbálatlan Fe atomokéhoz képest. Így a különböző szennyezés környezettel rendelkező Fe atomokhoz különböző paraméterekkel jellemzett szeztettek fognak tartozni, ami vagy különálló szatellitpek megjelenéséhez, vagy aszimmetrikusan kiszélesedett Mössbauer-spektrumokhoz vezet. Tipikus példák láthatók a 6. ábrán, mely különböző ötvözetek szobahőmérsékletű spektrumait mutatja. Ugyancsak ezen az ábrán



6. a. ábra. Különböző ötvözetek szobahőmérsékletű Mössbauer-spektruma

6. b. ábra. Különböző ötvözetek szobahőmérsékletű Mössbauer-spektruma





6. c. ábra. Különböző ötvözetek szobahőmérsékletű Mössbauer-spektruma

6. d. ábra. Fe-Mn (3,4 at. %) ötvözet Mössbauer-spektruma különböző hőmérsékleteken

látható a Fe-Mn (3,4 at. %) ötvözet különböző hőmérsékleteken felvett Mössbauer-spektruma. Általában a szennyezés első és harmadik vagy első és második szomszédságában levő Fe atomok izomer shiftjének és hiperfinom terének változását sikerült Mössbauer-effektussal meghatározni, a többi szomszéd hatását nem tudtuk felbontani, azok a vonalszélesség megnövekedését okozzák.

A spektrumok számítógépes kiértékelésére használt programok elkészítésénél arra törekedtünk, hogy a lehető legkevesebb számú paraméter bevezetésével adjunk kielégítő leírást. Ezért a spektrumokra egyenlő vonalszélességű szeztetteket illesztettünk, melyek mindegyike egy adott szennyezéskonfigurációjú vasatomnak felelt meg [33]. A rendezetlen szennyezés eloszlás miatt a szeztettek relatív amplitúdó-eloszlását binomálisnak tételeztük fel, azaz annak valószínűsége, hogy egy vasatom-



nak  $c$  szennyezés koncentrációjánál egy  $z_1$  koordinációs számmal jellemzett szomszédságban  $n$ ,  $z_2$  koordinációs számú szomszédságban  $m$  szennyezésszomszédja legyen:

$$p(z_1, z_2, n, m, c) = p_{z_1}(n, c) \cdot p_{z_2}(m, c) = \binom{z_1}{n} c^n (1-c)^{z_1-n} \binom{z_2}{m} c^m (1-c)^{z_2-m}. \quad (\text{III.3})$$

Itt  $z_1=8$  az első szomszédokra és  $z_2=6$ , ill. 12 a második, illetve harmadik szomszédokra. A paraméterek számának limitálása miatt a szennyezések hatását additívnak és relatív helyzetüktől függetlennek tételeztük fel, azaz egy adott konfigurációra a hiperfinom tér:

$$H(n, m) = H_0 + n\Delta H_1 + m\Delta H_{2,3}, \quad (\text{III.4})$$

és az izomer shift:

$$i(n, m) = i_0 + n\Delta i_1 + m\Delta i_{2,3}. \quad (\text{III.5})$$

Itt  $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_{2,3}$  és  $\Delta i_1$ ,  $\Delta i_{2,3}$  a vasatomok hiperfinom terének és izomer shiftjének az első, illetve a második vagy harmadik koordinációs szférában levő szennyezés okozta megváltozása,  $H_0$  és  $i_0$  a perturbálatlan vasatomok (melyeknek az adott koordinációs szférákban nincs szennyezés szomszédjuk) hiperfinom tere és izomer shiftje, melybe természetesen beleértjük a le nem választott távolabbi szennyezések hatását is. Az additivitás feltevése nem túl lényeges az alacsony szennyezés koncentrációjú mintákra ( $\leq 5$  at. %), mert nagyon kevés a valamelyik koordinációs szférában egyidejűleg két szennyezés szomszédokkal rendelkező vasatomok száma. A nagyobb szennyezés koncentrációjú mintákra (Al és Ga) az ebben a közelítésben számított  $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_3$ ,  $\Delta i_1$  és  $\Delta i_3$  koncentrációfüggetlennek adódott, a fenti feltevést igazolva.  $H_0$  és  $i_0$  megfigyelt koncentrációfüggését a feloldatlan szatellitek hatásának tulajdonítottuk. Végeredményben a mért spektrumokat a következő módon írtuk le:

$$L(s) = A_0 - a \sum_{n=0}^{z_1} \sum_{m=0}^{z_2} p(z_1, z_2, n, m, c) \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{j(k)}{\left( \frac{s - i(n, m) - g(k)H(n, m)}{\Gamma} \right)^2 + 1} \quad (\text{III.6})$$

A kiértékelő programban iterálni tudtunk a szennyezésközpontokra, mely a vonalak relatív intenzitását határozza meg, és az a tény, hogy az innen kapott koncentráció jól egyezett a névleges koncentrációval, bizonyítja azt, hogy a binomiális eloszlás feltevése jó közelítés volt. Minden szennyezés esetén a szobahőmérsékletű spektrumra részletes  $\chi^2$ -tesztet végeztünk el, hogy megkapjuk a legkisebb számú paramétert (általában 6—9 paraméter elegendő volt), amely a spektrumokra jó illesztést ad. Ennek eredményeként sikerült elkerülnünk azokat a megnövekedett korreláció miatti bizonytalanságokat, amelyek a túl sok paraméter illesztéséből adódnak, és így a paraméterek hibájának a statisztikus hibához képesti lényeges megnövekedését okozzák.

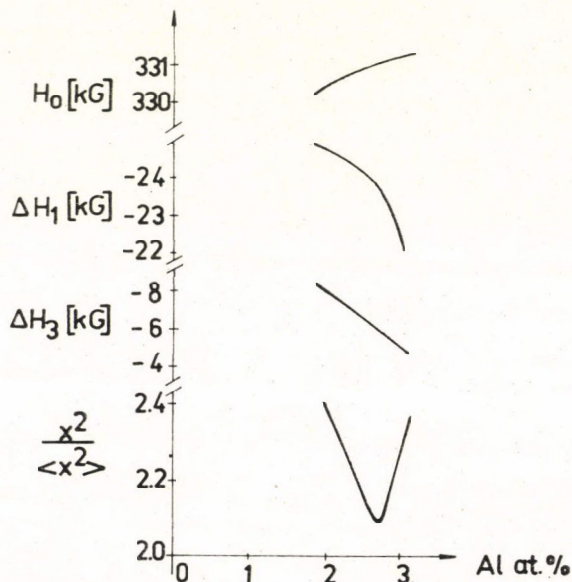
Ez utóbbi történet *Stearns* szobahőmérsékletű spektrumainak dekomponálása [34] esetén, aki a szennyezés 5. koordinációs szférájáig bezárólag vélte meghatározni a vasatomok hiperfinom terének változását. Eredményei lényegesen eltérnek a direkt spin-echo [35—37] és cwNMR [38] mérésekből kapott változásoktól, amelyet a hibás kiértékelésnek tulajdoníthatunk. Hasonló a helyzet *Schurer et al.* [39] mérése esetén, akik a FeSi és FeMn híg ötvözetekben vizsgálták a vasatomok hiperfinom terét a hőmérséklet függvényében. Nem korlátozták azonban a paraméterek számát és ezenkívül helytelen konfigurációt tételeztek fel, ami a hiperfinom terek értékei közti erős korrelációra és a hiba igen nagymértékű megnövekedésére vezetett. Ezek a nehéz-



ségek elkerülhetők a spektrumok lépcsőzetes kiértékelésével, melyre néhány tipikus példát mutatunk be.

A legkisebb négyzetek módszerének elméletéből jól ismert, hogy a súlyozott négyzetes eltérés várható értéke:  $\langle x^2 \rangle =$  mérési pontok száma (azaz csatornaszám) — illesztett paraméterek száma. A továbbiakban  $x^2$  alatt mindig a várható értékre normált értéket fogjuk érteni ( $= x^2 / \langle x^2 \rangle$ ), mely tökéletes illesztés esetén 1 lenne. A valóságban mindig nagyobb értéket kapunk, amit az illesztett függvényalak közelítő jellege magyaráz. Az ideális értéktől való eltérés nő a spektrumok statisztikájának növelésére. Azok a paraméter értékek a legjobban meghatározottak, amelyek illesztésére a legnagyobb  $x^2$ -csökkenést kapjuk.

Például a Fe-2,7 at. % Al ötvözet Mössbauer-spektruma esetén az  $x^2 = 12,97$ , amikor átlagteret (egy szextett, azaz 5 paraméter) illesztünk, és ez az első szennyezés-szomszédok járulékanak figyelembevételével (további 2 paraméter)  $x^2 = 3,59$ -re csökken. A spektrumban még megmaradó kiszélesedést tulajdoníthatjuk a szennyezés második vagy harmadik vasszomszédjainak. Azonban az első esetben  $x^2 = 3,11$ , míg az utóbbiban  $x^2 = 2,09$ , ami egyértelműen azt mutatja, hogy a kapott hiperfinom tér és izomer shift megváltozás az Al szennyezések harmadik koordinációs sférájából származik, egyezésben a spin-echo [35] és cwNMR [38] mérések eredményeivel. Nem kapunk azonban további lényeges csökkenést a  $x^2$  értékében (a csökkenés kisebb, mint 0,2), ha további paramétereket (pl. másod- vagy negyed-szomszéd járulékokat) próbálunk meghatározni. Ez azt jelenti, hogy az adott feltételek mellett ezek a perturbációk nem bonthatók fel. Érdekes megjegyeznünk, hogy az ötvözetek rendezetlensége miatt az ilyen lépcsőzetes dekomponálás során nyert paramé-



7. ábra. Fe-Al (2,7 at.%) ötvözet szobahőmérsékletű Mössbauer spektrumának különböző szennyezés-koncentráció feltevessel végzett dekomponálásakor kapott paraméter és  $x^2$  értékek

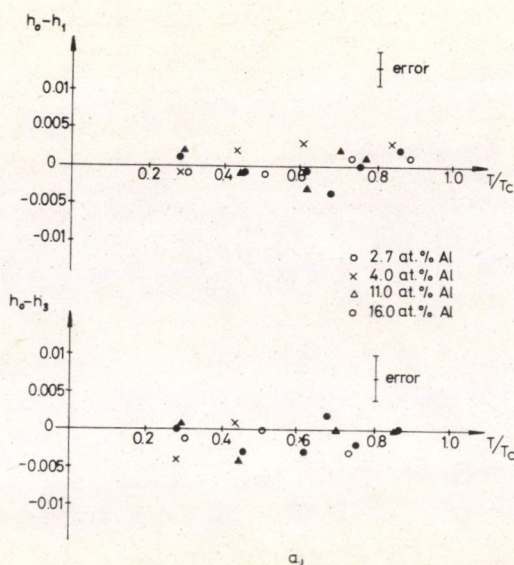


terek 5–10%-nál kevesebbet változnak az új paraméterek illesztésére, aminek az az oka, hogy az ötvözetek rendezetlensége miatt a távolabbi szomszédok átlagos konfigurációja azonos és így hatásuk kiátlagolóódik. A 7. ábrán láthatók a különböző szennyezéskonzentráció feltevés mellett dekomponált paraméterek és  $x^2$  értékek. Az  $x^2$ -ben látható éles minimum jelzi a valódi koncentrációt.

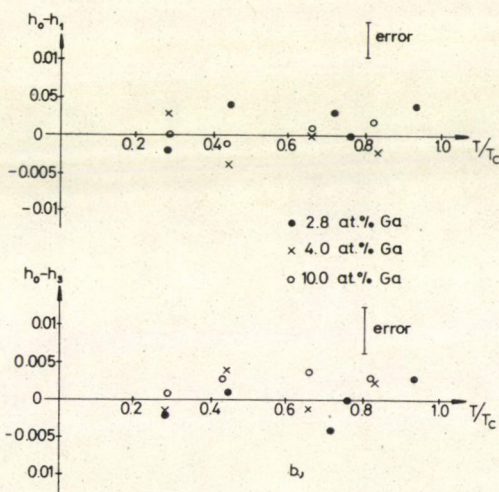
Következő példa a Fe-2,0 at. % V ötvözet Mössbauer-spektruma. Ebben az esetben a felbontás nem elegendő az első és második szomszéd  $\Delta H_1$  és  $\Delta H_2$  járulékának szétválasztására. Ez a kiértékelés során abban jelentkezik, hogy a  $x^2$  értéke nem csökken a  $\Delta H_1 = \Delta H_2$  feltevésével számoltéhoz képest, viszont erősen megnő a paraméterek közti korreláció (ami a paraméterek közti lineáris összefüggést jelenti) és ez bizonyos esetekben a hibamatrix szingulárisává válásához vezet. A legújabb spin-echo mérések [36] szerint sem lehet az első és másodsomszéd járulékokat FeV esetén szétválasztani. A spektrumok kiértékelése szempontjából különösen nehéz a Fe (Co, Ni ... stb.) ötvözetek esete, mert a  $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_2$  változások kicsik és azonos előjelűek, ami erős korreláció fellépéséhez vezet közöttük.

#### IV. Kísérleti eredmények

A szobahőmérsékletű mérések eredményei a II–V. táblázatokban találhatók. Az általunk meghatározott szennyezés okozta hiperfinom térváltozások kitűnő egyezésben vannak az előző spin echo [35–37, 39], cwNMR [38] és Mössbauer [33, 40] mérésekből kapott és legjobbnak tartott adatokkal. Néhány szennyezés esetén, mint Ni, Mo, Rh, Pd,



8.a. ábra. A relatív hiperfinom terek közti különbség mint a hőmérséklet függvénye:  $h_0$ ,  $h_1$  és  $h_3$  a perturbálatlan vasatomok, és az egy első vagy egy harmadik szomszéd szennyezéssel rendelkező vasatomok relatív hiperfinom tere Al esetén



8.b. ábra. A relatív hiperfinom terek közti különbség mint a hőmérséklet függvénye:  $h_0$ ,  $h_1$  és  $h_3$  a perturbálatlan vasatomok, és az egy első vagy egy harmadik szomszéd szennyezéssel rendelkező vasatomok relatív hiperfinom tere Ga esetén



## II—III. TÁBLÁZAT

Hiperfinom terek, izomer shifték és Curie pontok mint az Al és Ga szennyezések koncentrációjának függvénye:  $T_c$  a Curie hőmérséklet,  $H_0$  és  $i_0$  a perturbálatlan vasatomok hiperfinom tere és izomer shiftje,  $H_1$ ,  $\Delta H_3$  és  $\Delta i_1$ ,  $\Delta i_3$  a hiperfinom tér és izomer shift megváltozásai, melyet az első és a harmad-szomszédsszennyezések okoznak (szobahőmérsékleten).

## II. FeAl

at. %	$T_c$ [°K]	$H_0$ [kG]	$i_0$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$	$\Delta H_1$ [kG]	$\Delta H_3$ [kG]	$\Delta i_1$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$	$\Delta i_3$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$
0	1041	330	0,154				
2.7	1035 $\pm 2$	331,1 $\pm 0,1$	0,1605 $\pm 0,0004$	-23,8 $\pm 0,1$	-6,1 $\pm 0,1$	0,023 $\pm 0,002$	-0,007 $\pm 0,002$
4.0	1032 $\pm 2$	331,1 $\pm 0,1$	0,163 $\pm 0,001$	-22,2 $\pm 0,2$	-5,6 $\pm 0,3$	0,024 $\pm 0,002$	-0,006 $\pm 0,002$
11.0	1013 $\pm 2$	335,2 $\pm 0,2$	0,181 $\pm 0,003$	-21,9 $\pm 0,2$	-6,5 $\pm 0,2$	0,016 $\pm 0,001$	-0,001 $\pm 0,002$
16.0	980 $\pm 2$	337,7 $\pm 0,4$	0,194 $\pm 0,005$	-22,8 $\pm 0,1$	-6,6 $\pm 0,2$	0,016 $\pm 0,002$	-0,000 $\pm 0,003$

## III. FeGa

at. %	$T_c$ [°K]	$H_0$ [kG]	$i_0$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$	$\Delta H_1$ [kG]	$\Delta H_3$ [kG]	$\Delta i_1$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$	$\Delta i_3$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$
2.8	1039 $\pm 2$	331,6 $\pm 0,2$	0,164 $\pm 0,001$	-20,0 $\pm 0,2$	-6,5 $\pm 0,2$	0,039 $\pm 0,002$	-0,007 $\pm 0,002$
4.0	1037 $\pm 2$	332,6 $\pm 0,2$	0,169 $\pm 0,001$	-19,5 $\pm 0,3$	-6,9 $\pm 0,3$	0,039 $\pm 0,003$	-0,004 $\pm 0,003$
10.0	1026 $\pm 2$	340,9 $\pm 0,4$	0,207 $\pm 0,004$	-20,1 $\pm 0,3$	-8,5 $\pm 0,4$	0,042 $\pm 0,004$	-0,017 $\pm 0,005$

## IV. TÁBLÁZAT (FeSn)

$H_0$  és  $i_0$  a perturbálatlan vasatomok hiperfinom tere és izomer shiftje,  $\Delta H_1$ ,  $\Delta H_2$  és  $\Delta i_1$ ,  $\Delta i_2$  a hiperfinom tér és izomer shift megváltozása első és másod-szomszéd ön atomok hatására (szobahőmérsékleten).

$H_0$ [kG]	$i_0$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$	$\Delta H_1$ [kG]	$\Delta H_2$ [kG]	$\Delta i_1$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$	$\Delta i_2$ $\left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right]$
332,8 $\pm 0,1$	0,185 $\pm 0,001$	-21,4 $\pm 0,4$	-10,5 $\pm 0,7$	0,056 $\pm 0,004$	-0,014 $\pm 0,006$



## V. TÁBLÁZAT

A hiperfinom tér megváltozása szobahőmérsékleten a szennyezés első ( $\Delta H_1$ ), második ( $\Delta H_2$ ) és harmadik ( $\Delta H_3$ ) vasszomszédjánál.

## a) 3d-szennyezések

	Ti	V	Cr	Mn	Co	Ni
$\Delta H_1$ [kG]	$-19,1 \pm 0,3$	$-24,4 \pm 0,4$	$-26,9 \pm 0,2$	$-23,0 \pm 0,1$	$13,3 \pm 0,5$	$9,4 \pm 0,3$
$\Delta H_2$ [kG]	$-19,1 \pm 0,3$	$-24,4 \pm 0,4$	$-26,9 \pm 0,2$	—	$6,0 \pm 1,0$	$7,0 \pm 1,0$

## b) 4d-szennyezések

	Mo	Ru	Rh	Pd
$\Delta H_1$ [kG]	$-38,7 \pm 0,5$	$-20,2 \pm 0,3$	$11,6 \pm 0,3$	$11,8 \pm 0,3$
$\Delta H_2$ [kG]	$-31,6 \pm 0,7$	—	$7,9 \pm 1,0$	$6,0 \pm 2,0$
$\Delta H_3$ [kG]	—	$5,8 \pm 0,3$	—	—

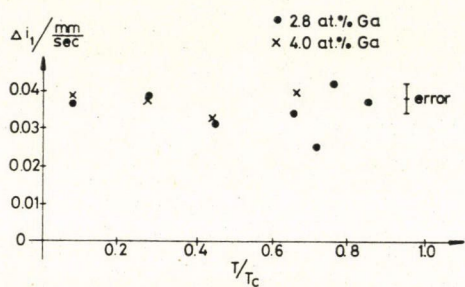
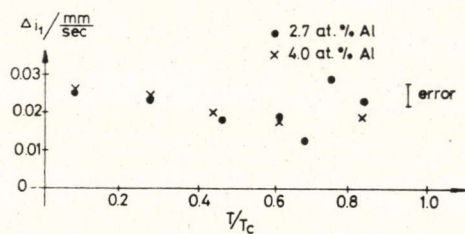
## c) 5d-szennyezések

	W	Re	Os	Ir	Pt
$\Delta H_1$ [kG]	$-45,8 \pm 0,4$	$-47,2 \pm 0,3$	$-36,0 \pm 0,3$	$10,3 \pm 0,4$	$15,0 \pm 0,3$
$\Delta H_2$ [kG]	$-24,7 \pm 0,6$	$-22,5 \pm 0,5$	—	—	$11,3 \pm 1,0$

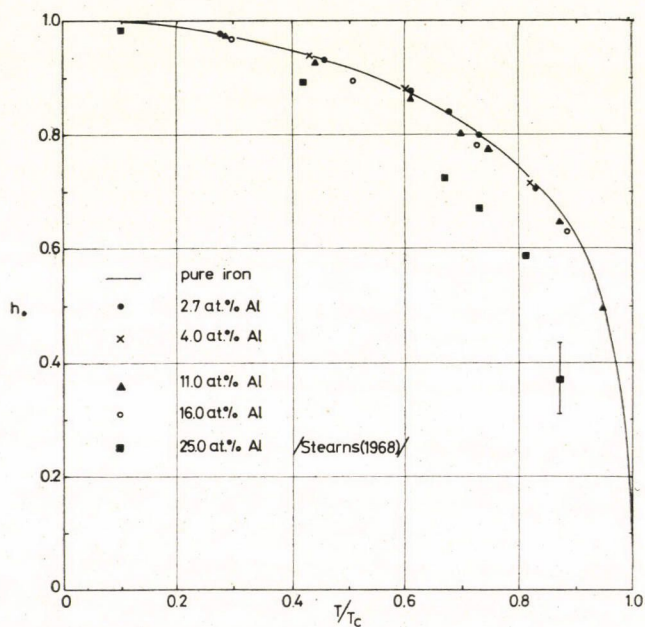
Ir és Pt a jelen dolgozatban közölt adatok az első meghatározásai a szennyezés okozta hiperfinom tér megváltozásnak. Első ízben történt meg a szennyezés által a környező vasatomokon okozott izomer shift változás szisztematikus meghatározása is.

A hőmérséklet függvényében végzett mérések eredményei a 8—18. ábrákon találhatók. Célszerűen a relatív hiperfinom terek különbségét ábráztuk a  $T/T_C$  redukált hőmérséklet függvényében ( $T_C$  az ötvözetek Curie pontja), azaz  $h_0-h_1$ , illetve  $h_0-h_3$ -t, ahol  $h_0(T)=H_0(T)/H_0(80^\circ\text{K})$ ;  $h_1(T)=H_1(T)/H_1(80^\circ\text{K})$ ;  $h_3(T)=H_3(T)/H_3(80^\circ\text{K})$ ;  $H_0$  a perturbálatlan vasatomok hiperfinom tere,  $H_1=H_0+\Delta H_1$  és  $H_3=H_0+\Delta H_3$  pedig az egy szennyezésszomszédal az első és harmadik koordinációs szférában rendelkező vasatomok hiperfinom terének felel meg. A mérések közös tulajdonságai a következők voltak: a perturbálatlan vasatomok hiperfinom terének ( $H_0$ ) a hőmérsékletfüggése minden ötvözetben ugyanaz volt, mint a tiszta vasé (kivéve a 11,0—16,0 at. % Al, illetve 10,0 at. % Ga tartalmú mintákat, ahol egy kicsit gyorsabb csökkenés volt megfigyelhető (10. és 11. ábra). A szennyezés okozta izomer shift változás minden szennyezés esetén hőmérséklettől független volt, példaként az Al, Ga és Mn szennyezések okozta izomer shift változások hőmérsékletfüggését mutatjuk a 9. és 18. ábrán. A centrális vonalra (perturbálatlan vasatomok) a hőmérsékleti shift hőmérsékleti gradientje  $350^\circ\text{K}$  felett minden ötvözetre azonos



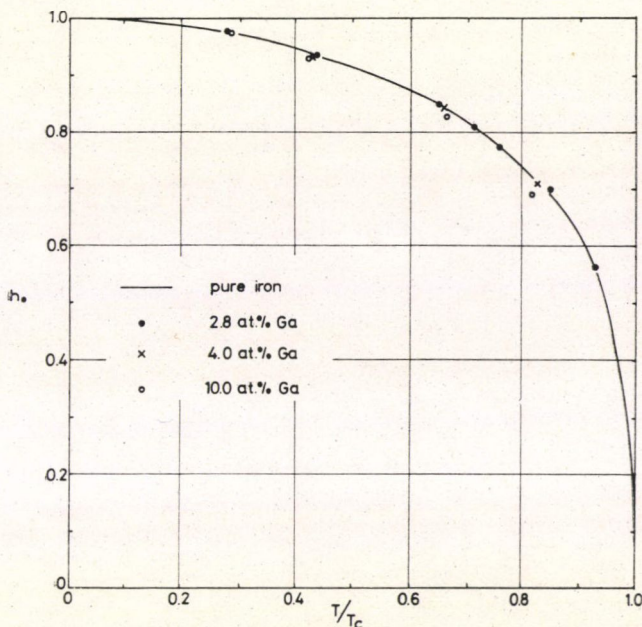


9. ábra. Egy elsőszomszéd szennyezés által okozott izomer shift változás hőmérsékletfüggése

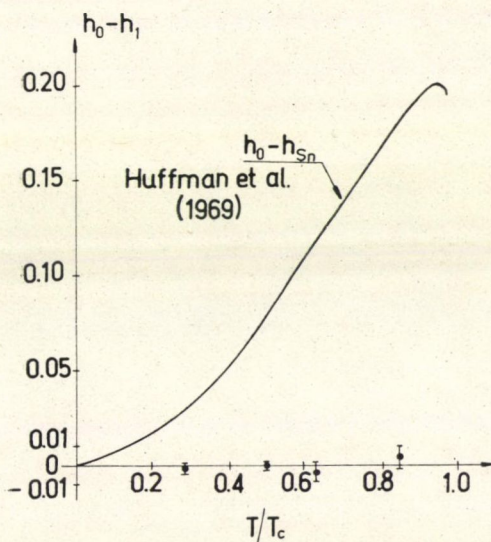


10. ábra. A perturbálatlan vasatomok relatív hiperfinom terének (80°K-re normált) hőmérsékletfüggése  $\text{FeAl}$ -ban





11. ábra. A perturbálatlan vasatomok relatív hiperfinom terének ( $80^\circ\text{K}$ -re normált) hőmérsékletfüggése  $\text{FeGa}$ -ban



12. ábra. A relatív hiperfinom terek közti különbség a hőmérséklet függvényében  $\text{FeSn}$ -ban:  $h_0$ ,  $h_{\text{Sn}}$  és  $h_1$  a relatív hiperfinom terek a perturbálatlan vasatomoknál, az ön atomoknál ([21]-ből véve) és az ön első vasszomszédjainál

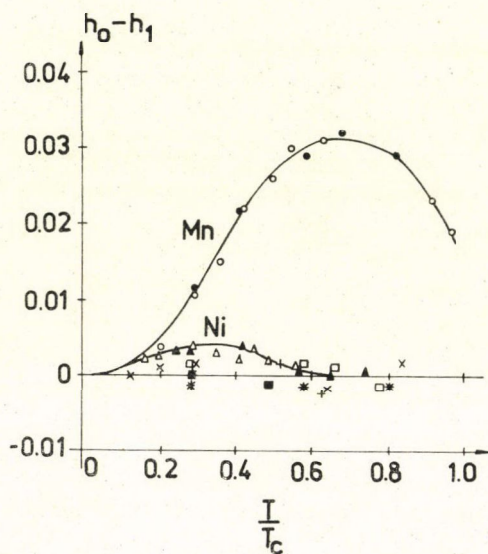


volt a tiszta vason mérttel  $[(-0,686 \pm 0,006) \cdot 10^{-3} \text{ mm sec}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}]$ . A vonal-szélesség csökkent növekvő hőmérséklettel, mely a Debye—Waller faktor csökkenése által okozott effektív minta vastagság csökkenés következménye.

A következőkben a különböző típusú szennyezésatomokat környező vasatomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggésével fogunk foglalkozni.

### 1. Nemmágneses szennyezések (Al, Ga, Sn)

Méréseink szerint ebben az esetben a különböző szennyezés konfigurációval rendelkező vasatomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggése a mérési hibán belül ( $\pm 0,002$ — $0,003$ ) azonos függetlenül a szennyezéskonzentrációtól, azaz  $h_0 - h_1 = 0$  és  $h_0 - h_3 = 0$  Al és Ga szennyezésekre;  $h_0 - h_1 = 0$  és  $h_0 - h_2 = 0$  Sn szennyezésekre (8. és 12. ábra), ahol  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  és  $h_3$  a vasatomok relatív hiperfinom tere szennyezés szomszéd nélkül, valamint egy szennyezés első, második és harmadik szomszédjával. Az a megfigyelésünk, hogy a vasatomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggése azonos még 2 vagy 3 Al első-szomszéd esetén is, jó egyezésben van Stearns méréseivel [41], aki rendezett  $\text{Fe}_3\text{Al}$ -ban azt találta, hogy a vasatomok relatív hiperfinom terének a hőmérsékletfüggése ugyanaz 8 Fe, valamint 4 Fe, 4 Al elsőszomszéd esetén, de különböző a tiszta vason mértétől (10. ábra).



- |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ■ (2.0 at.%)    | • (2.5 at.%)    | ▲ (3.0 at.%)    |
| □ V (5.0 at.%)  | ◦ Mn (3.4 at.%) | △ Ni (5.0 at.%) |
| ✱ Ti (3.0 at.%) | ✕ Cr (2.2 at.%) | + Co (3.0 at.%) |

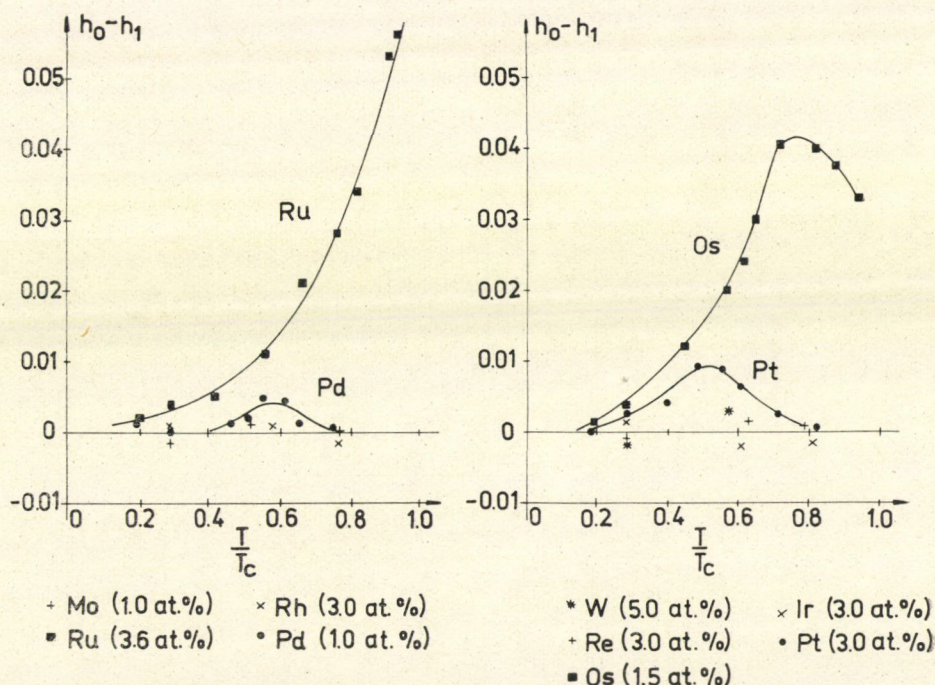
13. ábra. A 3d szennyezés első szomszédjával nem rendelkező ( $h_0$ ) és rendelkező ( $h_1$ ) vasatomok relatív hiperfinom terének különbsége a hőmérséklet függvényében



## 2. 3d szennyezések (Ti, V, Cr, Mn, Co, Ni)

A 13. ábra mutatja  $h_0-h_1$  hőmérsékletfüggését, ahol  $h_0$  jelenti a szennyezés elsőszomszédokkal nem rendelkező vasatomok relatív hiperfinom terét,  $h_1$  pedig az egy szennyezés elsőszomszédokkal rendelkező vasatomok relatív hiperfinom terének felel meg. Nagy anomáliát figyeltünk meg a Mn és egy kisebbet a Ni szennyezések esetén, míg más szennyezésekre nem találtunk eltérést a kísérleti hibán belül.

Nem tudtuk követni a második szennyezésszomszédok shiftjének hőmérsékletfüggését Mn, Ni és Co szennyezések esetén kis értékük miatt, Ti, V és Cr szennyezések esetén pedig felbontásunk nem volt elegendő az első és másodszomszédok járulékanak szétválasztására. Mint már említettük, az általunk mért  $h_0-h_1$  hőmérsékletfüggés FeMn esetén egyezik *Cranshaw et al.* [20] mérésével a közös hőmérséklet-tartományban. Adataink eltérnek *Schurer et al.* [39] adataitól, aminek az az oka, hogy ezek a szerzők a spektrumok kiértékelését hibásan végezték el: meghatározni vélték a Mn szennyezések második vasszomszédjainak hiperfinom terét, valamint a két Mn elsőszomszédokkal, két Mn második szomszédokkal és egy Mn első és másodszomszédokkal rendelkező vasatomok hiperfinom terét a hőmérséklet függvényében. A nagyszámú paraméter miatt fellépő korrelációk azonban irreálissá teszik a spektrumok ilyen kiértékelését. Ennek következménye, hogy az általuk megfigyelt másodszomszéd Mn okozta  $\Delta H_2$  hiperfinom tér változás jóval nagyobb, mint a cwNMR [38, 42] mérésekből és a mi mérésünkéből adódó. Az általunk a Ni szennyezések első vas szomszédjainál megfigyelt anomáliához hasonlóan figyelték meg spin echoval



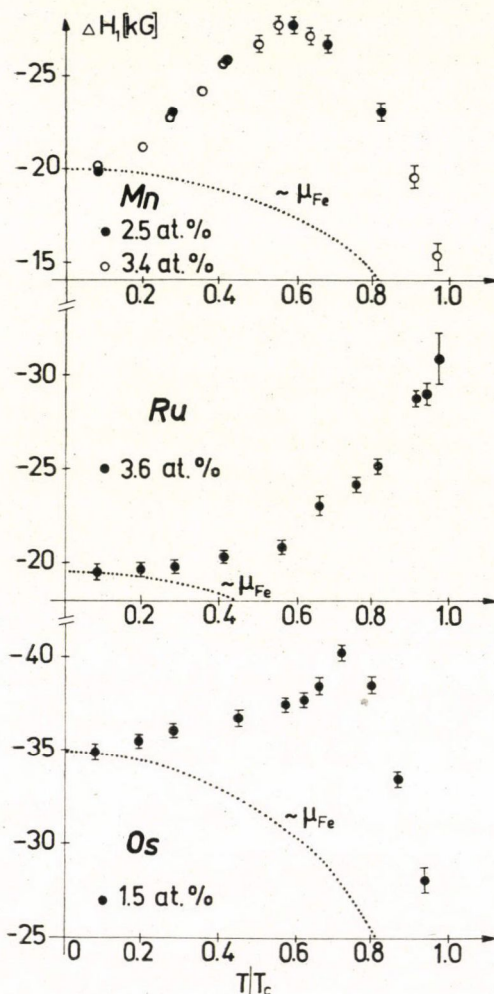
14. ábra. A szennyezés elsőszomszédokkal nem rendelkező ( $h_0$ ) és rendelkező ( $h_1$ ) vasatomok relatív hiperfinom terének különbsége a hőmérséklet függvényében



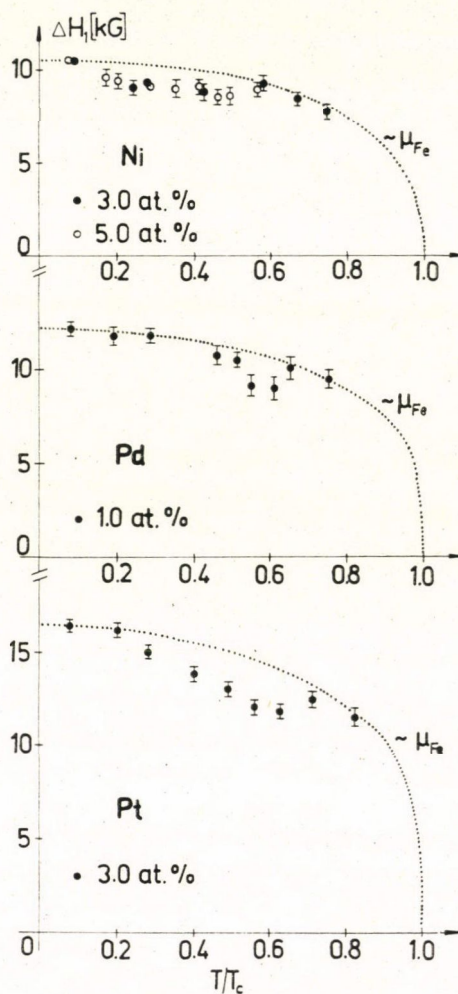
77 °K és 350 °K között a harmadik vas szomszédok helyén [43]. A cwNMR módszerrel a V, Cr, Mn és Co szennyezések távolabbi vas szomszédainál megfigyelt hiperfinom tér hőmérsékletfüggése egyezett 77 °K és 293 °K között a mérési hibán belül a perturbálatlan vasatomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggésével [42].

### 3. 4d és 5d szennyezések (Mo, Ru, Rh, Pd; W, Re, Os, Ir, Pt)

A  $h_0-h_1$  relatív hiperfinom terek különbségének hőmérsékletfüggését a 14. ábra mutatja. Anomáliát csak a Ru, Pd, Os és Pt szennyezések esetén figyeltünk meg, más szennyezések esetén nem találtunk eltérést a kísérleti hibán belül. Hasonló-



15. ábra. A Mn, Ru és Os szennyezések vas elsőszomszédjainál a hiperfinom tér  $\Delta H_1$  megváltozása a hőmérséklet függvényében

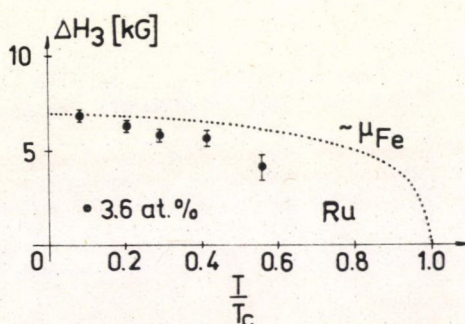


16. ábra. A Ni, Pd és Pt szennyezések vas elsőszomszédjainál a hiperfinom tér  $\Delta H$  megváltozása hőmérséklet függvényében

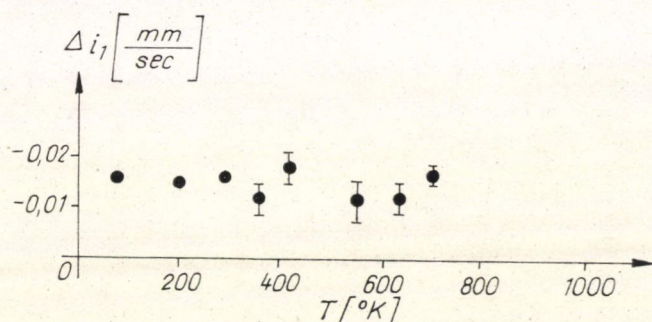


képpen nem figyeltünk meg eltérést a második szennyezés szomszédjával rendelkező vasatomok relatív hiperfinom terében Mo, W és Re szennyezések esetén. Nem tudtuk a szennyezés második szomszédjainak shiftjének hőmérsékletfüggését követni Ru, Rh, Pd, Os, Ir és Pt szennyezések esetén kis értékük miatt. A szennyezés harmadik szomszédjának shiftjét csak a Ru szennyezés esetén figyeltük meg a hőmérséklet függvényében, és az első szomszédéhoz hasonlóan szintén anomális hőmérsékletfüggést mutatott.

A mérések eredményeit összefoglalva



17. ábra. A Ru szennyezés vas harmadik szomszédjánál a hiperfinom tér  $\Delta H_3$  megváltozása a hőmérséklet függvényében



18. ábra. A Mn szennyezés által az elsőszomszéd vasatomok helyén okozott izomer shift változás a hőmérséklet függvényében

Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni
X	X	X	A		X	A
Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd
		X		A	X	A
Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt
		X	X	A	X	A

19. ábra. A vizsgált mágneses d-szennyezések vasban és a talált anomáliák (A)



azt állíthatjuk, hogy a vasatomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggése azonos Al, Ga, Sn, Ti, V, Cr, Co, Mo, Rh, W, Re és Ir szennyezések esetén függetlenül a környező szennyezés atomoktól. A Mn, Ru, Os és Ni, Pd, Pt szennyezések esetében pedig a szennyezéshez közeli vasatomok hiperfinom tere gyorsabb csökkenést mutat a hőmérséklet növelésére mint a távolabbiaké. Ezekben az esetekben az elsőszomszéd vasatomok hiperfinom tere  $\Delta H_1$  megváltozásának anómális hőmérsékletfüggését a 15. és 16. ábrák mutatják, míg ugyanezt a Ru harmadik vas szomszéd hiperfinom tere  $\Delta H_3$  megváltozására a 17. ábra. A 19. ábra mutatja, hogy a periódusos rendszer mágneses  $d$ -elemei közül melyek esetén végeztünk mérést és melyeknél találtunk anomáliát.

## V. Diskusszió

A diskusszió során először megmutatjuk, hogy méréseink az általánosan használt Heisenberg-moddal ellentmondásban vannak. A 2. pontban a Mn, Ru, Os; Ni, Pd és Pt szennyezések *vasszomszédainál* megfigyelt hiperfinom tér mátrixénál gyorsabb csökkenést a *szennyezésmomentum* hasonlóan gyorsabb csökkenésének tulajdonítjuk, amely a vasatomok helyén mért hiperfinom tér vezetési elektron polarizációs járulékában tükröződik. A fejezet 3. pontjában arra adunk kvalitatív magyarázatot, hogy miért éppen ezeknek a szennyezéseknek a mágneses momentuma viselkedik a mátrixétól eltérő módon a hőmérséklet változtatására. Az 5. pontban a szennyezés és a mátrix atomok helyén mért hiperfinom tér hőmérsékletfüggése közti különbséggel foglalkozunk azokban az esetekben, amikor a szennyezés momentuma nem viselkedik anómálisan. Ezen eltérő hőmérsékletfüggés megértéséhez szükséges a tiszta fémekben a mágnesezettség és a hiperfinom tér különböző hőmérsékletfüggésének magyarázata, amelyet a 4. pontban adunk meg.

### 1. Nemmágneses szennyezések — a Heisenberg-moddal alkalmazhatatlansága

A II. fejezetben már említettük, hogy a ferromágneses mátrixban levő egyetlen nemmágneses szennyezésre vonatkozó Heisenberg modell szerint a kicserélődési terek közti különbségek miatt a perturbálatlan mátrix atomok  $\sigma_0$  relatív mágnesezettsége különbözni fog a szennyezéshez közeli atomok relatív mágnesezettségétől. A szennyezés  $i$ -ik szomszédja relatív mágnesezettségének eltérését  $\sigma_0$ -tól, melyet molekuláris tér közelítésben elsőszomszéd kölcsönhatást figyelembevéve számítottunk, a  $\tau = T/T_c$  redukált hőmérséklet függvényében a 20. ábra mutatja. A csatolt egyenleteket a II. fejezet 11. egyenleteiből kapjuk  $\varepsilon = 0$  helyettesítéssel. Ezek az eredmények jól egyeznek Lovesey és Marshall [44] általánosabb számolásával, valamint egyéb módszerrel végzett számolásokkal [45].

Mivel a hiperfinom tér  $H_{CP}$  törzspolarizációs járuléka arányos az illető atom saját momentumával, ezért  $H_{CP}$  hőmérsékletfüggése az atom mágnesezettségének hőmérsékletfüggését követi. Ezért a Heisenberg-moddal szerint a hiperfinom térnek gyorsabban kell csökkennie növekvő hőmérséklettel a nemmágneses szennyezéshez közeli mátrix atomoknál mint a távoliaknál. Tehát a relatív hiperfinom terek közti különbségnek,  $(h_0 - h_i)$ -nek hasonló hőmérsékletfüggést kell mutatnia, mint a relatív mágnesezettségek közti különbségnek,  $(\sigma_0 - \sigma_i)$ -nek. Azonban, mivel a hiperfinom



tér két közel azonos értékű járuléka közül csak az egyik járulék mutatja az anomális viselkedést, a  $(h_0 - h_i)$  görbe körülbelül fele lesz a  $(\sigma_0 - \sigma_i)$  görbének.

Ellentmondásban ezzel a várakozással a 8. és 12. ábrákon lehet látni, hogy  $\pm 0,002$  kísérleti hibán belül  $h_0 - h_i = 0$  Al, Ga és Sn szennyezésekre az egész hőmérséklet és koncentrációtartományra, ahol a mérések történtek. (A 12. ábrán ezenkívül feltüntettük az Sn szennyezések helyén mért hiperfinom tér eltérését, a vasmátrixétól a hőmérséklet függvényében.) Ezzel szemben az elméletileg várt különbség  $(h_0 - h_i)$ -ben több mint 0,03 lenne  $\tau = 0,8$ -nál.

Ezen kísérleti eredmények világosan mutatják a Heisenberg modell alkalmazhatatlanságát az ötvözetek viselkedésének leírására. Ugyanakkor jó egyezésben vannak az egyszerű sávmélet jóslásával, mely szerint mindegyik Fe atom mágneses momentumának ugyanaz a hőmérsékletfüggése, és így nem várható eltérés a különböző szennyezés környezettel rendelkező Fe atomok hiperfinom terének hőmérsékletfüggésében sem.

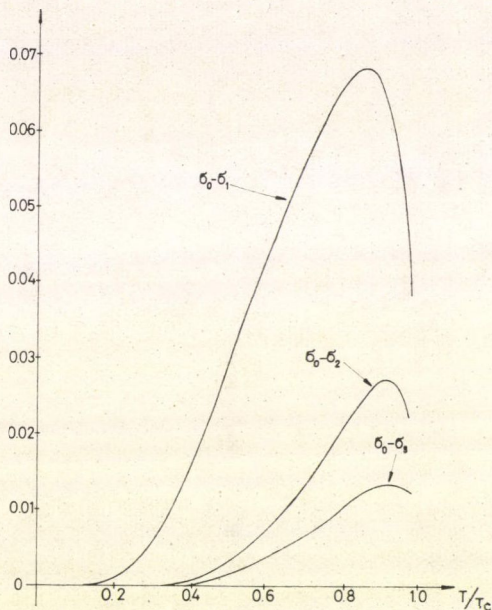
A FeAl és FeGa, FeSn ötvözetek választását a következők indokolták. A fajhő [46], átlagmágneszettség [47]  $\left(\frac{d\bar{\mu}}{dc} = -2,2\mu_B\right)$  és neutron szórás [48]

mérések azt mutatják, hogy az Al szennyezések mágneses „lyukat” jelentenek, a mátrixhoz képesti töltéssűrűség leárnýékolása az  $s$ -sávban történik, és így a környező vasatomok momentuma nem különbözik a tiszta vasétól. Ezzel szemben a Ga és Sn szennyezések, melyek betöltött  $d$ -héjjakkal rendelkeznek, az egyszerű mágneses hígítástól erősen eltérő viselkedést mutatnak. Mind az átlagmágneszettség

adatok [47, 49]  $\left(\frac{d\bar{\mu}}{dc} = -1,43\mu_B \text{ Ga-ra és } -0,97\mu_B \text{ Sn-ra}\right)$ , mind a neutron szórás

adatok [48] azt mutatják, hogy a környező mátrix atomok mágneses momentuma megváltozik, a szennyezés többlet töltésének leárnýékolása a  $d$ -sávban történik. Méréseink szerint azonban mégis különbség a szennyezés által perturbált, illetve nem perturbált vasatomok momentumának hőmérsékletfüggése között.

Ami mármost nem a szennyezés szomszédságában levő atomok, hanem magánál a szennyező atom magjánál mért hiperfinom teret illeti a FeAl és FeGa ötvözetek esetén nem történt meg eddig a szennyezés helyén a hiperfinom tér hőmérsékletfüggésének vizsgálata. Ilyen mérés csak a FeSn ötvözetre történt [21]. Itt azt talál-



20. ábra. A perturbálatlan vasatomok relatív mágneszettségének ( $\sigma_0$ ) eltérése az egy nemmágneses szennyezés első, másod- vagy harmadszomszédal rendelkező vasatomok relatív mágneszettségétől ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) a hőmérséklet függvényében. A számolás a Heisenberg modell molekuláris tér közelítésében történt elsőszomszéd kölcsönhatásokat feltéve



ták, hogy az Sn hiperfinom tere gyorsabban csökken a mátrixénál növekvő hőmérséklettel. A 12. ábra mutatja a mátrix és az Sn relatív hiperfinom tere különbségének hőmérsékletfüggését. Itt is elemezhetjük a helyzetet a Heisenberg-modell feltevései alapján, és azt találjuk, hogy az ón hiperfinom terének csökkenése gyorsabb, mint a Heisenberg-modell által jósolt. Ennek magyarázatára a szennyezés helyén kis momentum létezését tételezték fel, mely az  $s$ - és  $p$ -elektronok polarizációjából ered és anomális hőmérsékletfüggésű hasonlóan a Mn momentumának viselkedéséhez FeMn-ban. Hasonló módon értelmezték az ón szennyezések hiperfinom terének a mátrixétől eltérő viselkedését a hőmérséklet függvényében a Co-Ni és a Fe-Ni ötvözetekben is [50]. Azonban ennek az interpretációnak az a következménye, — mint erre a következő pontban részletesen visszatérünk —, hogy a szennyezés körüli mátrixatomoknál a hiperfinom tér hőmérsékletfüggése szintén anomális lesz, ugyanis a mátrixatomok hiperfinom terének vezetési elektron polarizációs járuléka részben követni fogja a szennyezésmomentum hőmérsékletfüggését. Méréseink tehát határozottan ellentmondanak az Sn hiperfinom tér anomális viselkedésére adott fenti interpretációnak.

A nemmágneses szennyezések hiperfinom terének mátrixétől való eltérő hőmérsékletfüggésére adott Heisenberg-modellen alapuló magyarázat tehát a vizsgált esetekben ellentmond méréseinknek. Ezen fejezet 4. és 5. pontjában egy valószínű alternatív leírását adjuk a nemmágneses szennyezések hiperfinom terének anomális viselkedésére.

Ellentmondanak a Heisenberg-modell alkalmazhatóságának a mágneses  $3d$ ,  $4d$  és  $5d$ -szennyezéseket tartalmazó ötvözeteken végzett méréseink is. Csak a Mn, Ru, Os, Ni, Pd és Pt szennyezések esetén találtunk anomáliát, holott a Heisenberg modell szerint hasonló anomáliát kellett volna kapnunk az összes szennyezés esetén, mivel a szennyezésmomentum és a mátrix atomok momentuma közötti kicserélődés minden esetben különbözik a mátrix atomok közöttitől (a  $T_c$  megváltozása ebben a modellben ezt jelenti). Így az anomália *hiánya* a Ti, V, Cr, Co, Mo, Rh, W, Re és Ir szennyezések első vasszomszédjainak hiperfinom terében azt mutatja, hogy a Heisenberg modell nem alkalmazható, és a Mn, Ru, Os, Ni, Pd és Pt szennyezések szomszédainál megfigyelt anomália más eredetű. Ezt a következtetést alátámasztja az is, hogy a Heisenberg modellben számított  $\sigma_0 - \sigma_1$  relatív mágnesezettség különbség hőmérsékletfüggése lényegesen különbözik a FeMn ötvözetekben mért relatív hiperfinom terek  $h_0 - h_1$  különbségének hőmérsékletfüggésétől (4. ábra).

## 2. A Mn, Ru, Os, Ni, Pd és Pt szennyezések vasszomszédjainál megfigyelt anomália magyarázatáról

Az előző pontban megmutattuk, hogy az általunk megfigyelt anomáliák nem magyarázhatók a Heisenberg modell keretei között. Értelmezhetők azonban egy egyszerű kép alapján, melyet ebben a pontban tárgyalunk.

A vasatomoknál megfigyelt hiperfinom tér két fő komponensből áll: a  $H_{CP}$  törzspolarizációs járulékból, amely arányos az atom saját mágneses momentumával és a  $H_{CEP}$  vezetési elektron polarizációs járulékból, amely a környező atomok hatását tükrözi. Az anomáliát elvben mindkét tag anomális hőmérsékletfüggése okozhatja, a Heisenberg modell a  $H_{CP}$  törzspolarizációs járulékot tekintette az anomália okának.

A következőkben részletesebben foglalkozunk a FeMn ötvözetekkel, mivel



csak ebben az esetben vizsgálták meg megfelelő pontossággal a Mn szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggését.

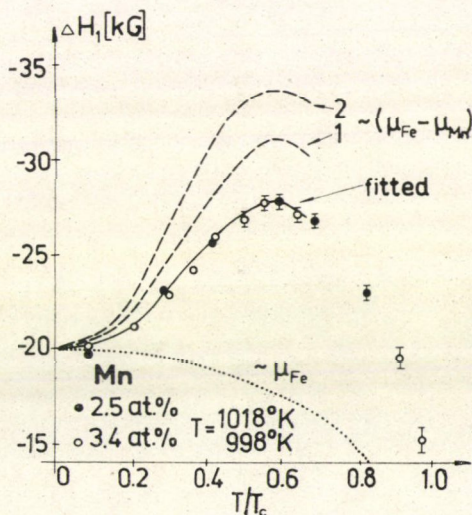
Meg fogjuk mutatni, hogy a szennyezés első vasszomszédjainál talált anomális hiperfinom tér viselkedés a szennyezésmomentum anomális viselkedésének következménye. Elegendő csak a Mn szennyezés által az első vasszomszédoknál okozott  $\Delta H_1$  hiperfinom tér változás anomális hőmérsékletfüggését megmagyarázni, mert a perturbálatlan vasatomok  $H_0$  hiperfinom terének hőmérsékletfüggése azonos volt a tiszta vaséval.

Mindenek előtt megjegyezzük, hogy  $\Delta H_1(T)$  mért hőmérsékletfüggését jól le lehet írni két komponens lineár kombinációjával, az egyik  $\mu_{Fe}$ -vel, a másik  $(\mu_{Fe} - \mu_{Mn})$ -nal arányos,  $\mu_{Fe}$  és  $\mu_{Mn}$  a Fe és Mn atomok momentumát jelenti;

$$\Delta H_1(T) = A\mu_{Fe}(T) + B[\mu_{Fe}(T) - \mu_{Mn}(T)], \quad (V.1)$$

ahol  $A$  és  $B$  arányossági együtthatók. Mivel a Fe-ban levő Mn momentumának hőmérsékletfüggését eddig még nem mérték meg közvetlenül neutronszeréssel, csak indirekt információk van  $\mu_{Mn}(T)$ -re, melyet a Mn hiperfinom terének hőmérsékletfüggéséből nyerhetünk. A szaggatott vonal a 21. ábrán a  $(\mu_{Fe} - \mu_{Mn})$ -nal arányos járulékok hőmérsékletfüggését mutatja, melyet a Mn hiperfinom terének hőmérsékletfüggéséből számoltunk két különböző feltevéssel a  $H_{CEP}$  vezetési elektron polarizációs járulékra [lásd (II.4) képlet]. Az 1-es görbe számolásánál feltettük, hogy  $H_{CEP}^{Mn} = H_{CEP}^{Fe}$ , és így  $(H_{Fe} - H_{Mn}) \sim (\mu_{Fe} - \mu_{Mn})$ , míg a 2-es görbénél a  $H_{CEP}^{Mn} = 160$  kG [3], a Mn momentumra  $80^\circ\text{K}$ -nál  $\mu_{Mn} = 1,1 \mu_B$  [1] és a  $60 \text{ kG}/\mu_B$  törzspolarizációs csatolási konstans [1] használtuk. Más, ezen értékektől különböző paraméterek használata csak a  $(\mu_{Fe} - \mu_{Mn})$  görbe meredekségét változtatja, a jellegzetes csúcs  $\frac{T}{T_c} = 0,6$ -nál azonban megmarad.

A pontozott vonal az ábrán a mátrix momentummal arányos járulékok hőmérsékletfüggését mutatja. A két görbe lineáris kombinációja (1-es görbe és  $\mu_{Fe}$ , vagy 2-es görbe és  $\mu_{Fe}$ )  $\Delta H_1$  hőmérsékletfüggését láthatóan jól leírja (kihúzott vonal). Mint látható, ez a leírás nem egyértelmű, egyenlő jó egyezés kapható különböző paraméterekkel. (Az ábrán levő esetekben  $A = -2,3 \text{ kG}/\mu_B$ ,  $B = -13,6 \text{ kG}/\mu_B$  az 1-es görbére és  $A = -3,8 \text{ kG}/\mu_B$ ,  $B = -10,6 \text{ kG}/\mu_B$  a 2-es görbére). Feltétlenül jelentős azonban az a tény, hogy a mért  $\Delta H_1$ -ben  $\frac{T}{T_c} = 0,6$ -nál talált csúcs ugyanott van, ahol a  $(\mu_{Fe} - \mu_{Mn})$  görbékben mutatkozó csúcs, mely a különböző paraméterekre változtatlan marad.



21. ábra. A Mn szennyezés által a vas elsőszomszédoknál okozott  $\Delta H_1$  hiperfinom tér megváltozás hőmérsékletfüggése. (A 13. ábrán a relatív hiperfinom terek különbségét ábrázoltuk.) A görbék jelentése a szövegben van leírva



Az a tény, hogy adatainkat jó le tudtuk írni az (V.1) egyenlettel, azt mutatja, hogy a  $\Delta H_1$ -ben jelentkező anomáliát a szennyezésmomentum,  $\mu_{Mn}$  hőmérsékletfüggésének anomáliája okozza. Mégis, direkt neutronszórásos mérés hiányában teljes határozottsággal nem lehet kizárni azt sem, hogy a szennyezésmomentum anomális hőmérsékletfüggése valamilyen mechanizmus útján áttevődjék a szomszédos Fe atomok momentumának hőmérsékletfüggésére és így a törzspolarizáción keresztül adjon járulékot  $\Delta H_1$ -be. Jelenleg csupán a Heisenberg-modellbeli leírás szolgáltat ilyen mechanizmust, ez azonban alkalmatlannak bizonyult ennek leírására. A törzspolarizációs járulék lehetséges anomális változására 80 °K és 300 °K között azonban tudunk egy felső becslést adni átlagmágnesezettség mérések alapján. Egy Fe-3,9 at. % Mn ötvözet relatív mágnesezettsége ( $\sigma_{\text{ötvözet}}$ ) [51] a tiszta vasétól ( $\sigma_{Fe}$ ) csak  $\Delta\sigma = \sigma_{Fe} - \sigma_{\text{ötvözet}} = 0,006 \pm 0,002$ -ra tér el szobahőmérsékleten. Ez az eltérés részben az ötvözet alacsonyabb Curie-pontjának (a járulék  $\Delta\sigma$ -ba több mint 0,002), részben a Mn momentumának gyorsabb csökkenésének (a járulék  $\Delta\sigma$ -ba több mint 0,004) tulajdonítható. Így a Mn szennyezések körül levő vasatomok momentumának anomális csökkenése, ha egyáltalán létezik,  $0 \pm 0,01 \mu_B$ , és így az anomális törzspolarizációs járulék a  $\Delta H_1 = 3,6$  kG-os anomális változásba 80 °K és 300 °K között kevesebb mint 0,6 kG (itt a  $60 \text{ kG}/\mu_B$  törzspolarizációs csatolási konstans [1] használtuk).

A  $\Delta H_1$ -ben az (V.1) egyenlet szerint megjelenő  $(\mu_{Fe} - \mu_{Mn})$ -nal arányos járuléknak nagyon egyszerű és természetes magyarázatát tudjuk adni, ha figyelembe vesszük a szennyezés okozta vezetési elektron polarizációs járulék megváltozását. Mielőtt erre rátérnénk, megmutatjuk, hogy a CEP járulék változása elegendően nagy az anomália magyarázatára. A nemmágneses Al szennyezések (melyek úgy viselkednek, mint „mágneses lyukak”) első vasszomszédjainak hiperfinom tér változása  $\Delta H_1 = -22$  kG, melyet lényegében a vezetési elektron polarizációs járulék megváltozásának szokták tulajdonítani. Ebből  $B = -10 \text{ kG}/\mu_B$  adódik, ami jó egyezésben van a  $\Delta H_1$ -nek (V.1) egyenletre való illesztéséből kapott  $B$  értékekkel.

A vezetési elektron polarizációs járulék megváltozásából adódó hiperfinom tér változást, melyet  $T = 0$  °K-en figyeltek meg a nemmágneses szennyezést környező Fe atomoknál, részletesen diszkutáltuk egy korábbi munkában [52]. Ennek az itt következő egyszerű általánosítása jól magyarázza jelen eredményeinket.

Ha egy mágneses szennyezést, melyet  $\mu_i$  momentum és  $V_0^i$  potenciál ír le, helyezünk egy nem-polarizált vezetési elektron gázba (paramágneses állapot), akkor ez a vezetési elektronok állapotsűrűségében egy  $\delta n(E, r)$  állapotsűrűség perturbációt hoz létre, mely  $\delta \varrho(r)$  vezetési elektron töltéssűrűség változást jelent a környező mátrix atomok helyén, melyre

$$\delta \varrho(r) = \frac{1}{\pi} \frac{V_0^i}{E_F} \int_{-\infty}^{E_F} \delta n(E, r) dE, \quad (\text{V.2})$$

ahol  $r$  a szennyezéstől mért távolság és  $E_F$  a Fermi-nívó (lásd pl. [8]).

Ha az ötvözet ferromágneses, akkor a vezetési elektron gáz polarizálva van az  $s-d$  kicserélődési kölcsönhatás révén. Első közelítésben ezt a polarizációt figyelembe lehet venni, ha a szennyezés potenciált különbözőnek tekintjük a két spin irányra és feltesszük, hogy a különböző potenciálok a két spin irányban az (V.2) egyenlet-



nek megfelelő töltéssűrűség változást hozzák létre, azaz

$$\delta \varrho_{\pm}(r) = \frac{1}{\pi} \frac{V_{\pm}^i}{E_{F\pm}} \int_{-\infty}^{E_{F\pm}} \delta n(E, r) dE, \quad (\text{V.3})$$

ahol

$$V_{\pm}^i = V_0^i \pm \frac{1}{2} J_{sd}(\mu_i - \mu_{Fe}), \quad E_{F\pm} = E_F \pm \frac{1}{2} J_{sd} \mu_{Fe}$$

és  $J_{s-d}$  az  $s-d$  kicserélődési kölcsönhatást jelöli, (a + előjel a felfelé álló, a – pedig a lefelé álló spinű vezetési elektronokra vonatkozik). Most Born-közelítésben, mivel  $J_{sd} \mu_{Fe}/E_F$  és  $V_0^i/E_F \ll 1$ , az izomer shift szennyezés okozta  $\Delta i$  megváltozása, mely  $(\delta \varrho_+(r) + \delta \varrho_-(r))$ -rel arányos, ugyanaz mint (V.2) és így a hőmérséklettől független, a kísérletekkel egyezésben. A vezetési elektron polarizáció megváltozása által a hiperfinom térben okozott változás a következő:

$$\begin{aligned} \Delta H_{CEP}(r) &\sim \delta p(r) = \delta \varrho_+(r) - \delta \varrho_-(r) = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{E_F} \cdot \left\{ J_{sd}(\mu_i - \mu_{Fe}) \cdot \int_{-\infty}^{E_F} \delta n(E, r) dE + V_0^i \cdot J_{sd} \cdot \mu_{Fe} \delta n(E_F, r) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

ahol az első tag aszimptotikus alakja az általánosan használt Ruderman—Kittel—Kasuya—Yosida spin-sűrűség oszcillációs járulék [53], míg a második tag aszimptotikus alakja a Daniel—Friedel-féle szabad elektron gáz töltéssűrűség oszcilláció [54].

Ebben a képből  $V_0^i$  a szennyezés  $d$ -sávban történő leárnýékolása után a szennyezésnek a vasmátrix  $s$ -sávját perturbáló hatását reprezentálja. Jelenleg nincs elméleti becslés a nagyságára, de valószínűnek látszik, hogy a jellege ugyanolyan mint a szennyezés  $d$ -sávbéli perturbáló potenciálja.

Látjuk tehát, hogy az (V.2—3—4) képletek segítségével a hiperfinom tér  $\Delta H_1$  megváltozásának (V.1) kifejezése plauzibilissé tehető; a hiperfinom tér CEP járulékanak megváltozása egy  $(\mu_i - \mu_{Fe})$ -vel és egy  $\mu_{Fe}$ -vel arányos járulék. Ehhez adódik még a hiperfinom tér törzspolarizációs járulékanak  $\Delta H_{CP} = a \Delta \mu_{Fe}$  megváltozása, ahol  $\Delta \mu_{Fe}$  a szennyezés töltésének leárnýékolásakor okozott momentum változás a környező vasatomokon. Ez a járulék az előzőekben mondottak és a  $\text{FeGa}$ ,  $\text{FeSn}$  ötvözeteken végzett méréseink szerint szintén  $\mu_{Fe}$ -vel arányos hőmérsékletfüggést mutat.

Sajnos a többi szennyezés esetén nem ismert elegendően pontosan a szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggése ahhoz, hogy olyan részletes összehasonlítást lehessen elvégezni, mint a Mn esetén. Azonban úgy tűnik, hogy a Ni szennyezések esetén talált anomália jól leírható a Mn-éhoz hasonlóan, ha feltesszük, hogy a  $\mu_{Ni}$  kicsit gyorsabban csökken mint  $\mu_{Fe}$  (szobahőmérsékleten a Ni atomok relatív hiperfinom tere [26] kisebb mint a vasé) és ezért növekedést okoz a  $(\mu_{Fe} - \mu_{Ni})$ -kel arányos negatív járulék abszolút értékében. Ezen interpretáció helyességét látszik alátámasztani az, hogy az általunk meghatározott hiperfinom tér változás a Ru harmadik vas szomszédjánál ugyanúgy gyorsabban csökken a hőmérséklet függvényében mint a Ni harmadik szomszédjánál [43].



A Pd hiperfinom tere anomális csökkenést mutat [19] ugyanabban a hőmérséklet intervallumban, ahol a mi mérésünk, jelezve az anomális szennyezésmomentum csökkenést.

Os esetén a mért hiperfinom teret növekvőnek találták [55] növekvő hőmérsékletre, ellentétben az általunk várt csökkenéssel. Ennek a mérésnek a megbízhatósága azonban igen kérdéses [55].

Jelenleg egyáltalán nem vizsgálták még meg a Ru és Pt szennyezések hiperfinom terének hőmérsékletfüggését, ahol méréseink alapján a szennyezés momentum anomális csökkenését várjuk.

Összefoglalva a fentieket: az általunk a Mn, Ru, Os, Ni, Pd és Pt szennyezések szomszédjainál talált, a mátrixénál gyorsabb hiperfinom tér csökkenést a szennyezés helyén levő momentum gyors csökkenésének tulajdonítottuk, mely a hiperfinom tér vezetési elektron polarizációs járulékán keresztül tükröződik. Ennek alapján azt következtethetjük, hogy ezekben az esetekben a szennyezésmomentumnak anomálishan kell csökkennie, mégpedig a Mn, Ru és Os esetén jóval erősebb mértékben, mint a Ni, Pd és Pt esetén. A fenti következtetés egyik konzekvenciájaként említjük, hogy a szomszédok helyén mért hiperfinom tér adatainak alapján azt várjuk, hogy magának a szennyezés hiperfinom terének a vasban Mn-nál mért [15] anomális hőmérsékletfüggéséhez hasonlólt kapunk Ru és Os esetén, a Pd-hoz [19] hasonlólt pedig Ni és Pt esetén. A következő pont annak kvalitatív magyarázata, hogy miért éppen ezek a szennyezések mutatnak anomális viselkedést.

### 3. A szennyezés helyén levő momentum anomális hőmérsékletfüggésének kvalitatív magyarázata

#### *Vas mátrix*

A II. fejezetben vázoltuk Campbell [24] elképzelését, melynek lényege az, hogy ha a szennyezés többlet töltésének leárnýékolásakor keletkező elektron-állapotsűrűség perturbáció a Fermi-nívó közelében helyezkedik el, akkor a hőmérséklet növelésekor ennek a virtuális nívónak a Fermi-energiához képest történő mozgása, alakjának változása, valamint a Fermi-eloszlás függvény termikus elkenődése képes a spin-fel és spin-le sávokban gyors betöltési szám változást, azaz anomális momentum hőmérsékletfüggést létrehozni. Az elmélet alapján anomália volt várható vasban, a Mn, Ru és Os szennyezések momentumának hőmérsékletfüggésében. Méréseink előtt csak a Mn és Os hiperfinom terének anomáliája volt ismert vasban, valamint a Ru-é nikkelt mátrixban.

A periódus rendszer két „oszlopát” tartalmazó szennyezésekre találtunk anomális momentum hőmérsékletfüggést, melyek közül az egyik „oszlop” a Mn, Ru és Os szennyezések esetén talált anomália megfelel a Campbell által elvártaknak. A mi mérésünk az első kísérleti bizonyítéka annak, hogy a Ru szennyezés vasban is anomális momentum viselkedést mutat. A másik „oszlop” a Ni, Pd és Pt szennyezések esetén talált anomália szintén új kísérleti eredmény. Az, hogy másik „oszlopban” is találtunk anomáliát jól magyarázható a Campbell által javasolt modell kiterjesztésével. Jól ismert, hogy a szennyezés potenciál nagyságát és előjelét a Friedel-féle összegszabályon keresztül a mátrix és a szennyezés közti  $\Delta Z = Z_h - Z_i$  töltéskülönbség határozza meg [9–12]. Taszító szennyezés potenciál esetén a mátrix állapot-sűrűségében a leárnýékolás által keltett virtuális nívó a sáv tetejének, vonzó szennye-



zés potenciál esetén pedig a sáv aljának közelében képződik [8]. Ezért a Mn, Ru és Os szennyezések esetén talált anomália a spin-fel Fermi-nívó közelében, míg a Ni, Pd és Pt anomáliája a spin-le Fermi-nívó közelében levő állapotsűrűség perturbációt jelzi. Eszerint a kvalitatív kép szerint (a kísérletekkel egyezésben), a szennyezésmomentum Mn, Ru és Os esetén erősen csökken növekvő hőmérséklettel, mert a Fermi-nívók nagy állapotsűrűségű tartományban mozognak (eltekintünk az egyszerűség kedvéért a virtuális nívó alakjának változásától), míg a Ni, Pd és Pt esetén az anomális csökkenés lényegesen kisebb, mert az érdekes tartományban az állapotsűrűség alacsony (22. ábra). A kvantitatív tárgyalás a [10] (1–3, 7) egyenleteinek tetszőleges hőmérsékletre történő általánosításával jelenleg folyik.

A fenti kvalitatív képből következik, hogy kobalt mátrix esetén is várható az általunk talált két szennyezés-„oszlopban” anomáliák fellépte. A kísérleti nehézségek miatt nagyon kevés esetben vizsgálták meg a szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggését. Azonban a Pd szennyezés esetén itt is megtalált anomália [56] egyezik várakozásunkkal.

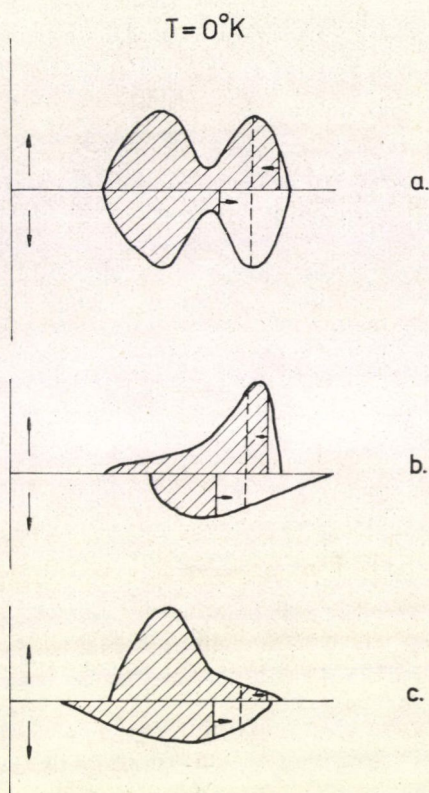
### Nikkel mátrix

Nikkel mátrix esetén csak egy anomális szennyezés-„oszlop” (a Mn, Ru és Os) megjelenését várjuk, mert a nikkel „erős” ferromágnes, az egyik sáv megtelt elektronokkal. Csak a Ru szennyezés hiperfinom terének részletes hőmérsékletfüggése ismert [1], amely valóban anomális.

A Mn momentumának anomális hőmérsékletfüggését elsőként mutattuk ki átlagmágnesezettség mérés segítségével [85], bár ez a magyarázat felmerült [57] a NiMn ötvözetekre vonatkozó neutronszerelés adatok és átlagmágnesezettség adatok [58, 59] közti inkonzisztencia egyik lehetséges okaként.

Mivel a szobahőmérsékletű neutronszerelés kísérletek [57] NiMn-on azt mutatták, hogy a mágneses perturbáció az elemi cellára korlátozódik és a Mn szennyezés a közeli Ni atomok momentumát nem befolyásolja jelentősen, a NiMn ötvözetek átlagmágnesezettsége egyszerű hígítás feltevésével írható le, azaz

$$\bar{\mu}(T) = (1 - c)\mu_{\text{Ni}}(T) + c\mu_{\text{Mn}}(T), \quad (\text{V.5})$$



22. ábra. Az állapotsűrűség perturbációk sematikus rajza. a) Tiszta Fe b) Perturbáció Mn, Ru és Os szennyezések esetén c) Perturbáció Ni, Pd és Pt szennyezések esetén A szemléletesség kedvéért az állapotsűrűség görbék eltolódását a hőmérséklet növelésére a Fermi-nívók eltolódásával jelezük



ahol  $c$  a Mn szennyezéskonzentráció,  $\mu_{\text{Ni}}(0)=0,616 \mu_{\text{B}}$  és  $\mu_{\text{Mn}}(0)=3,0 \mu_{\text{B}}$ . A Ni mátrixéhoz képest relatíve nagy Mn momentum miatt várható, hogy a Mn momentum anomális hőmérsékletfüggése megjelenjék az átlagmágnesezettség hőmérsékletfüggésében. Ez abban jelentkezik, hogy az ötvözet relatív mágnesezettsége  $\bar{\sigma}(\tau)/\bar{\sigma}(T)=\frac{\bar{\mu}(T)}{\bar{\mu}(0)}$  a  $\tau=\frac{T}{T_c}$  redukált hőmérséklet ( $T_c$  a Curie-hőmérséklet) függvényében eltér a tiszta Ni megfelelő  $\sigma_{\text{Ni}}(\tau)$  relatív mágnesezettségétől. Ez az eltérés a 2,5–4,8 at. % Mn koncentrációtartományban a hőmérséklettől függően 4–5%.

Három összetételnél ( $c=2,5, 3,5$  és  $4,8$  at. % Mn) mértük  $\bar{\sigma}(\tau)$ -t, az ötvözet relatív mágnesezettségét, melyből (V.5) segítségével meghatároztuk  $\sigma_{\text{Mn}}(\tau)$ -t, a Mn relatív mágnesezettségének hőmérsékletfüggését. A számolásnál a leglényegesebb feltevés az volt, hogy  $\sigma_{\text{Ni}}(\tau)$  ugyanaz, mint tiszta nikkelen, függetlenül a Mn koncentrációtól és a Mn szomszédok számától. Azt, hogy ez a közelítés nem túlságosan rossz, alátámasztja a szobahőmérsékletű Ni momentum koncentráció függetlensége [57], valamint az, hogy a különböző Mn koncentrációknál meghatározott  $\sigma_{\text{Mn}}(\tau)$ -k hibán belül (0,03) egyeztek egymással. Újabbán végzett ellenállásmérések is erősen lokalizált perturbációt jeleznek [60]. Szükséges lenne azonban a NiMn ötvözetekben a Ni hiperfinom terének hőmérsékletfüggését megvizsgálni, feltevésünk ellenőrzésére. Ha a  $\sigma_{\text{Ni}}(\tau)$  a Mn koncentráció függvényében csökkenően eltér a tiszta nikkeltől, az a számított  $\sigma_{\text{Mn}}(\tau)$ -ban az anomália nagyságának csökkenését jelenti.

A 23. ábrán látható  $\sigma_{\text{Ni}}(\tau)$ ,  $\bar{\sigma}(\tau)$   $c=4,8$  at. % Mn esetén, és az ebből számított  $\sigma_{\text{Mn}}(\tau)$ . A VI. táblázatban adtuk meg a különböző Mn összetételekhez tartozó Curie-hőmérsékleteket. Adataink jól egyeznek [58] és [59] átlagmágnesezettség adataival, és Curie-hőmérsékleteivel.

A Mn momentum anomális hőmérsékletfüggését közvetlen neutronszerzés módszerrel vizsgálta Mezei F., melynek előzetes eredményei [61] a VII. táblázatban található, és jól egyeznek a sajátjainkkal. Tudomásunk szerint ez az első és egyetlen

## VI. TÁBLÁZAT

Nikkel és NiMn ötvözetek Curie-hőmérsékletei:

$c$ at. % Mn	0	2,5	3,5	4,8
$T_c$ [°K]	630	600	585	570

## VII. TÁBLÁZAT

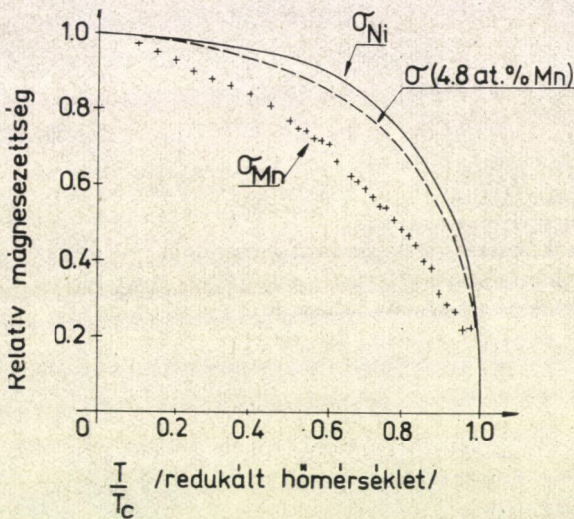
Neutronszerzés mérések [61] összehasonlítása az átlagmágnesezettségmérésből kapott Mn mágnesezettség értékkel.  $\sigma_{\text{ötvözet}}$  az ötvözet (4,0 at. % Mn) relatív mágnesezettsége,  $\sigma_{\text{Mn}}$  (átlag) a három összetételből átlagolt Mn mágnesezettség,  $\sigma_{\text{Mn}}$  (neutron) pedig a közvetlenül mért Mn mágnesezettség. Minden értéket a szobahőmérsékletre normáltunk.

$T$ [°C]	$\sigma_{\text{ötvözet}}$	$\sigma_{\text{Mn}}$ (átlag)	$\sigma_{\text{Mn}}$ (neutron)
20	1	1	1
100	$0,920 \pm 0,003$	$0,86 \pm 0,02$	$0,82 \pm 0,05$
180	$0,783 \pm 0,003$	$0,64 \pm 0,02$	$0,70 \pm 0,05$



direkt mérése a szennyezésmomentum hőmérsékleti viselkedésének, amelyet az ötvözet kedvező neutronfizikai tulajdonságai tettek lehetővé.

A Mn momentum általunk meghatározott hőmérsékletfüggése jól magyarázza a  $\text{NiMn}$  rendszer néhány kísérleti adatának látszólagos ellentmondását, mely az irodalomból ismert. Így a Mn momentumának kb.  $0.5 \mu_B$ -os csökkenése abszolút zéró és szobahőmérséklet között a Curie-pont változással együtt okozza a  $T=0^\circ\text{K}$ -re extrapolált  $\frac{d\bar{\mu}}{dc} = 2,4 \pm 0,1 \mu_B$  [58] és a szobahőmérsékleten mért  $\frac{d\bar{\mu}}{dc} = 1,8 \pm 0,1 \mu_B$  [59] közti különbséget. A  $\text{NiMn}$ -ban a Mn hiperfinom terében folyékony He és szobahőmérséklet között megfigyelt csökkenés [62] ( $H_{\text{Mn}}(4,2^\circ\text{K}) = 328 \text{ kG}$ ,  $H_{\text{Mn}}(298^\circ\text{K}) = 294 \text{ kG}$ ) kétszerese a mátrix mágneszettsége csökkenésének. Ez a csökkenés a  $H_{\text{Mn}}$  törzspolarizációs járulékan keresztül a Mn momentumának tulajdonítható.



23. ábra. A tiszta Ni (—),  $\text{NiMn}$  (4,8 at.%) (---) és a Mn relatív mágneszettsége a  $\text{NiMn}$  (4,8 at.%) ötvözet átlagmágneszettségéből számítva

#### 4. A tiszta ferromágneses fémek mágneszettségének és hiperfinom terének eltérő hőmérsékletfüggése

A II. 3. és V.1. pontokban említettük, hogy a szennyezések hiperfinom tere a mátrixétól kicsit eltérő hőmérsékletfüggést mutat akkor is, ha a szennyezés helyén levő momentum nem viselkedik anómálisan. Ennek megértéséhez szükséges a tiszta ferromágneses fémekben konstans nyomáson a hiperfinom tér és a spontán mágneszettség hőmérsékletfüggése között tapasztalt eltérés magyarázata. Ezen effektus első megfigyelése Robert és Winter [63] vasban végzett mag mágneses rezonancia (NMR) mérése volt. A vas hiperfinom terének hőmérsékletfüggése ugyanaz NMR módszerrel [64] és Mössbauer-effektussal [65] mérve. Az eltérés hiánya a két mérés között kizárja azt a lehetőséget, hogy a hiperfinom tér- és a bulk mágneszettség eltérése növekvő hőmérséklettel a fém doménszerkezetével kapcsolatos, mert az



NMR mérések a doménfalban levő magokon történnek, míg a Mössbauer-mérések főként a doménekben belül levő magokon.

*Benedek és Armstrong* [64] összehasonlította vasban a  $^{57}\text{Fe}$  NMR módszerrel mért  $T=0^\circ\text{K}$ -re redukált hiperfinom terének hőmérsékletfüggését ( $h(T)$ ) a  $T=0^\circ\text{K}$ -re redukált mágnesezettségével ( $\sigma(T)$ ), azután, hogy mindkettőt konstans térfogatra transzformálta a hőtágulás lehetséges különböző hatásainak eliminálása végett. Ennek a transzformációnak az eredménye az volt, hogy még konstans térfogaton is marad különbség a hiperfinom tér és a mágnesezettség hőmérsékletfüggése között, azaz az  $A$  hiperfinom csatolási állandó (V.6)-ban explicit hőmérsékletfüggéssel rendelkezik:

$$h(T) = A(T) \sigma(T). \quad (\text{V.6})$$

Kísérletileg azt találták [64], hogy  $A$  explicit hőmérsékletfüggését tiszta vasra  $0^\circ\text{K}$  és  $300^\circ\text{K}$  között az

$$A(T) = 1 - aT^2 \quad (\text{V.7})$$

empirikus formula írja le, ahol  $a = 0,77 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{K}^{-2}$ .

Vas esetén elvégzett újabb, pontosabb mérések [66] szerint  $a \approx 0,4 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{K}^{-2}$  csak és  $300^\circ\text{K}$  felett  $A(T)$ -ben a négyzetes hőmérsékletfüggés lineáris lesz.

A helyzet hasonló nikkelle [67], kivéve azt, hogy az eltérés a relatív hiperfinom tér és a relatív mágnesezettség hőmérsékletfüggése között konstans nyomáson közelítőleg kétszer nagyobb mint vasban. Miután a konstans nyomásnál mért hőmérsékletfüggéseket konstans térfogaton mértbe transzformáljuk itt is megmarad  $A$ -nak egy explicit hőmérsékletfüggése, bár ennek függvényalakja bizonytalan az adatoknak vaséhoz képesti nagyobb hibája miatt. Ha  $A(T)$ -t (V.7) alakú kifejezéssel írjuk le, akkor  $a = (0,33 \pm 0,30) \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{K}^{-2}$ , illetve  $a = (0,55 \pm 0,70) \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{K}^{-2}$  adódik a használt hiperfinom tér adatoktól függően [68].

Jelenleg nincsenek adatok a hiperfinom tér hőmérsékletfüggésére tiszta kobaltban.

*Benedek és Armstrong* [64] kifejtett egy elméletet, melyben  $A$  explicit hőmérsékletfüggése a növekvő hőmérséklettel magasabb energiájú állapotokba gerjesztett  $d$ -elektronoktól származik. A  $d$ -elektronok radiális hullámfüggvényét energiafüggőnek tették fel, mely energia-függő hiperfinom csatolási állandót eredményezett és a hőmérsékleti átlagolásból adódott a hiperfinom csatolási állandó  $T^2$ -es függése. Azonban a modellben a  $T^2$  együtthatójának becslése nehéz, és nincs bizonyíték arra, hogy ez az effektus helyes nagyságrendű. Ezenkívül a precíz alacsony hőmérsékletű mágnesezettségmérések nem mutatják, hogy a modell által feltett egy-részecske gerjesztések léteznek.

A következőkben megmutatjuk, hogy  $A$  hőmérsékletfüggése konstans nyomáson egészen a Curie-pontig jól leírható egy egyszerű félempirikus modellel, amely figyelembe veszi a rácsrezgések hatását, és így képes a hőmérsékletfüggő és nyomásfüggő mérések összehasonlításánál adódó explicit hőmérsékletfüggést is megmagyarázni. Hasonló magyarázatot adott *Benedek és Kushida* [69] a Knight shift alkáli fémekben konstans térfogathoz megfigyelt explicit hőmérsékletfüggésére, és alkalmazható más mikroszkopikus mennyiségek explicit hőmérsékletfüggésének értelmezésére.

Mint már említettük, a hiperfinom tér két hasonló nagyságú fő járulékból áll,

$$H_{\text{hf}} = H_{\text{CP}} + H_{\text{CEP}}, \quad (\text{V.8})$$



ahol  $H_{CP}$  a törzspolarizációs járulék, mely arányos az atom saját mágneses momentumával, és  $H_{CEP}$  a vezetési elektron polarizációs járulék, mely a környező atomok hatását tükrözi. Fel fogjuk tenni, hogy a  $H_{CP}$  járulék hőmérsékletfüggése ugyanaz, mint a saját mágneses momentumé, azaz  $H_{CP}(T) = H_{CP}^0 \sigma(T)$ , ahol  $H_{CP}^0$  a hiperfinom tér törzspolarizációs járulékának értéke zero hőmérsékleten. A szomszédos atomoktól származó  $H_{CEP}$  járulék tartalmazza a hullámfüggvények direkt átlapolásának hatását, éppúgy, mint a Ruderman—Kittel—Kasuya—Yoshida-típusú [53] vezetési elektron spinsűrűség oszcillációs járulékot, és így ésszerű feltenni, hogy függ az atomok közötti távolságtól, amellet, hogy arányos a környező atomok momentumával, azaz  $H_{CEP}(T) = \overline{H_{CEP}[r(T, t)]} \sigma(T)$ , ahol a felülvonás időátlagot jelent,  $r(T, t) = r_0 + \Delta r(T) + x(T, t)$  pedig a pillanatnyi távolság az atomok között egy adott hőmérsékleten. Itt  $r_0$  az atomok közötti távolság zero hőmérsékleten,  $\Delta r(T)$  ezen távolság megváltozása a hőtágulás miatt, és  $x(T, t)$  az átlagtávolságnak rácsrezgések okozta megváltozása (azaz  $x(T, t) = 0$ ).  $H_{CEP}(r) - r_0$  körül sorfejtve kapjuk  $H_{CEP}(r)$  időátlagára a következő eredményt:

$$\overline{H_{CEP}(r)} = H_{CEP}^0 + H'_{CEP}(r_0) \Delta r(T) + \frac{1}{2} H''_{CEP}(r_0) \overline{x^2}, \quad (V.9)$$

ahol  $H_{CEP}^0$ -be beleértjük a zéroponti rácsrezgésekből származó járulékot, a vessző deriválást jelent az argumentum szerint és  $\overline{x^2}$  az átlag hőmérsékletfüggő részét jelenti. Fenti kifejezéseket használva a relatív hiperfinom térre a következőket kapjuk:

$$h(T) = \frac{H_{hf}(T)}{H_{hf}^0} = \left\{ 1 + \frac{H_{CEP}^0}{H_{hf}^0} \left[ \frac{H'_{CEP}(r_0)}{H_{CEP}^0} \Delta r(T) + \frac{1}{2} \frac{H''_{CEP}(r_0)}{H_{CEP}^0} \overline{x^2} \right] \right\} \cdot \sigma(T). \quad (V.10)$$

Itt  $H_{hf}^0$  a hiperfinom tér értéke zero hőmérsékleten.

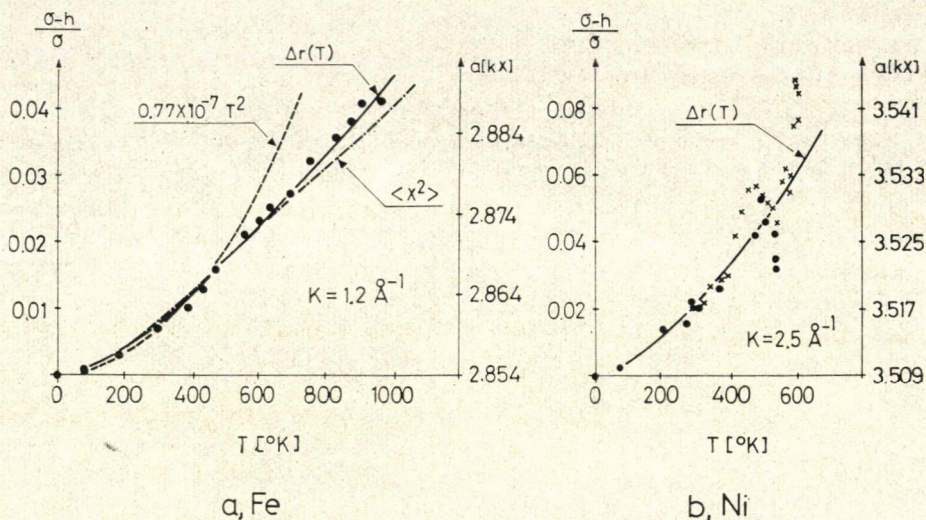
A  $\Delta r(T)$  és  $\overline{x^2}$ -tel arányos tagok egyszerű becslése azt mutatja, hogy ezek a járulékok azonos nagyságrendűek, és nagyságuk durván megfelel a méréseknek. A következőkben megmutatjuk, hogy a két járulék hőmérsékletfüggése nagyon hasonló. Jóval a Debye-hőmérséklet felett mindkettő arányos  $T$ -vel, alacsony hőmérsékleten pedig  $T^2$ -tel. A 24. ábra mutatja vas esetén a rácsállandó hőmérsékletfüggését  $\overline{x^2}$ -ével együtt, ahol az utóbbit Debye-modellben számítottuk, ( $T_D = 460$  °K volt, melyet fajhő mérésekből vettünk [70].). A két járulék hőmérsékletfüggésének eltérése nem múlja felül az 5%-ot az egész számunkra érdekes hőmérséklettartományban. Így az (V.10) egyenlet alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{\sigma(T) - h(T)}{\sigma(T)} = K \Delta r(T), \quad (V.11)$$

ahol  $K$  egy arányossági állandó. A 24. ábra mutatja, hogy vas és nikkal esetén az egyezés kielégítő. Az (V.6) egyenletben definiált  $A(T)$  hiperfinom csatolási állandó konstans térfogaton talált explicit hőmérsékletfüggését így az (V.10) egyenletben levő  $\overline{x^2}$ -tel arányos járulék adja, és ez jól magyarázza az alacsony hőmérsékleten megfigyelt  $T^2$ -es függését. Ez az  $\overline{x^2}$ -tel arányos járulék nem lép fel a konstans hőmérsékleten végzett nyomásfüggő kísérletekben.



Következetesebb lenne  $\overline{x^2}$  hőmérsékletfüggését Debye—Waller-faktor mérésekből meghatározni, azonban tudásunk szerint tiszta vas esetén nincs olyan megbízható Debye—Waller-faktor mérés a szükséges hőmérséklettartományban (80 °K—1000 °K), amely ezt lehetővé tenné. Az egyetlen ilyen nagy hőmérséklet tartományt átfogó mérés [65] csak a görbe alatti területet adja meg egy ábrán kvalitatív jelleggel, ahol a hibák nagysága illuzórikussá teszi az összehasonlítást. A különböző módszerrel meghatározott  $T_D$  Debye-hőmérsékletek azonban nem különböznek lényegesen, és így kb. 10%-on belül megfelelő a számolt görbével való összehasonlítás.



24. ábra.  $(\sigma-h)/\sigma$  hőmérsékletfüggése konstans nyomáson. A mágnesezettség adatokat a [72] hivatkozásból vettük, a vas hiperfinom tér adatait részben [65]-ből, részben saját publikálatlan méréseinkből vettük, míg a nikkelét a [67] hivatkozásból. A folytonos vonal mutatja a rácsparaméter  $\Delta r(T)$  hőtágulás okozta változását vasra és nikkelle [73]. A szaggatott vonal (---) Benedek és Armstrong [64] közelítését mutatja, az eredményvonal (-----) pedig  $\langle x^2 \rangle$  hőmérsékletfüggése

Ezen egyszerű szemiempirikus modell egyik lehetséges alkalmazása az izomer shift explicit hőmérsékletfüggésének magyarázata. Tiszta vasban és kevés vasatomot tartalmazó több ötvözetben a Mössbauer-módszerrel mért shift nyomás és hőmérsékletfüggésének részletes analízise [76] azt mutatta, hogy létezik izomer shiftnek egy olyan hőmérsékletfüggése, melyet nem lehet egyedül a hőtágulás hatásával figyelembe venni. Ennek az explicit hőmérsékletfüggésnek a jelenlétét a rácsrezgések hatásának tulajdonítjuk az  $\overline{x^2}$ -tel arányos járulékon keresztül.

##### 5. A szennyezés és a mátrix hiperfinom terének eltérő hőmérsékletfüggése

A II. fejezetben említettük, hogy a nemmágneses szennyezések hiperfinom tere gyorsabban csökken a hőmérséklet függvényében a mátrixénál. Az általánosan elfogadott magyarázat ezt az eltérést a szennyezést környező mátrixatomok mágnesezettsége gyorsabb csökkenésének tulajdonította. Al, Ga és Sn-t tartalmazó vas



alapú ötvözeteken végzett méréseink szerint viszont ilyen anomális mágnesezettség-csökkenés nincs a környező atomokon, ezért a jelenség új magyarázata szükséges.

Ez lehetséges az előző pontban írottak alapján. Eszerint a hiperfinom tér és a mágnesezettség eltérő hőmérsékletfüggésének oka a rács hőtágulása és a rácsrezgések hatása. Nemmágneses szennyezés esetén a teljes hiperfinom tér vezetési elektron polarizációs járulék, aminek az a következménye, hogy a mátrix hiperfinom terénél a szennyezése kb. kétszer gyorsabban csökken ( $H_{\text{CEP}}^0/H_{\text{hf}}^0=1$  az (V.10) egyenletben). Ily módon azonnal értelmezhető az eltérés FeCu [22] és NiSn [21] esetén. Természetesen különböző nemmágneses szennyezésekre a CEP járulék távolságfüggése, éppúgy, mint a lokális hőtágulás  $\Delta r(T)$  és a szennyezés rácsrezgéseinek  $\bar{x}^2$  nagysága különbözik a tiszta mátrixétól. Ily módon egy a mátrixban lazán kötött Sn atom feltevésével meg lehet magyarázni a FeSn [21] és CoSn [77] esetén megfigyelt hiperfinom tér anomáliákat.

Különböző 3d-szennyezések esetén is megfigyeltek kis eltéréseket a mátrix hiperfinom terének hőmérsékletfüggéséhez képest: vasban a V [15] és Co [25] szennyezések, nikkemben a Co [78] szennyezés hiperfinom tere mutatott ilyen anomális viselkedést. A FeCo [25] és a NiCo [79] ötvözetek esetén meghatározták a szennyezés hiperfinom terének nyomásfüggését is. Ennek segítségével a konstans nyomáson a szennyezések helyén mért hiperfinom terek hőmérsékletfüggését konstans térfogatra transzformálták és azt találták [25, 79], hogy az még konstans térfogaton is eltér a mátrixétól. Az előzőekben mondottak szerint ezen mérések kvalitatív magyarázata az, hogy a szennyezés hiperfinom tere vezetési elektron polarizációs járulékainak nagysága, távolságfüggése különböző a különböző szennyezésekre és mátrixokra, valamint különböző a szennyezés körül a lokális hőtágulás hőmérsékletfüggése [ $\Delta r(T)$ ] és a fononsávban okozott perturbáció miatt a rácsrezgések  $\bar{x}^2$ -nak hőmérsékletfüggése. Fentiek alapján lehetséges egy kvantitatív tárgyalás is, azonban ez jelenleg nehezen keresztülvihetőnek látszik, és további kísérleti adatok szükségessége a különböző járulékok szerepének pontosabb megértéséhez.

## VI. Összefoglalás

A FeMn [15] és NiRu [1] ötvözetekben a szennyezés hiperfinom terének hőmérsékletfüggése lényegesen eltér a mátrixétól. Az eltérést szokásosan a szennyezés-momentum anomális viselkedésével magyarázták, melyet Heisenberg modellben írtak le, és a szennyezés és a mátrixatomok közötti kicserélődési kölcsönhatás ki-csínysége miatti magnonsáv perturbációinak tulajdonítottak [1, 15–19, 55].

A nemmágneses szennyezések hiperfinom terének hőmérsékletfüggése vasban és nikkemben szintén eltér a mátrix mágnesezettségének hőmérsékletfüggésétől, melyet ugyancsak Heisenberg modellel, a nemmágneses szennyezést környező mátrixatomok mágnesezettségének gyorsabb csökkenésével magyaráztak [1, 21, 23, 44].

Jelen munka a szennyezést környező mátrixatomok hiperfinom tere hőmérsékletfüggésének első szisztematikus vizsgálata, melyet Al, Ga, Sn, Ti, V, Cr, Mn, Co, Ni; Mo, Ru, Rh, Pd; W, Re, Os, Ir és Pt szennyezéseket tartalmazó vasalapú ötvözeteken végeztünk Mössbauer-effektus segítségével az Intézetben kifejlesztett berendezésen 80 °K és 1100 °K között. A főbb eredmények a következők:

1. A Heisenberg modell nem alkalmazható a szennyezés helyén levő hiperfinom tér anomális viselkedésének leírására [80, 81].



2. A szennyezést környező vasatomok hiperfinom tere csak a Mn, Ru, Os, Ni, Pd és Pt szennyezések esetén anomális hőmérsékletfüggésű [42, 82].

3. A szennyezés vasszomszédainál megfigyelt anomália oka a szennyezés-momentum anomális hőmérsékletfüggésének tükröződése a hiperfinom tér vezetési elektron polarizációs járulékában [42, 83].

4. *Campbell* elméletét [24] kiterjesztve, a szennyezés többlettöltésének leárványolásokor az elektronsávban a spin-fel és spin-le Fermi-nívó közelében keletkezett virtuális nívóval magyarázhatjuk a Mn, Ru, Os és Ni, Pd, Pt szennyezések momentumának anomális hőmérsékletfüggését [82].

5. A rácsrezgések hatásának figyelembevételével lehetséges magyarázatot adtunk a tiszta fémekben (Fe, Ni) megfigyelt különbségre a hiperfinom tér és a mágnesezettség hőmérsékletfüggése között, valamint a nemmágneses szennyezések hiperfinom terének anomáliájára [84].

6. Átlagmágnesezettségmérés segítségével kimutattuk, hogy NiMn-ban a Mn momentuma anomális hőmérsékletfüggésű [85], amit direkt neutronszórásos mérés azóta igazolt [61]. Ez a tény a 4. pontban említett elektronsáv perturbációs kép alkalmazhatóságának közvetett bizonyítéka.

Összefoglalva: a szennyezésmomentum anomális hőmérsékletfüggésének vizsgálatára új módszert dolgoztunk ki; a szennyezést környező mátrixatomok hiperfinom terének vizsgálatát. Ezzel a módszerrel elsőként mutattunk ki anomáliát FeRu, FeOs, FeNi, FePd, FePt esetén és mágnesezettség méréssel NiMn-ban. Értelmeztük a hiperfinom tér anomáliákat mind a mátrixatomok, mind a szennyezés-atomok helyén.

#### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetet mondok *Pál Lénárd* akadémiai levelező tagnak, a KFKI igazgatójának munkám figyelemmel kíséréseért és hasznos tanácsaiért.

Megköszönöm *Keszthelyi Lajosnak*, a fizikai tudományok doktorának, *Cser Lászlónak*, a fizikai tudományok kandidátusának, *Dézsai Istvánnak*, a fizikai tudományok kandidátusának, *Grüner Györgynek*, *Mezei Ferencnek*, *Molnár Bélának*, *Nagy Dénes Lajosnak* és *Tarnóczyi Tivadarnak* a fizikai tudományok kandidátusának a munka elvégzésében nyújtott segítségét, valamint *Konczos Gézának*, a KFKI Szilárdtestfizikai Főosztály Technológiai Csoportja vezetőjének és munkatársainak a minták elkészítését.

*Zawadowski Alfrédnek*, a fizikai tudományok doktorának, *Hargitai Csabának* és *Kollár Jánosnak* az elméleti diskuszióikért tartozom köszönettel.

Megköszönöm továbbá *Keszthelyi Lajosnak*, a fizikai tudományok doktorának és *Solt Györgynek*, a fizikai tudományok kandidátusának a kézirat gondos átnézését és hasznos tanácsait.\*

Köszönöm a Szilárdtestfizikai Főosztály valamennyi dolgozójának segítőkészségét.

\* Köszönettel tartozom a kézirat gondos tanulmányozásáért opponenseimnek: *Bodó Zalánnak*, a fizikai tudományok doktorának és *Korecz Lászlónak*, a fizikai tudományok kandidátusának.



## IRODALOM

1. D. A. Shirley, S. S. Rosenblum és E. Matthias, Phys. Rev. 170, 363, 1968.
2. Hyperfine Interactions, Edited by A. J. Freeman és R. B. Frankel, Academic Press, 1967.
3. I. A. Campbell, J. Phys. C.: Solid St. Physics, 2, 1338, 1969.
4. E. Fermi, Z. Phys. 60, 320, 1930.
5. S. Wakoh és J. Yamashita, J. Phys. Soc. Japan 25, 1272, 1968.  
K. J. Duff és T. P. Das, Phys. Rev. B3, 192, 2294, 1971.
6. E. Daniel és J. Friedel, J. Phys. Chem. Sol. 24, 1061, 1963.
7. G. F. Koster és J. C. Slater, Phys. Rev. 95, 1167, 1954;  
A. M. Clogston, Phys. Rev. 125, 439, 1962;  
J. Callaway, J. Math. Phys. 5, 783, 1964;  
P. A. Wolff, Phys. Rev. 124, 1030, 1961;  
F. Gautier és P. Lengart, Phys. Rev. 139, A705, 1965;  
J. L. Beeby, Phys. Rev. 137, A933, 1965.
8. Yu. A. Izyumov, Adv. in Phys. 14, 569, 1965.
9. A. A. Gomes, J. Phys. Chem. Solids 27, 451, 1966.
10. I. A. Campbell és A. A. Gomes, Proc. Phys. Soc. London, 91, 319, 1967.
11. I. A. Campbell, Proc. Phys. Soc. London, 89, 71, 1966.
12. I. A. Campbell, J. Phys. C. 1, 687, 1968.
13. A. A. Gomes és I. A. Campbell, J. Phys. C.: Proc. Roy. Soc. 1, 253, 1968.
14. M. C. Cadeville és J. Roussel, J. Phys. F.: Metal Phys. 1, 686, 1971.
15. Y. Koi, A. Tsujimura és T. Hihara, J. Phys. Soc. Japan 19, 1493, 1964.
16. V. Jaccarino, L. R. Walker és G. K. Wertheim, Phys. Rev. Letters, 13, 752, 1964.
17. T. Wolfram és W. Hall, Phys. Rev. 143, 284, 1966.  
T. Wolfram, Phys. Rev. 182, 573, 1969.
18. D. Hone, H. Callen és L. R. Walker Phys. Rev. 144, 183, 1966.
19. K. Johansson, E. Karlsson, L. O. Norlin, P. N. Tandon és H. C. Jain, Arkiv Fysik, 37, 453, 1968.
20. T. E. Cranshaw, C. E. Johnson és M. S. Ridout, Pyhs. Letters, 20, 97, 1967.
21. G. P. Huffman, F. C. Schwerer és G. R. Dunmyre, J. Appl. Phys. 40, 1487, 1969.
22. D. T. Edmonds és G. V. H. Wilson, Phys. Letters, 23, 431, 1966.
23. L. Boström, G. Liljégren, B. Johnson és E. Karlsson, Physica Scripta, 3, 175, 1971.
24. I. A. Campbell, J. Phys. C.: Solid St. Physics, 3, 2151, 1970.  
I. A. Campbell és A. A. Gomes, Solid St. Comm. 6, 395, 1968.
25. T. Kushida, A. H. Silver, Y. Koi és A. Tsujimura, J. Appl. Phys. 33, 1079S, 1962.
26. R. L. Streever, L. H. Bennett, R. C. La Force és G. T. Day J. Appl. Phys. 34, 1050, 1963.
27. G. K. Wertheim, Mössbauer Effect, Academic Press, 1964.
28. H. Frauenfelder, Tho Mössbauer Effect, New York. 1962.
29. J. Danon, Lectures on the Mössbauer Effect, Gordon and Breach. 1968.
30. C. Kittel, Bevezetés a szilárdtestfizikába, Műszaki Könyvkiadó. 1966; L. Keszthelyi: 257. o.
31. H. Frauenfelder, D. E. Nagle, R. D. Taylor, D. R. F. Cochran és W. M. Visscher, Phys. Rev. 126, 1065, 1962.
32. E. Serf, E. Kis és L. Várhalmi, publikálás alatt.
33. G. K. Wertheim, V. Jaccarino, J. H. Wernick és D. N. E. Buchanan, Phys. Rev. Letters, 12, 24, 1964.
34. M. B. Stearns, Phys. Rev. 147, 439, 1966.
35. J. J. Murphy, J. I. Budnick és S. Skalski, J. Appl. Phys. 39, 1239, 1968.
36. R. H. Dean, R. J. Furley és R. G. Scurlock, J. Phys. F.: Metal Phys., 1, 78, 1971.
37. J. I. Budnick, T. J. Burch, S. Skalski, és K. Raj, Phys. Rev. Letters, 24, 511, 1970. J. I. Budnick: Colloque Ampere XV. North-Holland, Amsterdam, 1969.
38. E. F. Mendis és L. W. Anderson, Phys. Stat. Sol. 41, 375, 1971.  
E. F. Mendis és L. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. 19, 1434, 1967.
39. P. J. Schurer, G. A. Sawatzky és F. van der Woude, Phys. Rev. Letters, 27, 586, 1971.
40. H. Bernas és I. A. Campbell Solid St. Comm., 4, 577, 1966.
41. M. B. Stearns, Phys. Rev. 168, 588, 1968.
42. I. Vincze és G. Grüner, Phys.. Rev. Lett. 28, 178, 1972. KFKI-71-54, preprint.
43. P. C. Riedi, Phys. Letters, 33A, 273, 1970.
44. S. W. Lovesey és W. Marshall, Proc. Phys. Soc. 89, 613, 1966.  
S. W. Lovesey Proc. Phys. Soc. 89, 625, 1966; 89, 893, 1966.



45. H. P. van de Braak és W. J. Caspers, Phys. Stat. Sol. 24, 733, 1967.  
H. P. van de Braak és W. J. Caspers, Z. Phys. 200, 270, 1967.
46. N. Pessal, K. P. Gupta, C. H. Cheng és P. A. Beck, J. Phys. Chem. Solids 25, 993, 1964.  
C. H. Cheng, K. P. Gupta, C. T. Wei és P. A. Beck, J. Phys. Chem. Solids 25, 759, 1964.
47. A. T. Aldred, J. Phys. C.: 1, 1103, 1968.
48. T. M. Holden, J. B. Comly és G. G. Low, Proc. Phys. Soc. 92, 726, 1967.
49. A. T. Aldred, J. Appl. Phys. 37, 1344, 1966.
50. G. P. Huffman és G. R. Dunmyre, J. Appl. Phys. 41, 1323, 1970; J. Appl. Phys. 42, 1613, 1971;  
valamint publikálás alatt a „Proceedings of the 1971 Conference on Magnetism and Magnetic Materials”-ban.
51. C. Sandron, Ann. Phys. (France) 17, 371, 1932.
52. G. Grüner, I. Vincze és L. Cser, Solid St. Comm. 10, 347, 1972.
53. M. A. Ruderman és C. Kittel, Phys. Rev. 96, 99, 1954,  
T. Kasuya, Progr. Th. Phys. 16, 45, 1956,  
K. Yoshida Phys. Rev. 106, 893, 1957.
54. G. Grüner Solid St. Comm. 7, 1421, 1969.
55. G. Pramila és L. Grodzins, Hyperfine Structure and Nuclear Radiations, Eds. E. Matthias és D. A. Shirley. Amsterdam: North-Holland. 476. o. 1968; magánközlemény.
56. I. A. Campbell, magánközlemény.
57. M. F. Collins és G. G. Low, Proc. Phys. Soc. (London) 86, 535, 1965.
58. C. Sadron, Proc. Roy. Soc. 17, 371, 1932.
59. V. Marian, Ann. Phys. (Paris), 7, 459, 1937.
60. D. L. Mills, A. Fert és I. A. Campbell, J. Phys. C.: Solid St. Phys. (megjelenés alatt).
61. F. Mezei magánközlemény.
62. R. L. Streever, Phys. Rev. 173, 591, 1968.
63. C. Robert és J. M. Winter, Compt. rend. 250, 3831, 1960.
64. G. B. Benedek és J. Armstrong, J. Appl. Phys. 32, 1065, 1961.
65. R. S. Preston, S. S. Hanna és J. Heberle, Phys. Rev. 128, 2207, 1962.
66. M. A. Butler, G. K. Wetheim és D. N. E. Buchanan, Phys. Rev. 1972, publikálás alatt.
67. R. L. Streever és L. H. Bennett, Phys. Rev. 131, 2000, 1963.
68. R. Kaul és E. D. Thompson J. Appl. Phys. 40, 1383, 1969.
69. G. B. Benedek és T. Kushida, J. Phys. Chem. Sol. 5, 241, 1958.
70. K. A. Gschneider, Jr. Solid State Physics. Edited by F. Seitz and D. Turnbull, Vol. 16, Academic Press, New York 1964.
71. L. Boström, B. Johnson, G. Carlsson és E. Karlsson, Physica Scripta 3, 183, 1971.
72. J. Crangle és G. M. Goodman, Proc. Roy. Soc. London, A321, 477, 1971.
73. F. C. Nix és D. MacNair, Phys. Rev. 60, 597, 1941.
74. H. E. Nigh, S. Legvold és F. H. Spedding, Phys. Rev. 132, 1092, 1963.
75. F. J. Darnell, Phys. Rev. 130, 1825, 1963.
76. R. M. Housley és F. Hess, Phys. Rev. 164, 340, 1967.
77. T. E. Cranshaw, J. Appl. Phys. 40, 1481, 1969.
78. L. H. Bennett és R. L. Streever, Jr., J. Appl. Phys. 33, 1039 S, 1962.
79. L. H. Bennett, J. Appl. Phys. 36, 942, 1965.
80. I. Vincze és L. Cser, Phys. Stat. Sol. (b) 49, K 99 1972.
81. I. Vincze és L. Cser, Phys. Stat. Sol.(b) 50, 709, 1972.
82. I. Vincze, Solid St. Comm. 10, 341, 1972.
83. I. Vincze, L. Cser és D. L. Nagy, Proc. Conf. Application of the Mössbauer Effect Tihany, 1969, 389. o.
84. I. Vincze és J. Kollár, Phys. Rev. B6, 1066 (1972); KFKI-72-14, preprint.
85. I. Vincze és T. Tarnóczy, Solid St. Comm. 9, 1239, 1971.



# Ge(Li) DETEKTOR HATÁSFOKÁNAK MÉRÉSE KITERJEDT FORRÁSRA\*

NAGY SÁNDOR, SAILER KORNÉL, DARÓCZY SÁNDOR, RAICS PÉTER  
KLTE Kísérleti Fizikai Intézete, Debrecen

NAGY JÓZSEF  
KLTE Izotóp Laboratóriuma, Debrecen

GERMÁN ENDRE  
MTA Izotóp Intézete, Budapest.

Számítógépes rutinmódszert dolgoztunk ki Ge(Li) detektor tetszőleges kiterjedésű forrásra vonatkozó relatív és abszolút hatásfokának meghatározására. A relatív hatásfok nagy pontosságú mérésére  $^{226}\text{Ra}$  és  $^{149}\text{Nd}$  forrásokat, az abszolútizálásra pontszerű  $^{203}\text{Hg}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{60}\text{Co}$  és  $^{88}\text{Y}$  standard forrásokat valamint kiterjedt  $^{235}\text{U}$  forrást használtunk.

## I. Bevezetés

A Ge(Li) detektorok hatásfokára vonatkozó számolások a detektor bonyolult alakja miatt kevésbé megbízhatóak. A relatív és abszolút hatásfok mérésére számos módszert dolgoztak ki [1], de ezideig kevés figyelmet fordítottak a forrás nem pontszerű voltának hatására. Aktivációs méréseknél a forrás rendszerint nem pontszerű hanem jelentős kiterjedésű, kör alakú fólia (intézetünkben pl. 19 mm átmérőjű fóliákat használunk). A méréseknél használt Ge(Li) detektor hatásfokát ilyen méretű forrásra kell meghatározni, a rendelkezésre álló kalibrált standard források azonban közelítőleg pontszerűek. A standard források további hiányossága, hogy az energia függvényében kevés pontot adnak, s ezért viszonylag széles energia-intervallumokban bizonytalan a hatásfok görbe meghatározása.

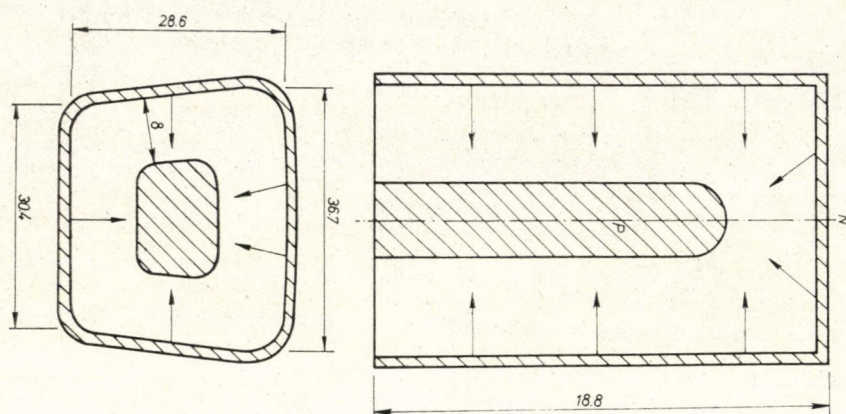
A relatív hatásfok nagy pontossággal és az energia függvényében elég finoman meghatározható olyan kalibrálatlan forrás segítségével is, melynek sok, ismert relatív intenzitású gamma-vonala van. Erre a célra elég nagy specifikus aktivitású forrás alkalmazása célszerű, mely gyakorlatilag önabszorpció mentes vastagságban is biztosítja a jó statisztikát. Egy ilyen forrás ugyanakkor a kívánt alakúra és méretűre készíthető, s így a probléma a segítségével nyert relatív hatásfok-görbe abszolútizálására redukálható.

A jelen munkában ismertetjük a pontforrásra és kiterjedt forrásra vonatkozó hatásfok kísérleti vizsgálata során szerzett tapasztalatainkat és az ezek alapján általunk kidolgozott számítógépes rutin módszert Ge(Li)-detektor tetszőleges kiterjedésű forrásra vonatkozó relatív és abszolút hatásfokának meghatározására.

A méréseket Nuclear Enterprises gyártmányú, 661 keV-nél 4,7 keV feloldású,  $20\text{ cm}^3$  érzékeny térfogatú, koaxiális GDC-T-20 „Trapesoidal Five-sided” Ge(Li) detektorral végeztük. A detektor alakját és méreteit az I. ábra szemlélteti, a gyári leírás szerint. A detektor-kristály távolsága a kriosztát külső felületétől 10 mm, a kriosztát ablaka 1,5 mm vastag alumínium. A detektorhoz NE 5287A előerősítő,

\* Érkezett 1973. V. 7.





1. ábra. A Ge(Li) detektor metszete két nézetben, a gyári leírás szerint

NE 4603 főerősítő és DIDAC-4000 analízátor (DIDAC A17 digitális spektrumstabilizátorral) csatlakozott.

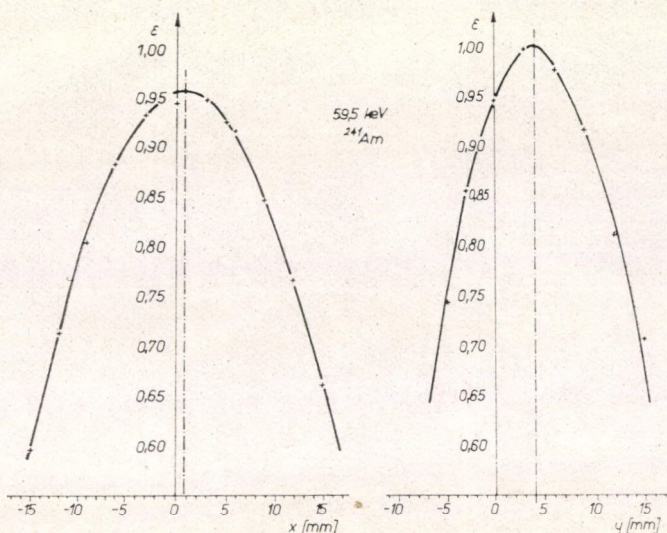
A gamma-intenzitásokat a teljes energiájú csúcsok (full energy peak) területével mértük. A háttér, illetve a csúcs alatti terület meghatározása standard csúcsalakokat felhasználó grafikus módszerrel történt, mellyel a csúcsalak energiafüggő aszimmetriáját és „lépcsőjét” viszonylag egzaktul figyelembe lehetett venni. Komplex csúcsok esetén az együttes területet határoztuk meg, s a hozzájuk tartozó hatásfokot az intenzitással súlyozott átlagos energiához rendeltük.

A holtidőkorrekciót az analízátor „élő idő” méréssel automatikusan végezte. A véletlen koincidencia (pile-up) korrekciót ismert frekvenciájú generátor jeleinek a spektrumhoz keverésével kísérletileg határoztuk meg; ennek értéke maximálisan 2,5% volt. A kaszkád vonalak valódi koincinciájára vonatkozó korrekció [1] néhány kivételtől eltekintve elhanyagolható, mivel a detektor totál hatásfoka alacsony (2,5%–5%). A totál hatásfokot standard forrásokkal mért, geometria-függetlennek tekinthető csúcs/totál területarányok felhasználásával a csúcs-hatásfok görbéből határoztuk meg.

## II. A hatásfok vizsgálata pontforrásokkal

Hogy a pontforrásra és kiterjedt forrásra vonatkozó hatásfok különbségét kvantitatíve is pontosan meghatározhassuk, megvizsgáltuk a hatásfok változását a pontforrásnak a Ge(Li) „szimmetria”-tengelyére merőleges síkban történő mozgásával. A méréseket három energiánál (59,5 keV, 391,7 keV és 1333 keV) és két geometriában, a Ge(Li) kriosztátjának felületén (a kristálytól mért távolság  $l = 10$  mm) és attól 50 mm távolságban ( $l = 60$  mm) végeztük. A kriosztát szimmetriatengelyére merőleges síkban, vízszintes és függőleges irányban mozgatott forrásokkal mért relatív hatásfokokat a 2. ábrán tüntettük fel. A mérések azt mutatják, hogy a Ge(Li) kristály tengelye eltér a kriosztát szimmetriatengelyétől: vízszintesen jobbra 1 mm-rel, függőlegesen felfelé 4 mm-rel. A mérési eredményeket a Ge(Li) kristály tengelyére,





2. ábra. A hatásfok relatív változása a kriosztát szimmetriatengelyére merőleges síkban, két egymásra merőleges irányban, a szimmetriatengelytől mért távolság függvényében, 59,5 keV energiánál

mint origóra vonatkoztatva mutatja a 3. ábra. A hatásfok változása az energia és a forrás-detektor távolság növelésével csökken. Jól látható továbbá, hogy a hatásfok függőleges irányban gyorsabban változik, mint vízszintesen, ami a detektor alakja ismeretében (1. ábra) érthető.

Átlagolva a pontforrás hatásfokát tetszőleges sugarú kör felületére, meghatározható a kiterjedt forrásra vonatkozó hatásfok. A 4. ábra 19 mm átmérőjű kiterjedt forrás és pontforrás hatásfokának ilyen átlagolással számított hányadosát mutatja a kétféle geometriában. A különösen kis energiáknál és kis forrás-detektor távolságoknál fellépő jelentős eltérések indokolják azt a törekvésünket, hogy a Ge(Li) detektor kalibrálását a mérendő mintákkal azonos kiterjedésű forrásokkal végezzük.

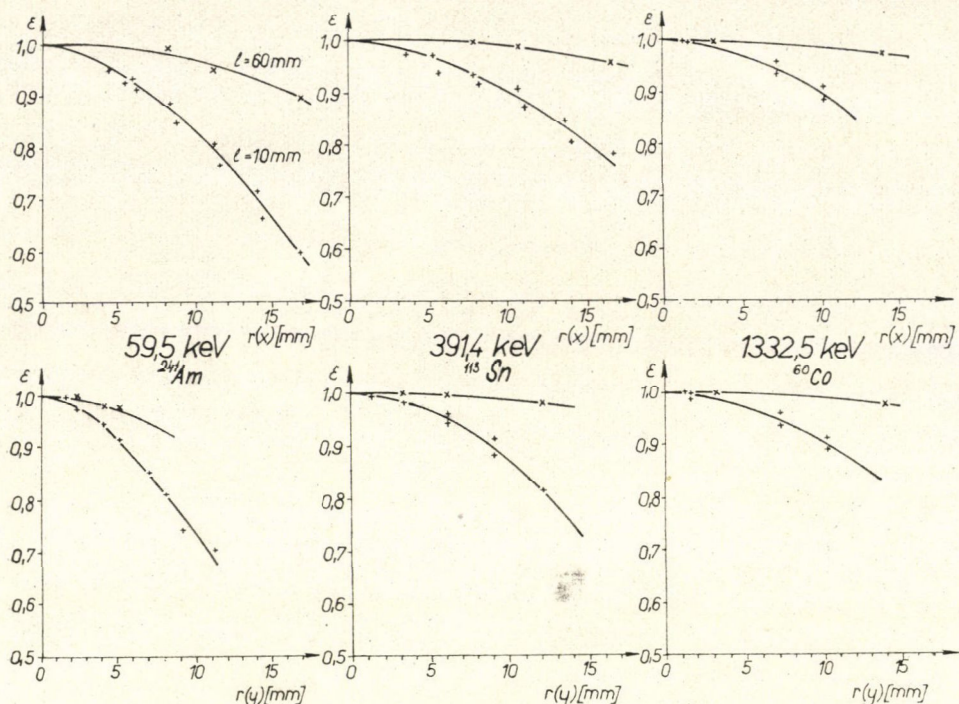
### III. A hatásfok vizsgálata kiterjedt forrásokkal

#### 3.1. Kiterjedt források relatív hatásfok méréshez

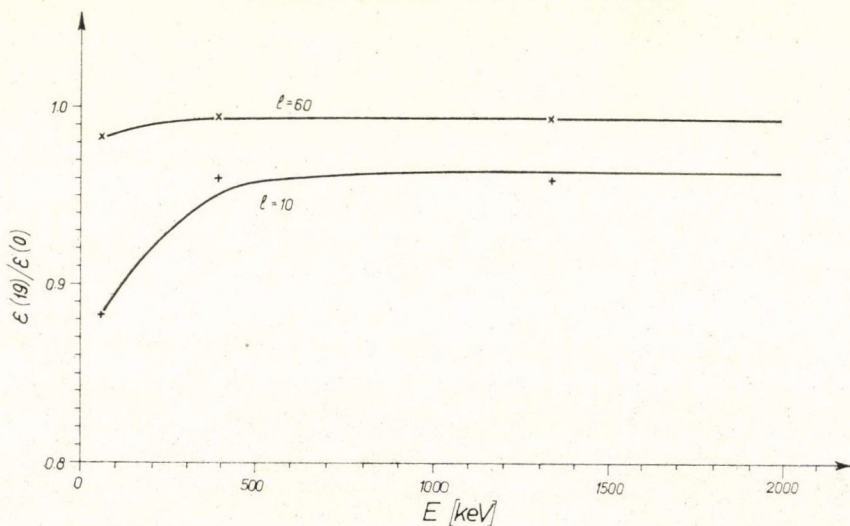
A relatív hatásfok 186 keV—2448 keV intervallumban való méréséhez bomlás-termékeivel egyensúlyban levő  $^{226}\text{Ra}$  forrást használtunk. Ennek spektrumát alacsony energiákon (59 keV—654 keV) jól kiegészíti a  $^{149}\text{Nd}$  spektruma és spektrumuk átfedő része lehetővé teszi, hogy a két kalibrálatlan forrással egymástól függetlenül meghatározott relatív hatásfok-görbét összenormáljunk.

A  $^{226}\text{Ra}$  forrást  $\text{BaSO}_4(\text{RaSO}_4)$  elegykristály finom porából készítettük, acetonnal hígított aralditban keveréssel homogenizálva a vastagságot. A közelítőleg 1  $\mu\text{Ci}$  aktivitású 19 mm átmérőjű forrás összesen kb. 10 mg  $\text{BaSO}_4(\text{RaSO}_4)$ -ot és





3. ábra. A hatások relatív változása a Ge(Li) kristály tengelyétől mért távolság függvényében 3 különböző energiánál és két különböző forrás-detektor távolság mellett. Felül a 2. ábra szerinti  $x$  irányú, alul  $y$  irányú mozgattással



4. ábra. 19 mm átmérőjű kiterjedt forrásra és pontforrásra vontkozó hatások hányadosa az energia függvényében, két különböző forrás-detektor távolság mellett, a kristályt szimmetriatengelyében



10 mg aralditot tartalmaz. Ilyen vastagság mellett a forrás önabszorpciója 186 keV-nél is elhanyagolható (kb. 0,2%). Az araldit és egy leragasztott, 0,8 mg/cm<sup>2</sup> vastagságú alumíniumozott MYLAR fedő fólia biztosítja, hogy az emanáció nem tud kiszökni a forrásból, s így a bomlási egyensúly biztosított a teljes bomlási sorra.

A hatások meghatározásához szükséges egyensúlyi intenzitásokra a *Martin* és *Blichert-Toft* [2] által javasolt „legjobb” adatokat használtuk, melyek jól egyeznek a *Szabirov* és munkatársai [3] által mért relatív intenzitás értékekkel, a 186 keV energiájú vonal kivételével. Ezt az adatot [2]-ben a megfelelő alfa-átmenet intenzitásából és a konverziós koeficiensből határozták meg. Figyelembe véve az idézett mérési adatokat és azok hibáit, a gamma-intenzitás értéke, de főleg a hibája pontatlan. Ezért a 186 keV-es vonal egyensúlyi intenzitására [2]-ben megadott  $3,3 \pm 0,1\%$  értéket az idézett konverziós koeficiens alapján  $3,35 \pm 0,27\%$  értékre korrigáltuk s ezt javasoljuk használni.

Egy 14 órás mérési idejű <sup>226</sup>Ra spektrumot mutat az 5. ábra.

A <sup>149</sup>Nd forrást ( $T_{1/2} = 1,73$  óra) <sup>150</sup>Nd(*n*, 2*n*) reakcióban állítottuk elő 73,5 mg természetes Nd<sub>2</sub>O<sub>3</sub> porból préselt minta 14 MeV-os neutronokkal történt besugárzásával. Az így előállított 19 mm átmérőjű, 26 mg/cm<sup>2</sup> vastagságú forrás önabszorpciója 59 keV-nél 15%, 97 keV-nél 4%, 200 keV fölött elhanyagolható ( $\leq 0,5\%$ ). A mért gamma-intenzitásokat önabszorpcióra a geometriai viszonyokat figyelembe vevő számolással korrigáltuk a *Storm* és *Israel* táblázatában [4] adott abszorpciós koeficienssekkel. A táblázatban nem szereplő energiákra exponenciális interpolációval számítottuk ki az abszorpciós koeficienseket.

A gamma-intenzitás adatokat az irodalomban fellelhető Ge(Li) detektoros mérésekből [5, 6, 7, 8] átlagoltuk. Mivel *Helmer* és *Mc Isaac* [5] 2 keV feloldású Ge(Li) detektorral mért, míg a többi detektor feloldása  $\geq 6$  keV volt, az energiaértékeket és a közeli vonalak intenzitását egyedül [5]-ből vettük. A rosszabb feloldásnál is jól elkülönülő tiszta vonalaknál az összes idézett mérési adat súlyozatlan átlagát vettük; a nyilvánvalóan kiértékelési hibából, illetve a detektor hibás kalibrálásából eredő, szisztematikusan eltérő adatokat azonban ilyen esetekben is elhagytuk. Az általunk javasolt „legjobb” gamma-intenzitás adatokat az 1. táblázat tartalmazza.

Egy Nd spektrumot mutat a 6. ábra, melyet fél órás hűlési és 2 órás mérési idővel vettük fel. A <sup>149</sup>Nd-től idegen vonalak könnyen azonosíthatók (<sup>141</sup>Nd, <sup>147</sup>Nd), s a kiértékelés során nagy pontossággal figyelembe vehetők.

### 3.2. A mérési adatok illesztése

Ismeretes [1], hogy a Ge(Li) detektoroknak a teljes energiájú csúcsra vonatkozó hatásfoka ( $\varepsilon$ ) az energia ( $E$ ) függvényében 100–200 keV fölött első közelítésben

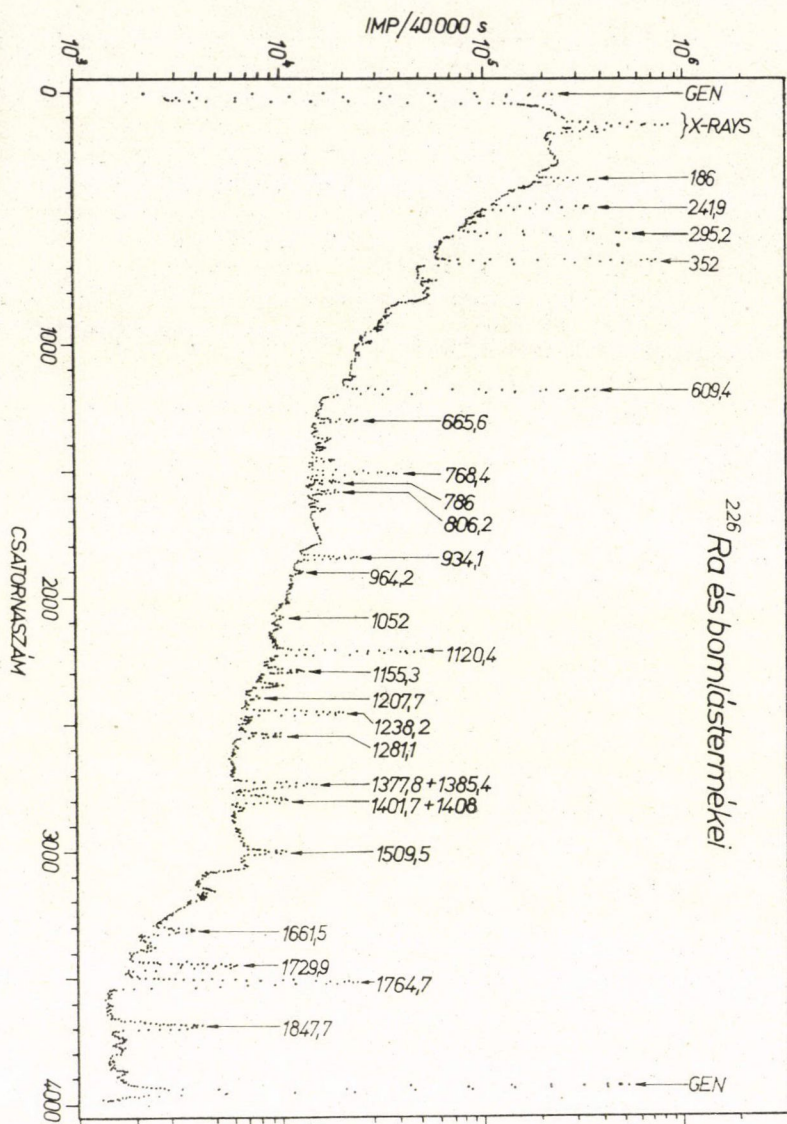
$$\varepsilon = A \cdot E^{-b} \quad (1)$$

alakú hatványfüggvénnyel írható le. Jobb illesztés érhető el az alábbi függvényalakokkal:

$$\ln \varepsilon = b \cdot \ln \frac{E_0}{E} + c \cdot \ln^2 \frac{E_0}{E} \quad (2)$$

$A$ ,  $b$ ,  $c$  és  $E_0$  a detektorra és a forrás-detektor geometriára jellemző konstansok.





5. ábra. A bomlástermékeivel egyensúlyban levő  $^{226}\text{Ra}$  spektruma.  
(0,5 keV/csatorna, 10 keV levágás)

100–200 keV alatt a detektor ablak jelentős abszorpciója miatt az (1), illetve (2) függvényalaktól jelentősen eltér a hatásfok menete. Mivel ebben az energia-tartományban még az előbbinél is kevesebb információnk van a hatásfok-függvény analitikus alakjára, optimális fokszámú polinom illesztésével próbálkozhatunk.

A hatásfok adatokat az alacsony energiájú tartományon optimális fokszámú polinommal, a nagyenergiájú tartományon (2) szerinti függvénnyel illesztettük



## I. TÁBLÁZAT

 $^{149}\text{Nd}$   $\gamma$ -vonalainak energiája és intenzitása

$E_\gamma$ [5] (keV)	$I_\gamma$ [5] (%)	$I_\gamma$ javasolt (%)
59,0 $\pm$ 0,3	$\sim$ 0,8	(0,97 $\pm$ 0,16)
74,4 $\pm$ 0,2	} 2,1 $\pm$ 0,4	1,9 $\pm$ 0,4*
76,8 $\pm$ 0,2		} 2,01 $\pm$ 0,38
97,02 $\pm$ 0,1	1,4 $\pm$ 0,2	1,58 $\pm$ 0,23
114,30 $\pm$ 0,05	19,0 $\pm$ 2,0	19,1 $\pm$ 2,0
139,2 $\pm$ 0,1	0,5 $\pm$ 0,1	0,5 $\pm$ 0,1
155,9 $\pm$ 0,1	5,8 $\pm$ 0,6	6,35 $\pm$ 0,67
188,8 $\pm$ 0,1	1,7 $\pm$ 0,3	1,7 $\pm$ 0,3
192,1 $\pm$ 0,2	0,4 $\pm$ 0,2	0,4 $\pm$ 0,2
198,9 $\pm$ 0,2	1,2 $\pm$ 0,3	1,2 $\pm$ 0,3
208,2 $\pm$ 0,2	2,6 $\pm$ 0,5	2,6 $\pm$ 0,5
211,32 $\pm$ 0,1	24,0 $\pm$ 2,0	24,0 $\pm$ 2,0
214,0 $\pm$ 0,3	0,2 $\pm$ 0,15	0,2 $\pm$ 0,15
226,8 $\pm$ 0,5	0,1 $\pm$ 0,05	} 0,55 $\pm$ 0,23
230,1 $\pm$ 0,5	0,5 $\pm$ 0,2	
240,25 $\pm$ 0,5	3,8 $\pm$ 0,4	3,8 $\pm$ 0,4
245,9 $\pm$ 0,3	0,8 $\pm$ 0,2	0,8 $\pm$ 0,2
267,7 $\pm$ 0,2	6,0 $\pm$ 1,0	} 16,2 $\pm$ 2,2
270,3 $\pm$ 0,2	10,0 $\pm$ 1,0	
275,6 $\pm$ 0,4	0,5 $\pm$ 0,2	} 0,4 $\pm$ 0,1
311,0 $\pm$ 0,5	0,4 $\pm$ 0,1	
326,6 $\pm$ 0,2	4,4 $\pm$ 0,4	4,58 $\pm$ 0,43
349,1 $\pm$ 0,2	1,5 $\pm$ 0,2	1,46 $\pm$ 0,2
385,0 $\pm$ 2,0	0,3 $\pm$ 0,1	0,3 $\pm$ 0,1
423,6 $\pm$ 0,2	7,0 $\pm$ 0,7	7,6 $\pm$ 0,75
443,5 $\pm$ 0,2	1,1 $\pm$ 0,2	1,33 $\pm$ 0,24
540,5 $\pm$ 0,2	6,5 $\pm$ 0,6	6,73 $\pm$ 0,62
556,4 $\pm$ 0,2	1,1 $\pm$ 0,2	1,02 $\pm$ 0,18
654,7 $\pm$ 0,4	8,4	8,15 $\pm$ 0,8

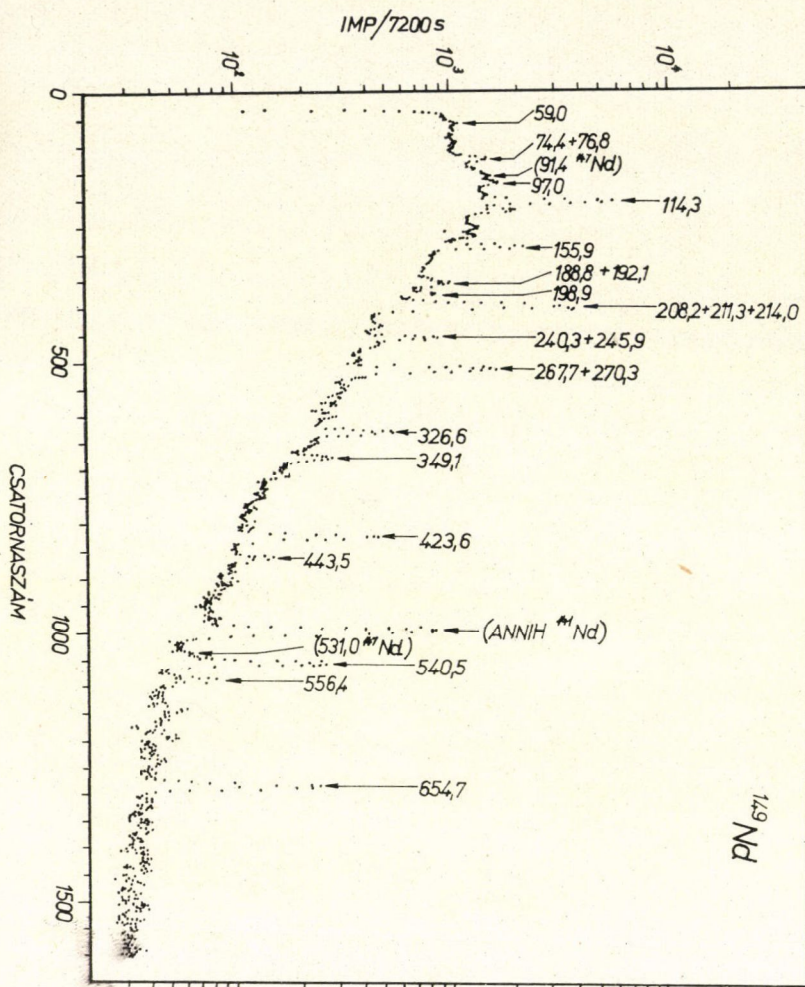
\* Általunk mért érték,  $^{241}\text{Am}$  forrással mérve a hatásfokot.

a Függelékben ismertetett programmal úgy, hogy a két energia-tartománynak átfedő szakasza volt. Az átfedő tartományban a két függvény érvényességi határát a függvények grafikonja alapján szubjektív, vizuális úton határoztuk meg. A két függvény síma csatlakozása a polinom-illesztés tartománya felső határának változtatásával jóval hibahatáron belül biztosítható.

## 3.3. A relatív hatásfok-függvény abszolútizálása

A relatív hatásfok-energia függvény egy, vagy néhány energiánál mért abszolút hatásfok segítségével abszolútizálható. Erre pl. lehetőséget adnak a kalibrált pontszerű standardok. A 4. ábrán feltüntetett faktorról a pontszerű forrással mért hatásfokokat átszámolhatjuk 19 mm átmérőjű kiterjedt forrásra vonatkozó hatásfokra. (Ez a faktor a 3. ábra alapján tetszőlegesen,  $\cong$  30 mm átmérőjű kiterjedt forrásra



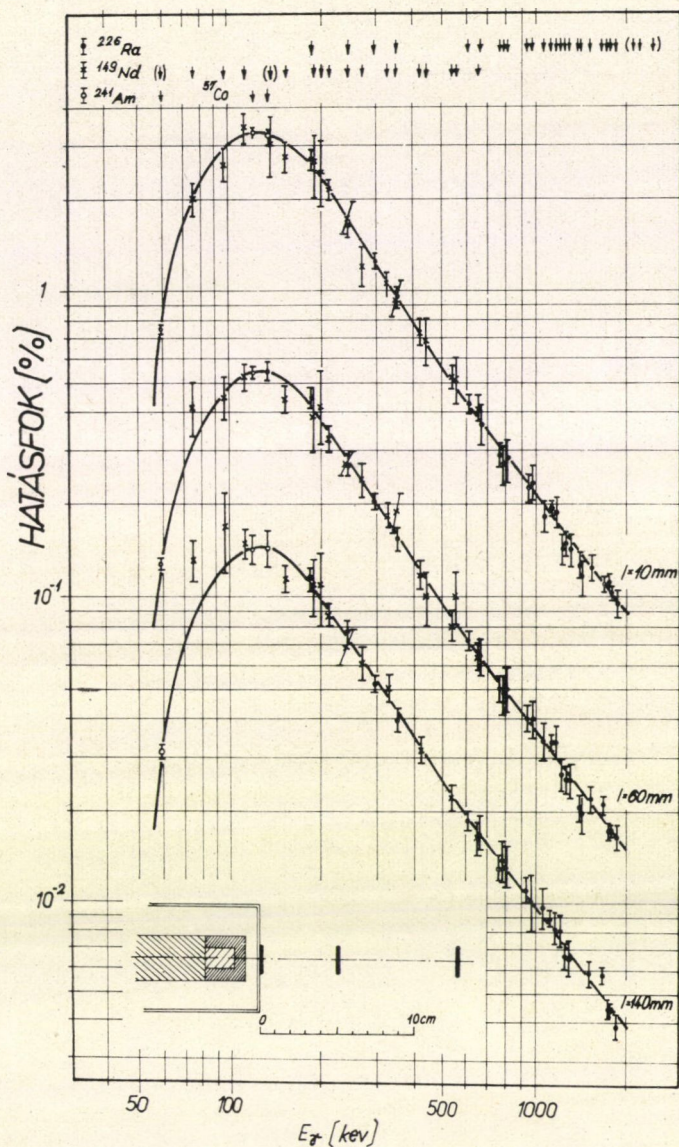


6. ábra. Természetes izotópposztételű Nd 14 MeV-es neutronokkal történt besugárzásával előállított forrás spektruma (0,5 keV/ csatorna, 10 keV levágás)

meghatározható). Magunk is készíthetünk kiterjedt standard forrást valamilyen kis specifikus aktivitású izotópból, melynek aktivitása tömegméréssel meghatározható. Abszolútizáló standardként természetesen olyan izotóp használható, melynek felezési ideje és valamelyik gamma-vonalának abszolút hozama 1–2% pontossággal ismert.

A 7. ábrán látható hatásfok-görbéket a Nemzetközi Atomenergia Ügynökség standardjaival abszolútizáltuk. Abszolútizálásra csak a 200 keV energia fölötti vonalakat használtuk ( $^{203}\text{Hg}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{88}\text{Y}$ ), mivel ezek a hatásfok-görbe analitikusan jobban leírható relatív menetű (hatványfüggvény) szakaszára esnek, valamint azért, mert ezeknél a pontforrás — kiterjedt forrás korrekció kisebb. Az abszo-





7. ábra. A Ge(Li) detektor abszolút hatásfoka a  $\gamma$ -energia függvényében három különböző forrás-detektor távolság esetén, 19 mm átmérőjű forrásra



lútitizálásra magunk is készítettünk egy 19 mm átmérőjű  $^{235}\text{U}$ -ban 92,3%-ra dúsított,  $24 \text{ mg/cm}^2$  vastag  $\text{U}_3\text{O}_8$  forrást, melynek specifikus aktivitását tömegméréssel 0,2% pontossággal tudtuk megadni. (Az  $^{235}\text{U}$  specifikus aktivitásra [9] alapján

$$4798,1 \pm 3,3 \text{ bomlás/min/mg}^{235}\text{U},$$

a 185,7 keV-es vonal abszolút intenzitására [13] alapján 54% értéket fogadtunk el.) Az  $^{235}\text{U}$  legintenzívebb, 185,7 keV-es vonala abszolút intenzitásának pontossága valószínűleg megközelíti a standard forrásokét, így egy ponton az előbbiektől független abszolútizálásra nyílik lehetőség. A kiterjedt  $^{235}\text{U}$ -forrással 185,7 keV-re kapott abszolút hatások 3%-on belül egyezik a kiterjedtre korrigált pontszerű standard forrásokkal abszolútizált hatások függvény ugyanezen energiánál felvett értékével.

### 3.4. Eredmények; a hatások változása a forrás-detektor távolsággal

A detektor hatásokát 19 mm átmérőjű forrásra három különböző forrás-detektor távolság mellett mértük meg: a forrás a Ge(Li) kriosztát felületén ( $l=10 \text{ mm}$ ), tőle 50 mm ( $l=60 \text{ mm}$ ), ill. 130 mm ( $l=140 \text{ mm}$ ) távolságra (7. ábra).

A mérések minden geometriában azt mutatták, hogy a  $^{149}\text{Nd}$  59 keV-es vonalával meghatározott hatások kb. kettes faktorral nagyobb, mint a  $^{241}\text{Am}$  forrással (19 mm-es forrásra átszámítva) ugyanitt kapott érték. Ez azt jelzi, hogy a  $^{149}\text{Nd}$  59 keV-es vonalának intenzitása az irodalomban erősen alábecsült, ezért 59 keV-nél a Nd vonal helyett az Am vonalával mért abszolút hatásokat használtuk. Hogy a polinommal leírható függvény menetét a maximum környékére — ahol a  $^{149}\text{Nd}$  vonalai meglehetősen ritkák — biztosabbá tegyük, az abszolútizálás után az  $^{241}\text{Am}$  59 keV-es vonalán kívül a  $^{57}\text{Co}$  standard forrással mért két abszolút hatásértéket (122 és 136,5 keV-nél) is bevettük az adatok közé.

A mérések abszolútizálását az  $l=60 \text{ mm}$  forrás-detektor távolsághoz tartozó geometriában végeztük el (a standard források aktivitása itt tette legkedvezőbbé a mérést). Ennek alapján meghatároztuk a  $^{226}\text{Ra}$  forrás abszolút aktivitását, s a többi geometriában ezzel közvetlenül abszolút hatásokat határoztunk meg. A  $^{235}\text{U}$  forrással  $l=10 \text{ mm}$  forrás-detektor távolságnál mértünk abszolút hatásokat.

A hatások relatív energiafüggésében kétféle változás figyelhető meg a forrás-detektortávolság csökkenésével:

a) A polinom tartományában a maximum a forrás-detektor távolság csökkenésével nagyobb energiák felé tolódik el.

b) A hatványfüggvény tartományában a másodfokú járulék egyre nagyobb a forrás-detektor távolság csökkenésével. Ez úgy jelentkezik, hogy a relatív menet közelítőleg független a forrás-detektor távolságtól az 500–1000 keV energia-intervallumon, míg 200–500 keV között a relatív energiafüggés meredekebbé, 1000–2000 keV között laposabbá válik, ha a forrás-detektor távolság csökken. A változás nagysága  $l=130 \text{ mm}$  és  $l=10 \text{ mm}$  forrás-detektor távolságok között 200–500 keV energiaintervallumon kb. 10%, 1000–2000 keV energiaintervallumon kb. 5%.

Az a) szerinti maximum-eltolódás oka nyilvánvalóan az, hogy a forrás közelítésével a forrás-detektor tengelyével egyre nagyobb szöget bezáró irányokban is detektálunk, így a detektor ablak átlagos vastagsága nő, az ablakabszorpció adott



energiánál egyre nagyobb, és egyre nagyobb energiánál jelentkeznek. A 200 keV fölötti relatív hatásfok b)-ben leírt változására kielégítő magyarázatot adni nem tudunk, feltehetően szintén a detektálási térszög változásának — és ezzel együtt a detektor szélein bekövetkező átlagos detektor-vastagság változásnak — következménye.

### 3.5. Kiegészítő mérések, további javaslatok

Mivel a hatásfok-energia görbe maximuma 100—160 keV között van, a görbe alakjának meghatározása szempontjából nagyon szerencsétlen körülmény, hogy a  $^{149}\text{Nd}$  forrásnak épp ezen az energia intervallumon nincs elegendő vonala és a mérések további kiegészítésre szorulnak.

A Ra+Nd mérések kiegészítésére különösen alkalmas lenne  $^{177\text{m}}\text{Lu}$  ( $T_{1/2} = 155$  nap) forrás, melynek a 100—160 keV energia intervallumban 7 intenzív vonala van, 200—450 keV közötti számos vonala pedig a normálást biztosítja. A jövőben a  $^{57}\text{Co}$  pontforrás helyett ilyen forrással kívánjuk méréseinket kiegészíteni.

Célszerű továbbá  $^{150}\text{Nd}$ -ban dúsított mintát használni a  $^{149}\text{Nd}$  forrás készítéséhez, mivel ez esetben a spektrum tisztább (az idegen vonalak intenzitása csökken), valamint vékonyabb forrás biztosít kellő aktivitást, s ezáltal az önabszorpció korrekció csökkenthető.

Kíváncsi lennénk a  $^{226}\text{Ra}$  és bomlástermékei, a  $^{149}\text{Nd}$  és a  $^{177\text{m}}\text{Lu}$  gamma-hozamai-  
nak az eddigieknél pontosabb meghatározása.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönjük Dr. Csikai Gyula professzornak munkánk iránti állandó érdeklődését, a vele folytatott hasznos diskusziókat, munkánk támogatását.

Köszönetet mondunk Dr. Imre Lajos professzornak (KLTE Izotóp Laboratóriuma) a  $\text{BaSO}_4$  ( $\text{RaSO}_4$ ) elegykristály készítéséért és tisztításáért, Jékel Pál és Rochlitz Szilveszter tudományos munkatársaknak (KLTE Számoló Központ) a programok javítása során nyújtott hasznos tanácsaikért, a Számoló Központ dolgozóinak a gondos futtatásokért, Dr. Scharbert Tibor adjunktusnak az elektronikus berendezések üzemeltetésében nyújtott segítségéért.

Köszönet illeti Mikó Sándor és Árvay Zoltán fizikus hallgatókat a spektrumok kiértékelésében való közreműködésért.

## IRODALOM

1. P. Quittner, Gamma-ray Spectroscopy. Akadémiai Kiadó Bp. 1972.
2. M. J. Martin, P. H. Blichert-Toft, Nuclear Data Tables A8 1970. 1.
3. Б. М. Сабиров, Я. Я. Урданец, К. Я. Громов, препринт ОИЯИ, Дубна, 6—4372, 1969.
4. E. Storm, H. I. Israel, Nuclear Data Tables A7, 1970. 565.
5. R. G. Helmer, L. D. McIsaac, Phys. Rev. 143, 923, 1966.
6. E. B. Nieschmidt, V. R. Potnis, L. D. Ellsworth, C. E. Mandeville, Nucl. Phys. 72 236, 1965.
7. D. B. Fossan, L. F. Chase Jr, K. L. Coop, Phys. Rev. 140, B1., 1965.
8. K. P. Gopinathan, R. M. Singru, Phys. Rev. 150, 985, 1966.
9. A. H. Jaffey, K. F. Flynn, L. E. Glendin, W. C. Bentley, A. M. Essling, Phys. Rev. C4, 1889, 1971.
10. B. L. Van der Waerden, Mathematische Statistik. Springer, Berlin, 1965.
11. L. Sachs, Statistische Auswertungsmethoden. Springer, Berlin, 1969.
12. A. Ralston, Bevezetés a numerikus analízisbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.
13. A. Artna—Cohen, Nuclear Data Sheets 6, 287, 1971.



### Függelék

#### *A hatásfok-energia függvények illesztése*

Az  $E_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\sigma_i$ , ( $i=1, 2, \dots, N$ ) mérési adatokra — ahol  $\varepsilon_i$  az  $E_i$  energiánál mért hatásfok, aminek  $\sigma_i$  a hibája — az  $\varepsilon(E)$  függvényt a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével illeszthetjük a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (\varepsilon(E_i) - \varepsilon_i)^2 \quad (3)$$

mennyiség minimalizálásával. Ha a függvény az  $a_0, a_1, \dots, a_L$  paraméterekkel adható meg, a minimalizálás az

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, L) \quad (4)$$

egyenletrendszerhez vezet.

Az illesztés hibáját a

$$df = \sqrt{\frac{\chi^2}{(N-L-1) \sum_{i=1}^N 1/\sigma_i^2}}$$

összefüggés adja.

#### a) *Hatványfüggvény*

A (2) függvény az illesztés szempontjából kedvezőbb alakra hozható:

$$\ln \varepsilon = A + B \cdot \ln E + C \cdot \ln^2 E, \quad (5)$$

ahol a két függvény paraméterei közötti összefüggés:

$$\left. \begin{aligned} A &= b \cdot a + c \cdot a^2 \\ B &= -b - 2 \cdot c \cdot a \\ C &= c \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Az (5) összefüggésből kifejezve a hatásfokot:

$$\varepsilon = \exp(A + B \cdot \ln E + C \cdot \ln^2 E) \quad (7)$$

A (7) függvény illesztésére alkalmazva a legkisebb négyzetek módszerét, a (4) egyenletrendszer transzcendens, míg az (5) függvény esetén lineáris. A transzcendens egyenletrendszer Newton-féle iterációs módszerrel oldható meg, a „logaritmikus illesztés” lineáris egyenletrendszerének megoldását az iterációhoz kezdő értéként használva.

A (7) függvény  $A$ ,  $B$  és  $C$  paramétereiből a (6) összefüggésekkel megadhatók a (2) függvény  $b$ ,  $c$  és  $E_0$  paraméterei, melyek a függvény alakjára szemléletesebben jellemzőek ( $b$  és  $c$  írja le a hatásfok függvény relatív menetét,  $E_0$  pedig az abszolút hatásfokra jellemző: az az energia, ahol a hatásfok egységnyi).

A paraméterek hibája a legkisebb négyzetek módszerénél szokásos módon [10], a (4) egyenletrendszer mátrixa inverzének diagonális elemeivel adható meg.



b) *Polinom*

Az „optimális fokszámú” polinomtól azt várjuk, hogy a mért adatok átlagos tendenciáját jól leírja, de ne legyen olyan magas fokszámú, hogy a mérési hibák miatti statisztikus ingadozásokat is kövesse (az illesztés „simítsa ki” a statisztikus ingadozásokat). Az illeszkedést a (3) összefüggés szerinti  $\chi^2$  (az illesztett függvény paramétereivel számolva) jellemzi kvantitatíve.  $N$  mérési adat és  $L+1$  paraméter esetén ez egy  $N-L-1$  szabadsági fokú  $\chi^2$  eloszlás, melynek várható értéke táblázatokban (pl. [11]) megtalálható, jó közelítéssel megegyezik a szabadsági fokkal.

Az illesztett polinom fokszámát eggyel növelve a  $\chi^2$  csökkenése az optimális fokszám alatt egyenél nagyobb, fölötte kisebb, ami lehetővé teszi az optimális fokszám meghatározását.

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^L a_j E^j \quad (8)$$

alakú polinom illesztésére alkalmazva a legkisebb négyzetek módszerét, a (4) egyenletrendszer lineáris, de  $L$  növelésével (optimális fokszám meghatározása) az újabb egyenletrendszer független az előzőtől, új egyenletrendszert kell megoldani. Ha azonban az illesztendő  $L$ -ed fokú polinomot az  $E_i$  diszkrét pontsorozaton ortogonális  $p(E)$  polinomok lineáris kombinációjával állítjuk elő az

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^L b_j^{(L)} \cdot p_j(E) \quad (9)$$

összefüggés szerint [12] — ahol  $p_j(E)$   $j$ -ed fokú polinom —, akkor  $b_j^{(L)} = b_j^{(L+1)}$ , tehát  $L$  növelésével egyetlen új egyismeretlenes lineáris egyenletet kell megoldani a  $b_{L+1}^{(L+1)}$ -re:

$$b_k = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \varepsilon_i \cdot p_k(E_i)}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (p_k(E_i))^2} \quad (10)$$

A diszkrét pontsorozaton  $1/\sigma_i^2$  súlyokkal ortogonális polinomok rekurziós formulákkal állíthatók elő:

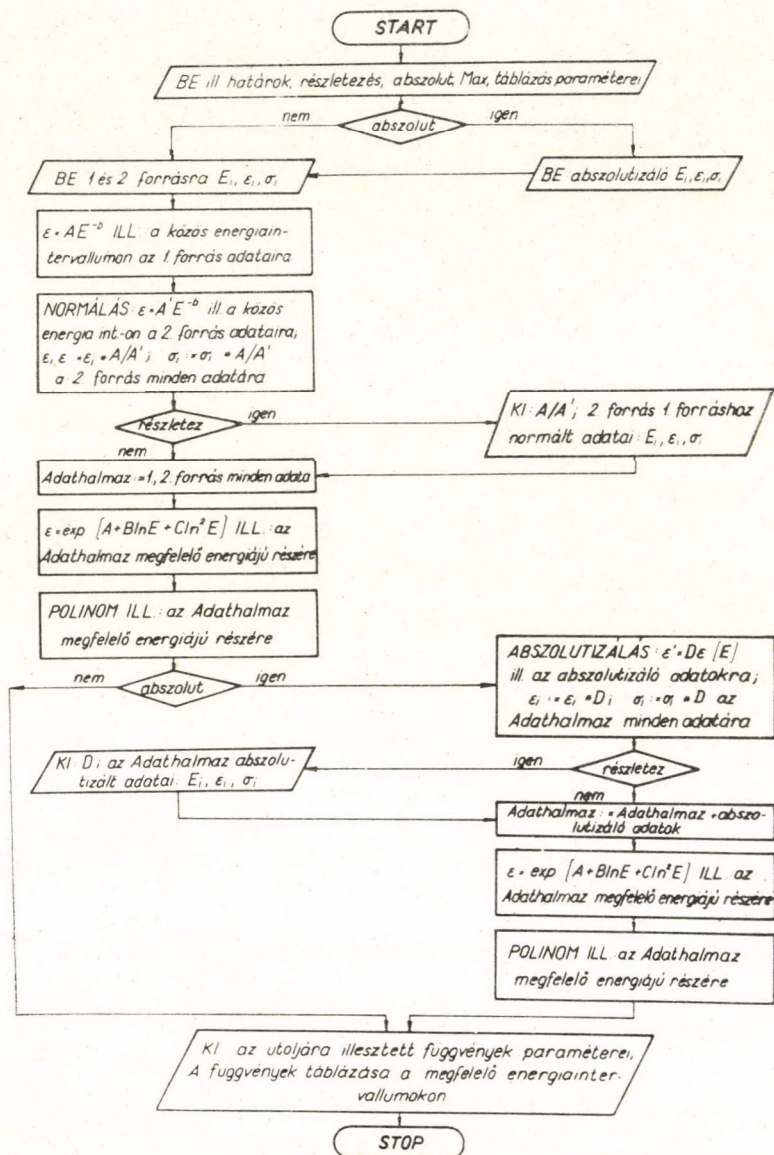
$$\left. \begin{aligned} p_{-1}(E) &= 0 \quad p_0(E) = 1 \\ p_{k+1}(E) &= (E - \alpha_{k+1}) \cdot p_k(E) - \beta_k \cdot p_{k-1}(E) \\ \text{ahol} \\ \alpha_{k+1} &= \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (p_k(E_i))^2 \cdot E_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (p_k(E_i))^2}; \quad \beta_k = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (p_k(E_i))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (p_{k-1}(E_i))^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

A (8) és (9) összefüggések összevetéséből megadhatók az illesztett polinom  $a_j$  együtthatói is.



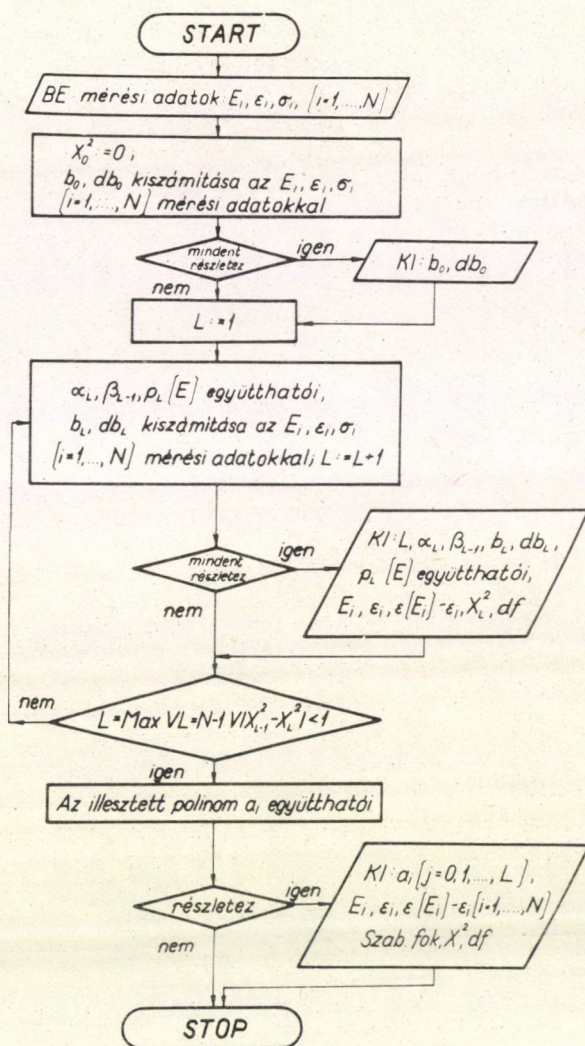
## c) Az illesztő program

A hatásfok görbe illesztésére a fentebb ismertetett függvényalakok felhasználásával, a  $^{226}\text{Ra}$ , illetve  $^{149}\text{Nd}$  (esetleg egyéb) forrásokkal mért adatok összenormálására, a görbe „abszolútizálására” ALGOL programot írtunk. A program a felsorolt



1. folyamatábra





2. folyamatábra

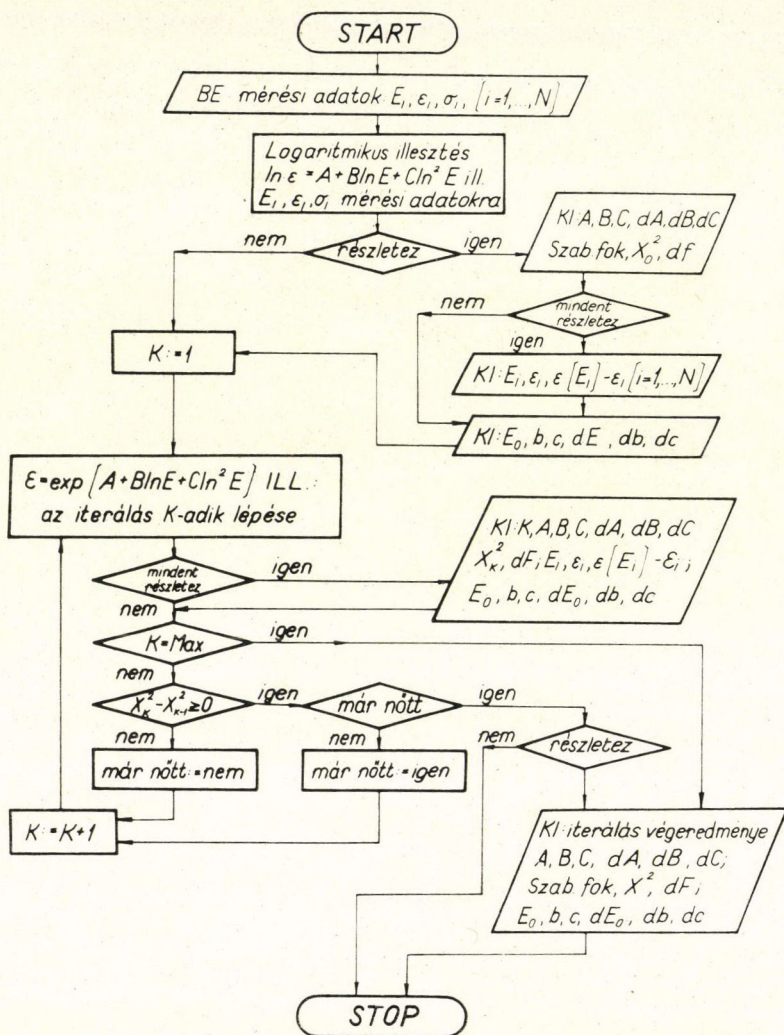
feladatokat automatikusan végzi el és végül szolgáltatja az optimális fokszámú polinom és a (7), illetve (2) szerinti hatványfüggvény paramétereit, illetve letáblázza a függvényeket az energia függvényében.

A mérési adatokon kívül adatszagról kell megadni a polinom, illetve hatványfüggvény illesztés energiatartományát; azt, hogy lesz-e abszolútizálás (ha igen, akkor az abszolút hatásfokra vonatkozó mérési adatokat is); az iterációs lépések maximális számát illetve a polinom maximális fokszámát (Max.); a függvény táblázás paramétereit (lépésköz, kiírási forma); valamint a közbenső kiírások részletességét. Ez utóbbi három különböző mélységig történhet:



- csak a végleges függvények paramétereit és táblázatait írja ki a program;
- „részletez”: minden egyes részfolyamat után kiírja az illesztett függvény paramétereit, eltéréseit a mért adatoktól, „normált” és „abszolútizált” mérési adatokat;
- „mindent részletez”: ez esetben kiírja az egyes iterációs lépések eredményét, illetve az optimális fokszám keresésénél illesztett minden (növekvő fokszámú) polinom paramétereit és eltérését a mért adatoktól.

A program felépítését vázlatosan szemlélteti az 1. folyamatábra; a polinom illesztés, illetve hatványfüggvény illesztés eljárásait a 2., ill. 3. folyamatábra.



3. folyamatábra



# A LAMB ELTOLÓDÁS PROTONSZERKEZETI KORREKCIÓJA\*

GAJZÁGÓ ÉVA

Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Atomfizikai Tanszék.

## TARTALOM

Bevezetés .....	339
1.§. Történeti áttekintés. — A polarizálhatósági járulékok becslése egy nem relativisztikus modellben .....	342
2.§. Relativisztikus kötött állapotok és a Bethe—Salpeter egyenlet. Perturbációs számítás ...	351
3.§. A proton dinamikus szerkezetére vonatkozó kísérleti információk. (A proton szerkezeti függvényei) .....	356
4.§. A H-atom Lamb eltolódásának protonszerkezeti korrekciója .....	362
4.§.a) A proton polarizálhatóság járulása a nívóeltolódáshoz .....	362
4.§.b) Cottingham transzformáció és diszperziós relációk .....	368
4.§.c) A virtuális Compton amplitudóban fellépő fix pólussal kapcsolatos problémák ...	371
4.§.d) Numerikus eredmények .....	375
5.§. Az eredmények alkalmazása müon-hidrogénre .....	381
FÜGGELÉK .....	384
A) Jelölések és definíciók .....	384
B) A Bethe—Salpeter hullámfüggvények tulajdonságai .....	386
Perturbációs számítás .....	388
Irodalom .....	389

## Bevezetés

A hidrogén-atom színképének Dirac-féle finomszerkezet képlete:

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^3} \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) + \dots \right],$$

egészen 1947-ig minden spektroszkópiai megfigyeléssel teljes összhangban állt, s egyúttal a Dirac-egyenlet legfőbb kísérleti igazolását is szolgáltatta. Később a Lamb—Retherford-mérés, (1947) arra utalt, hogy a fenti finomszerkezettől kis eltérések mutatkoznak: a  $2S_{1/2}$  szint kissé a  $2P_{1/2}$  szint fölé emelkedik (míg a Dirac-elméletben ezek a nívók egybeesnek):

$$E(2S_{1/2}) - E(2P_{1/2}) = (1,05777 \pm 0,00010) \cdot 10^3 \text{ MHz.}$$

Ez a *Lamb-eltolódás*, melynek elméleti magyarázatát csak a kvantumelektrodinamika volt képes megadni. (L. 1.§.)

A Lamb-eltolódás pontos mérése, és ennek összehasonlítása az elméleti értékkel mindmáig az elmélet egyik legmeggyőzőbb bizonyítéka.

\*Érkezett 1973. V. 17. Egyetemi doktori disszertáció



A kvantumelektrodinamika érvényességét széles tartományban — egészen 10 GeV energiáig — igazolja a tapasztalat. De egészen nagy energiákon mégsem áll módunkban az elektromágneses folyamatok pontos elméleti leírása: ennek az oka, hogy ekkor már az átmenetek részben közbelső hadronállapotokon át változnak meg. Az ilyen hadronikus korrekciók  $\sim 10$  GeV energiánál kezdenek számottevőbb szerepet játszani. Ez persze nem jelenti azt, hogy a kvantumelektrodinamika itt „elromlik”: a hadronikus korrekciók figyelembevétele és számítása már a hadronfizika feladata.

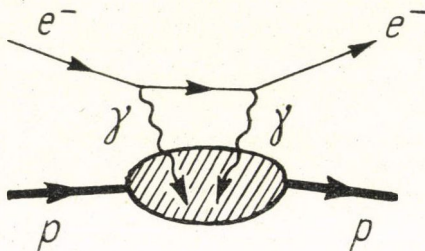
Vannak olyan határterületek, ahol a kvantumelektrodinamika és a hadronfizika találkozik. Ilyen terület például a nagyenergiás folyamatok hatása az atomi energiaszintek eltolódásaira. A hidrogén-atom színképét — számos más folyamat mellett — a proton sztatikus és dinamikus tulajdonságai is módosítják (pl. a proton véges kiterjedése, töltéeloszlása, elektromos és mágneses polarizálhatósága). Ezek a tulajdonságok hatással vannak mind a hiperfinomszerkezetre, mind a Lamb-eltolódás értékére. Ez utóbbi esetén a jelenlegi kísérleti és elméleti érték teljes összhangban áll:

elmélet:  $1057,911 \pm 0,012$  MHz (12 ppm),

kísérlet:  $1057,900 \pm 0,060$  MHz ( $\sim 50$  ppm),

ami azt sugallja, hogy a proton dinamikus tulajdonságainak hatása — ami a fenti elméleti értékben nem szerepel — igen csekély kell legyen. A disszertáció célja éppen ennek a járuléknak a meghatározása.

A H-atomot Bethe—Salpeter egyenlettel írva le (1.2.§), a polarizálhatósági járulék a következő irreducibilis magfüggvény figyelembevételét jelenti:



Szemléletesen szólva, ez a folyamat a proton dinamikus tulajdonságaira érzékeny: a második fotonszonda az első által „megzavart”, megváltozott protonállapotot érzékeli.

Könnyen látható, hogy ez a járulék olyan integrálokkal fejezhető ki, melyek a proton spinfüggetlen szerkezeti függvényeit tartalmazzák, integrálva a teljes kinematikai tartományra. Azt várjuk, hogy végülis ezek az integrálok eredőben kis járulékot adnak, de nem lehetünk teljesen biztosak ebben. Hasonló kifejezések pl. a proton-neutron tömegkülönbség számítása során divergenciákra vezettek. A disszertáció célja éppen annak megvizsgálása, hogy nem lépnek-e fel itt is hasonló nehézségek.

Egy további kérdés lehet a polarizálhatósági járulék meghatározása más hidrogén-szerű atomok, pl. müon-hidrogén esetére. A müon-hidrogén választását az indokolja, hogy ez — a müon nagyobb tömege, ill. kisebb Bohr-sugara miatt —



jóval érzékenyebb lehet a fenti effektusra, és ezért várható, hogy szemben a hidrogén-atommal, itt mérhető korrekciót kapunk.

A müon-hidrogén esete egy további szempontból is érdekes lehet. Ha ugyanis létezik egy anomális müon-hadron kölcsönhatás — ami csak egészen nagy energiáknál várható — ez számottevően befolyásolhatja a müon-hidrogén spektrumát. Ha jól ismerjük a magasabbrendű elektromágneses korrekciókat — és ezért is fontos a kétfoton-cserés gráf járulékanak meghatározása —, és ezekkel nem magyarázható anomáliákra bukkanunk a müon-hidrogén spektrumában, ez utalás lehet egy ilyen anomális müon-proton kölcsönhatás létezésére.

A disszertáció felépítése a következő:

Az 1. §-ban áttekintjük a Lamb-eltolódáshoz járulékot adó főbb folyamatokat, majd egy nem-relativisztikus modellben megbecsüljük a polarizálhatósági járulék várható értékét.

A 2. és 3. § összefoglaló jellegű: összefoglalja a H-atom Bethe—Salpeter-egyenlettel való leírását, és a mélyen rugalmatlan elektron-proton szórás főbb kísérleti eredményeit, a szerkezeti függvények szemléletes jelentését, ill. ezek kapcsolatát a proton elektromos és mágneses polarizálhatóságával.

A 4.§ tartalmazza a polarizálhatósági járulék meghatározását H-atomra. Látni fogjuk, hogy nagy járulékot a valódi, ill. kistömegű virtuális fotonok cseréje ad,  $v < 1$  GeV laboratóriumi fotonenergiák esetén. Ez a tény egyrészt azt indokolja, hogy az 1. §-ban tárgyalt nem-relativisztikus modell — melyről feltehető, hogy a rezonanciatartományt viszonylag hűen írja le — miért ad a valódi értékkel igen jól egyező becslést. Másrészt érthetővé teszi, hogy az eredmény végül a proton dinamikus polarizálhatóságával lesz arányos, melyre alacsonyenergiás tételek felhasználásával a következő összesszabály érvényes:

$$\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{v_t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \sigma_T(v),$$

ahol  $\sigma_T(v)$  a fotoabszorpció teljes hatáskeresztmetszete (valódi fotonokra) a laboratóriumi fotonenergia függvényében,  $\alpha_{\text{pol}}$  és  $\beta_{\text{pol}}$  a proton elektromos és mágneses polarizálhatósága.

A Lamb-eltolódás protonszerkezeti korrekciójának numerikus számítása során divergencia problémák nem lépnek fel. Ez azzal indokolható, hogy a két foton és egy elektron propagátor miatt,  $\Delta E \sim \int \frac{d^4 q}{q^6}$ , míg a tömegkülönbség esetében:

$\Delta M \sim \int \frac{d^4 q}{q^2}$ . Másrészt érdekes, hogy szemben a hiperfinomszerkezet megfelelő korrekciójának számításával, itt a lepton-tömeg nem hanyagolható el, az  $m_l = 0$  helyettesítés infra-divergenciákra vezetne.

A numerikus érték H-atomra  $\sim 0,05$  ppm, ami elhanyagolhatóan kicsiny, akár az elmélet (12 ppm), akár a kísérlet (50 ppm) pontosságával vetjük össze.

A müon-hidrogén esetében (5. §), a müon-elektron univerzalitás felhasználásával az eredmény könnyen megkapható. A mérés pontosságának a müon instabilitása (ill. a nagy nívószelesség) szab elvi korlátot ( $\sim 100$  ppm). Az eredmény (85 ppm) ezzel nagyságrendileg összemérhető.

Végül, egy konkrét modellben kísérletet teszünk annak megbecslésére, hogy egy anomális müon-proton kölcsönhatás milyen anomáliákra vezethet a müon-hidrogén



spektrumában. Ha ugyanis a müon és a proton kicserélhet egy  $M_X$  tömegű, semleges, skalár hadront, amely  $g_{\mu X}$ , ill.  $g_{pX}$  erősséggel csatolódik ezekhez, akkor ennek a folyamatnak a járuléka a Lamb-eltolódáshoz:

$$\left| \frac{\Delta E_X}{\Delta E_{2\gamma}} \right| = \frac{16\pi}{5} \cdot \frac{g_{\mu X} \cdot g_{pX}}{e^2} \cdot \left( \frac{M}{m_\mu} \right) \left( \frac{M^2}{M_X^2} \right)$$

-szerese a kétfrontcsérés járuléknak. Az ismeretlen  $X$  hadron tömegére és csatolási állandóira vonatkozó — meglehetősen bizonytalan — kísérleti adatok és elméleti megfontolások megengedhetik, hogy ez a faktor akár 10—50 is legyen.

A kétfotoncsérés járulék meghatározása a müon-hidrogénre tehát azért is lényeges volt, mert egy esetleg fellépő viszonylag nagy anomáliából — ha már tudjuk, hogy azt magasabbrendű elektromágneses korrekciók nem magyarázhatják — egy újfajta kölcsönhatás (speciális müon-hadron kölcsönhatások) — fellépésére következtethetünk. Fordított esetben — ha ilyen anomáliát nem tapasztalunk — az eddigieknél jóval erősebb megszorításokat kaphatunk a feltételezett anomális müon-hadron kölcsönhatás paramétereire.

Végül köszönetet kell mondanom mindazoknak, akik munkámban segítettek: elsősorban *dr. Kuti Gyulának*, aki a témát felvetette és mindvégig figyelemmel kísérte. Neki és *dr. Marx György* egyetemi tanárnak hálával tartozom azért is, mert lehetővé tették, hogy a részecskefizikai csoport munkájába bekapcsolódjak.

Sok köszönettel tartozom még *dr. Frenkel Andornak* és *dr. Gnädig Péternek*, akik hasznos észrevételeikkel és értékes tanácsaikkal nagyban elősegítették a disszertáció elkészülését.

### 1. §. Történeti áttekintés. — A polirazálhatósági járulék becslése egy nem-relatívisztikus modellben

A Lamb-eltolódás első elméleti értelmezése Bethétől származik. Gondolatmenete a következő volt:

A Lamb-eltolódás az elektron és a sugárzási tér kölcsönhatásából ered. Szabad elektronra és a vele kölcsönhatásban álló sugárzási térre a Hamilton-operátor (nem-relatívisztikus közelítésben):

$$H = H_S + H_e + H'_{ey} = H_0 + H'_{ey}$$

$$H_S = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3x, \quad (1.1)$$

$$H_e = p^2/2m_0$$

$$H'_{ey} = -\frac{e}{m_0 c} \int F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{A}(\mathbf{x}') \mathbf{p} d^3x, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0$$

ahol  $F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  az elektron töltéseloszlás-függvénye.

A kölcsönhatási tag lehetővé teszi, hogy az elektron virtuálisan kibocsásson, majd újra elnyeljen egy fotont. E folyamat következtében fellépő energiaeltolódás



másodrendben:

$$\Delta E = \sum_{i \neq 0} \frac{\langle \Phi | H'_{e\gamma} | i \rangle \langle i | H'_{e\gamma} | \Phi \rangle}{E_0 - E_i} \quad (1.2)$$

ahol:

$$|\Phi\rangle = V^{-1/2} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \cdot |0\rangle,$$

$$|i\rangle = V^{-1/2} \cdot e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} |1\gamma\rangle.$$

Így az energiaeltolódásra

$$\Delta E^{(2)} \approx -\frac{p^2}{2m_0} \left[ \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \frac{3}{4\pi} \frac{\hbar}{m_0 c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \right] \quad (1.3)$$

adódik, tehát a sugárzási térrel kölcsönhatásban álló elektron teljes energiája:

$$E = E_0 + \Delta E^{(2)} = \frac{p^2}{2m_0} \left( 1 - \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar}{m_0 c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \right) = \frac{p^2}{2m_0} \left( 1 - \frac{\delta m}{m_0} \right),$$

ahol:

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar}{c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2. \quad (1.4)$$

$\delta m$ -ben felismerhetjük az elektron elektromágneses tömegét, amely a töltött részecske és a sugárzási tér kölcsönhatásából ered. Nincs olyan kísérlet, amely különbséget tudna tenni a részecske mechanikai ( $m_0$ ) és elektromágneses ( $\delta m$ ) eredetű tömegei között. Ezért fizikai realitással csak a kettő összege,  $(m_0 + \delta m) = m$ , a *megfigyelt*, véges fizikai tömeg rendelkezik. Ennyi a *szabad* elektron mérhető tömege, ezért a Hamilton-operátor (1.1) alatti alakját a következőképpen kell módosítani:

$$\begin{aligned} H &= H_S + p^2/2(m - \delta m) - e/(m - \delta m)c \cdot \int F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{A}(\mathbf{x}') \mathbf{p} d^3x' \approx \\ &\approx H_S + \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{mc} \int F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}') \mathbf{p} d^3x' + \frac{\delta m}{m} \frac{p^2}{2m} \\ H_0 &= \underbrace{H_e + H_S}_{\substack{\uparrow \\ \text{tömegrenormálási tag}}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

A hidrogén-atomban kötött elektronra:  $H_e = p^2/2m + V(\mathbf{x})$ ;  $\left( V(\mathbf{x}) = -\frac{e^2}{|\mathbf{x}|} \right)$ , az (1.5) alatti kölcsönhatás a következő szinteltolódást adja:

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \frac{2\alpha}{3\pi c^2 m^2} \sum_r |\langle n | \vec{p} | r \rangle|^2 (E_r - E_n) \log \frac{mc^2}{E_r - E_n} = \\ &= \frac{4c^2}{3\pi m^2} \alpha^2 \cdot |\psi_n(0)|^2 \cdot \log \frac{mc^2}{(\bar{E} - E_n)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ez az érték a H-atom első gerjesztett állapotára:

$$E(2S_{1/2}) - E(2P_{1/2}) = 1010 \text{ MHz.}$$

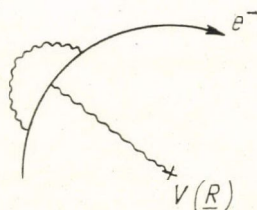


Tehát míg szabad elektron esetén a sugárzási térrel való kölcsönhatás egy megfigyelhetetlen tömegrenormálási tagban jelentkezett, addig kötött állapotban egy véges, megfigyelhető szinteltolódásra vezet. Ez a különbség szemléletesen azzal indokolható, hogy az atomban kötött elektron többféleképpen emíthet, ill. abszorbeálhat virtuális fotonokat mint a szabad részecske: kötött elektron esetén az elemi folyamatokban<sup>1</sup> — mivel a potenciálcentrum tetszőleges impulzust felvehet — az impulzusmegmaradás tételének az elektron és foton között nem kell teljesülnie.

A fenti nem-relativisztikus számítás és a benne felhasznált „tömegrenormálás” sikere (ez utóbbi gondolat egyébként Kramerstől (1947) származik), egy hatalmas fejlődés ösztönzőjévé vált. Megmutatta az utat, hogyan építhető ki a kvantum-elektrodinamika kovariáns és renormált elmélete.

A Bethe-féle számítás csak az első lépés volt, amit számos további, finomabb effektus figyelembevétele követett — mint pl. az elektron anomális mágneses momentumának és a vákuum-polarizációnak a hatása — az időközben kiépített kovariáns és renormált kvantumelektrodinamika eredményeinek felhasználásával. A most említett két effektus szemléletes magyarázata a következő:

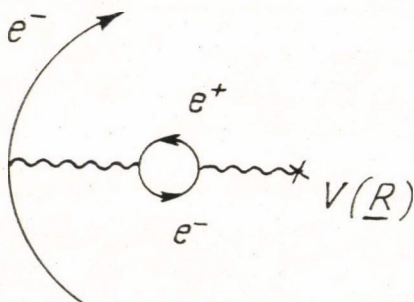
*Anomális mágneses momentum:*



Az elektront állandóan körülengő „fotonruha” a sztatikus töltés és mágneses momentum értékét módosítja.

$$\Delta E(2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = 68 \text{ MHz.}$$

*Vákuum-polarizáció:*



A virtuális fotonok által keltett  $e^+e^-$  párok fluktuáló elektromágneses teret hoznak létre, ami az atomi elektron által „látott” Coulomb-potenciált módosítja:

$$\Delta E(2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = -27 \text{ MHz.}$$



Lamb-shift járulékok ( $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ ) hidrogénben\*

Rend	Leírás és hivatkozások	Járulék, $\frac{\alpha}{\pi}(Z\alpha)^4 \frac{m}{6}$ egységekben	Számérték MHz-ben
$\alpha(Z\alpha)^4 m$	másodrendű saját-energia	$\left(-2\log(Z\alpha) + \frac{m}{M} + \frac{11}{24} - \log \frac{K_0(2, 0)}{K_0(2, 1)}\right) \left(1 - 3 \frac{m}{M}\right)$	1009,920
$\alpha(Z\alpha)^4 m$	másodrendű mágneses momentum	$\frac{1}{2} \left(1 - 2,75 \frac{m}{M}\right)$	67,720
$\alpha(Z\alpha)^4 m$	másodrendű vacuum polarizáció	$\frac{1}{5} \left(1 - 3 \frac{m}{M}\right)$	-27,084
$\alpha(Z\alpha)^5 m$	másodrendű kötés	$(Z\alpha)(3\pi) \left(1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \log^2 + \frac{5}{192}\right) \left(1 - 3 \frac{m}{M}\right)$	7,140
$\alpha(Z\alpha)^6 m$	negyedrendű kötés + magasabb rendek	$(Z\alpha^2)(a + b \log(Z\alpha)^2 + c \log^2(Z\alpha)^2) + (Z\alpha)^3 \pi \cdot 9,56$	-0,372
$\alpha^2(Z\alpha)^4 m$	negyedrendű saját-energia	$3 \frac{\alpha}{\pi} 0,470$	0,444
$\alpha^2(Z\alpha)^4 m$	negyedrendű mágneses momentum	$\frac{\alpha}{\pi} (-0,328)$	-0,102
$\alpha^2(Z\alpha)^4 m$	negyedrendű vacuum polarizáció	$\frac{\alpha}{\pi} \frac{41}{54}$	-0,239
$\alpha(Z\alpha)^4 \frac{Zm}{M} m$	visszalökődési járulék	$\frac{Zm}{M} (a_1 + b_1 \log(Z\alpha)^2)$	0,359
$\alpha(Z\alpha)^4 \left(\frac{mR_p}{e}\right)^2 m$	proton méret	$\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{mR_p}{e}\right)^2$	0,125
Összesen:			$1057,911 \pm 0,011$

A LAMB ELTOLÓDÁS PROTONSZERKEZETI KORREKCIÓJA

\* Ezt a táblázatot A. Peterman állította össze. A Bethe logaritmus értéke Schwartz és Thiemann becslése alapján  $\log K_0(2, 1)/K_0(2, 0)$ . A konstansok  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a_1$  és $b_1$  a következők:  $a = -\frac{4\pi^2}{3} - 4 - 4 \log^2 2 - 0,28 \pm 0,5$ ;  $b = \frac{55}{48} 4 \cdot \log^2$ ;  $c = -3/4$ ;  $b_1 = -1/4$ ;  $a_1 = 2 \cdot \log \frac{K_0(2, 1)}{K_0(2, 0)} + \frac{97}{12}$



Ez a három effektus — tömegrenormálás, anomális mágneses momentum, vákuum-polarizáció — adja a Lamb-eltolódás legszámottevőbb részét, összesen:  $\Delta E = 1051$  MHz-et.

További kisebb járulékok adódnak még a magasabbrendű sugárzási korrekciókból, a proton véges méretéből és tömegéből. Az I. táblázat tartalmazza ezen eredmények összefoglalását.

Összehasonlítva az elméleti értéket:

$$\Delta E = (1057,911 \pm 0,011) \text{ MHz}$$

a legújabb kísérleti eredménnyel (Robiscoe, 1970):

$$\Delta E = (1057,90 \pm 0,06) \text{ MHz}$$

az egyezés teljesen kielégítőnek mondható.

#### *A proton-polarizálhatósági járulék becslése egy nem-relativisztikus modellben*

Az eddig felsorolt számítások mindegyike csak a proton sztatikus tulajdonságait vette figyelembe, és számításon kívül hagyta a proton dinamikus tulajdonságainak — elektromos és mágneses polarizálhatóság — hatását az atomi szinteltolódásokra.

Egy félklasszikus képben a proton polarizálhatósága a következőképpen szemléltethető: a proton töltés és mágneses momentum eloszlása követni tudja a külső tér változásait — H-atomban a proton pillanatnyi töltés és mágneses momentum eloszlása „követi” a körülötte keringő elektron pályáját. Ha a proton teljesen polarizálható lenne, az eloszlás tökéletesen követni tudná az elektront, ennek következtében az elektron a protont pontszerűnek látná (de nem a pálya centrumában, hanem egy  $R$ =protonrádiusz sugarú koncentrikus körön keringve). Könnyű belátni, hogy ebben a határesetben a  $\delta$ =(véges méret+polarizálhatósági) járulék együttes hatására az atomi elektron energiája csökken. A másik határesetben — teljesen „merev” töltés és mágneses momentum eloszlás — a fenti  $\delta$  korrekció:  $\delta \equiv$  (véges méret korrekció). Innen az a következtetés adódik, hogy a polarizálhatósági járulék mindig úgy hat, hogy a véges méretből adódó járulékot csökkenti.

A H-atom Lamb-eltolódásának protonszerkezeti korrekciójának igen kicsinek kell lenni, ha meg akarjuk őrizni a kísérlet és elmélet között jelenleg fennálló szép összhangot.

Először vizsgáljuk a kérdést a protonszerkezet egy nem-relativisztikus modelljében! Nem célja ennek a számításnak a konkrét számértékek meghatározása, csupán egy nagyságrendi becslést kívánunk kapni arra, hogy milyen hatással van a proton összetett szerkezete az atomi szinteltolódásokra. Amennyire lehetséges, az eredményeket olyan paraméterekkel fejezzük ki, melyek függetlenek a modell részleteitől, és a proton megfigyelt tulajdonságait hűen tükrözik. (Ezt a modellt Drell és Sullivan [1] állította fel a proton-polarizálhatósági járulék becslésére hiperfinom szerkezet esetén.)

Két esetet fogunk vizsgálni, a H-atom ( $e^-p$ ) és a müon-hidrogén ( $\mu^-p$ ) problémáját. Ez utóbbi esetben u.i. — később részletesen kifejtendő indokok alapján (1.5. §) — azt várjuk, hogy a polarizálhatósági járulék számottevő, mérhető effektust okoz.

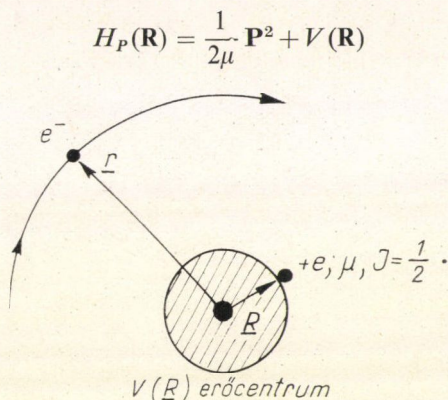


*Kvarkett-modell:*

A *proton* ebben a modellben egy  $+e$  töltésű,  $\mu$  tömegű, feles spinű részecskéből (kvarkett), és egy végtelen nehéz, semleges erőcentrumból áll. A kvarkettet egy nem-relativisztikus  $V(\mathbf{R})$  potenciál köti a centrumhoz, míg az elektront (műont) Coulomb-potenciál köti ehhez a „fizikai protonhoz”. A teljes rendszer Hamilton operátora:

$$H = H_P(\mathbf{R}) + H_e(\mathbf{r}) + H_C(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + H_M(\mathbf{r}, \mathbf{R})$$

ahol:  $H_P(\mathbf{R})$  a kvarkett Hamilton-operátora



$H_e(\mathbf{r})$  Dirac Hamilton-operátor a H-atomban kötött elektronra:

$$H_e(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta \cdot m - \alpha \frac{1}{r}.$$

$H_C$  = a sztatikus elektron-kvarkett Coulomb-kölcsönhatás:

$$H_C(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\alpha \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{1}{r} \right).$$

és  $H_M$  az elektron mágneses momentumának és a proton mágneses terének kölcsönhatását írja le:

$$H_M(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \alpha \cdot \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$$

ahol  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  az elektron által látott vektorpotenciál:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{\kappa}{2\mu} \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \times \boldsymbol{\sigma}_q + \frac{\vec{V}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\vec{V}(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|},$$

ill.  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{V}$ -ben szimmetrizálva:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{\mu_p}{2M} \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \times \boldsymbol{\sigma}_q + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \vec{V} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{R}, \mathbf{V}).$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \operatorname{div}_{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0.$$



Tekintsük perturbálatlan Hamilton-operátornak a  $H_0 = H_p + H_e$ , kölcsönhatási tagnak a  $H' = H_C + H_M$  operátort!

Ilyen felbontás mellett a perturbálatlan Hamilton-operátor sajátértékei és sajátfüggvényei ismertek:

$$H_e \psi_{n\pm}(\mathbf{r}) = E_{n\pm} \psi_{n\pm}(\mathbf{r}) \quad n\pm = 0, 1, 2, \dots$$

$$H_p \cdot \Phi_A(\mathbf{R}) = W_A \cdot \Phi_A(\mathbf{R}) \quad A = 0, 1, 2, \dots$$

ahol  $\psi_{n\pm}$  Dirac-bispinorok Coulomb-térben,  $\Phi_A$  kvarkett-spinorok a  $V(\mathbf{R})$  potenciálban. Kölcsönhatásmentes esetben a  $H_0$  megoldások egyszerűen szorzatalakúak, tehát:

$$H_0 \Psi_{A,n\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E_{A,n\pm} \Psi_{A,n\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$$

ahol:

$$\Psi_{A,n\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Phi_A(\mathbf{R}) \psi_{n\pm}(\mathbf{r}), \quad \text{és} \quad E_{A,n\pm} = W_A + E_{n\pm}.$$

*Véges méret korrekció:*

A perturbációszámítás első közelítésében a kötött állapot energiájához — spinre átlagolva — csak a Coulomb-kölcsönhatás ad járulékot. Foglalkozzunk az elektron  $n=2$  főkvantumszámú kötött állapotával!

$$\begin{aligned} 2\pi v_1^C &= \langle 2, 0 | H_C | 2, 0 \rangle = \alpha \langle 2, 0 | \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} \right) | 0, 2 \rangle = \\ &= \int d^3 R \Phi_0^+(\mathbf{R}) \cdot \alpha \cdot F(\mathbf{R}) \Phi_0(\mathbf{R}) = \alpha \cdot \langle F(\mathbf{R}) \rangle_0. \end{aligned}$$

ahol:

$$F(\mathbf{R}) = \int \psi_2^+(\mathbf{r}) \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} \right] \psi_2(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{2\pi}{3} |\psi_2(0)|^2 \cdot R^2.$$

Így:

$$v_1^C = \frac{\alpha}{3} |\psi_2(0)|^2 \cdot \langle R^2 \rangle_0,$$

ahol:

$$\langle R^2 \rangle_0 = \int d^3 R \cdot \Phi_0^+(\mathbf{R}) \cdot R^2 \cdot \Phi_0(\mathbf{R})$$

a kvarkett pályasugár négyzetének várható értéke a kvarkett alapállapotában.

A fenti kifejezés akkor adja vissza helyesen az irodalomból ismert „véges méret korrekció” numerikus értékét, ha:  $\langle R^2 \rangle_0 \sim 10^{-4} \cdot \text{MeV}^{-2}$ , azaz a pályasugár  $\sim 2F$ .

*Másodrendű járulékok:*

A perturbációszámítás másodrendjében 3 eset lehetséges:

- a) a perturbáció másodrendű a Coulomb-kölcsönhatásban  $(v_2^{CC})$
- b) a perturbáció másodrendű a mágneses kölcsönhatásban  $(v_2^{MM})$
- c) „kevert” másodrendű (kereszttagok  $\sim H_C \cdot H_M$ ).  $(v_2^{CM})$



A másodrendű perturbációkat a következő képlet adja meg:

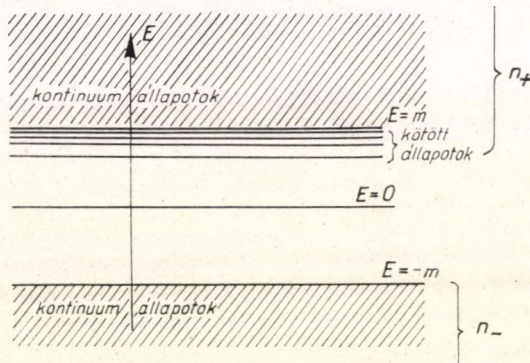
$$2\pi v_2 = \sum_{\substack{A, n_+ \\ n_+ \neq 2}} \frac{\langle 0, 2 | H_i | A, n_+ \rangle \langle A, n_+ | H_i | 0, 2 \rangle}{E_2 - E_{n_+} - \Delta W_A} - \sum_{A, n_-} \frac{\langle 0, n_- | H_i | A, 2 \rangle \langle A, 2 | H_i | 0, n_- \rangle}{E_{n_-} - E_2 - \Delta W_A},$$

ahol:

$$W_A - W_0 = \Delta W_A > 0.$$

$n_{\pm}$  az elektron pozitív, ill. negatív energiájú sajátállapotai Coulomb-térben,  $n_+$  részben kötött, részben kontinuum-állapotokat tartalmaz, míg  $n_-$  csak szórás-állapotokat.

Mivel a polarizálhatósági járulék a fenti perturbációs képlet  $\Delta W_A \neq 0$  tagjainak felel meg, a továbbiakban ezt mindenhol feltételezzük.



A  $\Delta W_A$  paraméter a proton gerjesztett állapotainak — tehát a nukleon-rezonanciáknak felel meg —, feltehető, hogy:  $\frac{1}{3} M < \Delta W_A < 3M$ . Az első észrevétel amit tehetünk az, hogy mindhárom típusú tagban olyan közbenső állapotok járuléka, ahol az elektron kötött, elhanyagolhatóan kicsi a kontinuum közbenső állapotok járulékához képest. Továbbá az is megmutatható, hogy számottevő járulékot csak az elektromos polarizálhatóság — kétszeres Coulomb-kölcsönhatás — ad, nem-relativisztikus ( $p_n < m$ ) közbenső elektronállapotok esetén. Ebben a közelítésben:

$$\Delta E_2 \cong \sum_{\substack{A \neq 0 \\ n \neq 2}} \frac{|\langle 0, 2 | H_{CC} | A, n \rangle|^2}{E_2 - E_n - \Delta W_A}.$$

A nem relativisztikus elektronenergiák ( $E_2$  és  $p_n \lesssim m$ ),  $\Delta W_A$  mellett

$$\left( \frac{1}{3} M_P \cong \Delta W_A \cong 3M_P \right)$$

elhanyagolhatóan kicsik. Felhasználva még, hogy

$$|\mathbf{r}| \lesssim \lambda_c \frac{h}{mc} \ll |\mathbf{R}|,$$



a kölcsönhatási energia a

$$H_C(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{-e^2}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{1}{r} \right) \sim \frac{-e^2}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^3}$$

alakkal közelíthető, tehát:

$$(-\Delta E_2) \simeq \sum_{A \neq 0} \frac{|\langle 0 | e\mathbf{R} | A \rangle|^2}{4\pi \Delta W_A} \sum_{n \neq 2} \left| \langle 2 | \frac{e\mathbf{r}}{\sqrt{4\pi} r^3} | n \rangle \right|^2.$$

Az első összegben — az atomok polarizálhatóságának analógiájára — felismerhetjük a fizikai proton külső térbeli polarizálhatóságát:

$$\sum_{A \neq 0} \frac{|\langle 0 | e\mathbf{R} | A \rangle|^2}{4\pi \Delta W_A} = \frac{1}{2} E^2 \sum_{A \neq 0} \frac{|\langle 0 | e\mathbf{R} | A \rangle|^2}{2\pi \Delta W_A} = \frac{1}{2} E^2 \cdot \alpha_{\text{pol}}.$$

Ezt felhasználva  $\Delta E_2$  a következő alakba írható:

$$\Delta E_2 \simeq -\frac{1}{2} \alpha_{\text{pol}} \cdot \sum_{n \neq 2} \left| \langle 2 | \frac{e\mathbf{r}}{\sqrt{4\pi} r^3} | n \rangle \right|^2.$$

A jobb oldalon álló összeg:

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 2} \left| \langle 2 | \frac{e\mathbf{r}}{\sqrt{4\pi} r^3} | n \rangle \right|^2 &\sim \int_{\lambda_c}^{\infty} d^3r \cdot \psi_2^*(\mathbf{r}) \frac{\alpha}{r^4} \psi_2(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_c} \alpha \cdot |\psi_2(0)|^2 = \frac{2\alpha}{\lambda_c} |\psi_2(0)|^2. \end{aligned}$$

Így végeredményben nem-relativisztikus közelítésben:

$$\Delta E_2 \simeq -\frac{\alpha}{\lambda_c} \alpha_{\text{pol}} \cdot |\psi_2(0)|^2 = -m\alpha \cdot \alpha_{\text{pol}} \cdot |\psi_2(0)|^2.$$

adódik.

#### Konklúzió:

A proton kvarkett modellje alapján a következő következtetések vonhatók le:

1. A polarizálhatósági járulékból elhanyagolhatóan kis szerepet játszanak az olyan közbenső lepton-állapotok, ahol a lepton impulzusa a nyugalmi tömeghez képest kicsi (kötött állapotok).

2. Nagyságrendileg a legnagyobb járulékot az elektromos polarizálhatóság (kétszeres Coulomb-kölcsönhatás) adja. Ezen belül az olyan közbenső állapotok jutnak nagy szerephez, ahol a lepton impulzusa a  $p < M$  tartományba esik.

3. A kvarkett modellben, a fizikai proton gerjesztett közbenső állapotaiból származó járulékok *explicit* módon kifejezhető a proton külső térbeli sztatikus polarizálhatóságával.

4. Számértékét tekintve a polarizálhatósági járulékok a modell alapján:

$$\begin{aligned} \text{H-atomra:} & \quad \Delta E \sim (-10^{-3})\alpha^2 \text{ Ry} \sim 0,01 \text{ ppm,} \\ \text{müon-hidrogénre:} & \quad \Delta E \sim (-10^{-4})\alpha^2 \text{ Ry} \sim 100 \text{ ppm.} \end{aligned}$$



Tehát H-atom esetén a mérés pontosságához képest (50 ppm) ez a járulék elhanyagolhatóan kicsi.

Müon-hidrogénre a mérés felbontóképessége várhatóan  $1,5 \cdot 10^{-4} \alpha^2 \text{ Ry}$  (100 ppm). A fenti becslés alapján tehát az várható, hogy a polarizálhatósági járulék müon-hidrogén esetén éppen a mérhetőség határán lesz.

## 2.§. Relativisztikus kötött állapotok és a Bethe—Salpeter egyenlet. Perturbációszámítás

A relativisztikus két-részecske probléma kvantumtérelméleti tárgyalására a legismertebb módszer a Bethe—Salpeter (B.—S.) egyenleten alapuló leírás [2].

Tekintsük két részecske **a** és **b** rugalmas szóródását! (speciálisan legyen **a** és **b**  $m_a$ , ill.  $m_b$  tömegű, feles spinű részecske). A két-fermion Green-függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(ab)}(x_a x_b, y_a y_b) \equiv \langle 0 | T(\psi_\alpha(x_a) \Phi_\beta(x_b) \bar{\psi}_\gamma(y_a) \bar{\Phi}_\delta(y_b) | 0) \rangle, \quad (2.1)$$

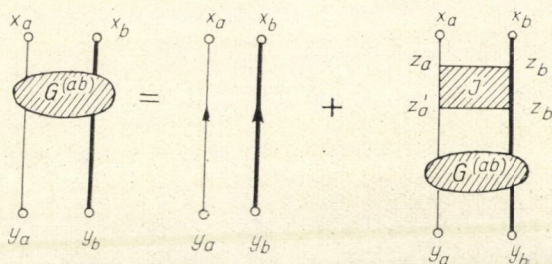
ahol  $\psi$  és  $\Phi(x)$  az **a**, ill. **b** részecske Heisenberg-képbeli téroperátora,  $\bar{\psi}(y)$  és  $\bar{\Phi}(y)$  pedig a megfelelő adjungáltak.

Grafikusan a két-fermion Green-függvényt olyan Feynman-gráfok sokasága ábrázolja, melyek mindegyike az  $a+b \rightarrow a+b$  folyamatnak felel meg.  $G^{(ab)}$ -re egy integrálegyenlet származtatható a következő módon: rendezzük át a Feynman-integrálok összegzésének sorrendjét úgy, hogy először a sajátenergiás részekre összegzünk. Nevezzük irreducibilis résznek egy gráf olyan összefüggő részeit, melyek nem tartalmaznak olyan közbenső állapotot, melyben csak **a** és **b** van jelen. Az ilyen irreducibilis részek összességét — külső propagátorok nélkül — jelölje:  $I(x_a x_b, y_a y_b)$ . Ekkor  $G^{(ab)}$  a következő integrálegyenletet elégíti ki:

$$G^{(ab)}(x_a x_b, y_a y_b) = \frac{1}{2} S_F^a(x_a - y_a) \cdot \frac{1}{2} S_F^b(x_b - y_b) + \\ + \int d^4 z_a d^4 z_b d^4 z'_a d^4 z'_b \frac{1}{2} S_F^a(x_a - z_a) \frac{1}{2} S_F^b(x_b - z_b) I(z_a z_b, z'_a z'_b) G^{(ab)}(z'_a z'_b, y_a y_b), \quad (2.2)$$

(ahol  $S_F^i$ ,  $i=1, 2$  fermion Feynman-propagátorok).

A (2.2) egyenlet grafikus megfelelője:





A (2.2) egyenletet célszerűbb impulzustérben felírni. Transzlációs invariancia miatt  $G$  és  $I$  a 4 koordinátából képzett 3 lineárisan független kombináció függvényeként írható fel. Legyenek ezek: a kezdeti és végállapot relatív koordinátái,  $x = x_a - x_b$ ,  $y = y_a - y_b$  és a kezdő és végállapotbeli tömegközépponti koordináták különbsége:

$$X - Y = \mu_a(x_a - x_b) + \mu_b(y_a - y_b)$$

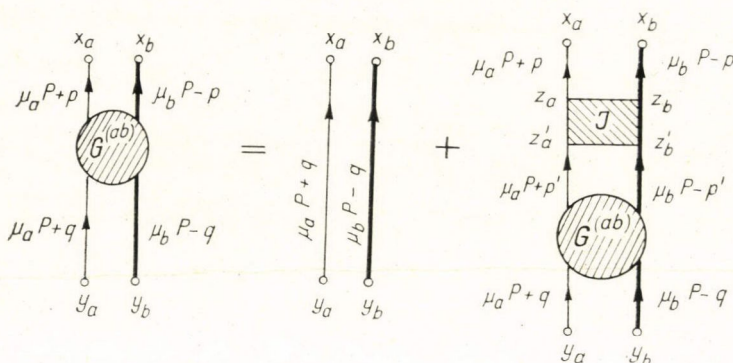
ahol:

$$\mu_a = m_a/(m_a + m_b) \quad \text{és} \quad \mu_b = m_b/(m_a + m_b).$$

A megfelelő konjugált impulzusok  $p, q$  és  $P$ , a relatív impulzusok, ill. a két-részecske rendszer összipulzusa kezdő és végállapotban. A (2.2) egyenlet impulzustérbeli alakja ekkor:

$$(\mu_a \hat{P} + \hat{p} - m_a)(\hat{p} - \mu_b \hat{P} + m_b) G^{(ab)}(p, q; P) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p' \cdot I(p, p'; P) \cdot G^{(ab)}(p', q; P). \quad (2.3)$$

A (2.3) egyenlet grafikus képe:



*Alkalmazás kötött állapotokra:*

Legyenek  $|B1\rangle, |B2\rangle, \dots |Bn\rangle$  a  $P_B = (E_B, \vec{P})$  tömegközépponti impulzushoz tartozó degenerált kötött állapotok. Defináljuk a következő B.—S. amplitúdókat:

$$\psi_{Br}(x_a x_b; P_B) \equiv \langle 0 | T \{ \psi(x_a) \Phi(x_b) \} | Br \rangle, \quad (2.4)$$

$$\bar{\psi}_{Br}(x_a x_b; P_B) \equiv \langle Br | T \{ \bar{\psi}(x_a) \bar{\Phi}(x_b) \} | 0 \rangle \equiv \langle 0 | \bar{T} \{ \psi(x_a) \Phi(x_b) \} | Br \rangle^*.$$

A transzlációs invariancia felhasználásával a tömegközéppont mozgása szeparálható:

$$\begin{aligned} \psi(x_a x_b, P_B) &= (2\pi)^{-3/2} \cdot e^{-iP_B X} \psi_{Br}(x, P_B) \\ \bar{\psi}(x_a x_b, P_B) &= (2\pi)^{-3/2} \cdot e^{iP_B X} \bar{\psi}_{Br}(x, P_B). \end{aligned} \quad (2.5)$$



A (2.1) definíciós egyenlet jobb oldalába írjunk be egy szabad és kötött állapotokból álló teljes rendszert. A Green-függvényhez a  $|Br\rangle$  közbenső állapotokból eredő járulék:

$$\sum_{r=1}^n \int d^4 P \psi_{Br}(x_a x_b, P) \bar{\psi}_{Br}(y_a y_b, P) \Theta(P_0) \delta(P^2 - \omega_B^2) \Theta(X_0 - Y_0) =$$

$$= (2\pi)^{-3} \sum_r \int \frac{d^3 P}{2\omega_B} \psi_{Br}(x, P) \bar{\psi}_{Br}(y, P) e^{-i\omega_B(X_0 - Y_0) + i\mathbf{P}(X - Y)} \Theta(X_0 - Y_0),$$

ahol:  $\omega_B = (P_B)_0 = E_B$ .

Felhasználva a  $\Theta(z)$  függvény definícióját, és Fourier-transzformálva:

$$\frac{i \sum_r \psi_{Br}(p, P_B) \bar{\psi}_{Br}(q, P_B)}{2\omega_B(P_0 - \omega_B + i\epsilon)} + \left\{ \begin{array}{l} P = \omega_B\text{-ben} \\ \text{reguláris} \end{array} \right\} \text{tagok.} \quad (2.7)$$

(2.8)-hoz hozzáadva a megfelelő antirészekből eredő járulékat, azt kapjuk, hogy  $G^{(ab)}(p, q; P)$  a kötési energiának megfelelő helyen egy pólust tartalmaz, azaz:

$$G^{(ab)}(p, q; P) \underset{P \sim P_B}{\approx} \frac{i \sum_r \psi_{Br}(p, P_B) \bar{\psi}_{Br}(q, P_B)}{P^2 - P_B^2 + i\epsilon}. \quad (2.8)$$

Helyettesítsünk egy ilyen pólus-tagot (2.3)-ba és hasonlítsuk össze a jobb és bal oldalon álló reziduumsfüggvényeket! Felhasználva, hogy a  $\psi_{B1}, \psi_{B2}, \dots, \psi_{Bn}$  függvények lineárisan függetlenek, a következő egyenlet adódik a  $\psi(p) = (2\pi)^{3/2} e^{iP \cdot X} \psi(p, P)$  redukált kötött állapot hullámfüggvényre (Bethe—Salpeter-egyenlet):

$$(\mu_a \hat{P} + \hat{p} - m_a)(\hat{p} - \mu_b \hat{P} + m_b) \psi(p) = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} I(p, p'; P) \psi(p'). \quad (2.10)$$

#### A H-atomra vonatkozó Bethe—Salpeter-egyenlet alapmegoldása

Az elektron-proton rendszer  $n$  főkvantumszámhoz tartozó kötött állapotát tömegközépponti rendszerben a következő B.S. egyenlet írja le:

$$\hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon) \psi_n(p) = -\beta^e \beta^p \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} I(p, p'; P_n) \psi_n(p'), \quad (2.11)$$

ahol:

$$\hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon) = [\mu_m E_n + \epsilon - H_e(\mathbf{p})][\mu_M E_n - \epsilon - H_p(\mathbf{p})].$$

$P_n = p_e + p_p = (E_n, \mathbf{0})$  az összipulzus

$p = \mu_M p_e - \mu_m p_p = (\epsilon, \mathbf{p})$  a relatív impulzus

$H_e(\mathbf{p}) = m\beta^e + \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}^e$  és  $H_p(\mathbf{p})$  az elektron ill. proton Dirac-féle

Hamilton operátora,

$$H_p(\mathbf{p}) = M\beta^p - \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}^p, \quad \beta = \gamma^0, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}.$$



$I(p, p', P_n)$  az összes lehetséges irreducibilis gráf összege. Rendezzük ezt az összeget az  $\alpha$  finomszerkezeti állandó hatványai szerint!

$$I(p, p', P_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n I^{(n)}(p, p'; P_n). \quad (2.12)$$

Minden  $\alpha$ -ban  $n$ -edrendű irreducibilis gráf  $n$  számú belső fotonvonalat tartalmaz. Salpeter megmutatta, hogy a (2.12) összeget érdemes továbbrendezni aszerint, hogy a kicserélt fotonok longitudinálisak vagy transzverzálisak. Bebizonyítható, hogy páratlan számú transzverzális foton cseréje az elektron-proton kötéshez  $m/M$ -rendben kisebb járulékot ad, mint az ugyanazon rendű longitudinális fotoncsere. Ezért az  $n$ -ed rendű magfüggvények

$$I^{(n)}(p, p', P_n) = \sum_{k=0}^{[n/2]} I_T^{(2k)} I_L^{(n-2k)} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} I_T^{(2k+1)} I_L^{(n-2k-1)} \quad (2.13)$$

alakú felírása az összenergia egy  $m/M$  hatványai szerinti rendezésének felel meg. Speciálisan  $n=1$  esetén:

$$\begin{aligned} I^{(1)}(p, p', P_n) &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{\gamma_\mu \gamma^\mu}{k_\mu k^\mu + i\epsilon} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\gamma_0^e \gamma_0^p}{|\mathbf{k}|^2} + \sum_{i=1}^2 \frac{(\gamma^T)_i^e (\gamma^T)_i^p}{k_\mu^2} \right] = \\ &= I_L^{(1)}(p, p', P) + I_T^{(1)}(p, p', P). \quad k = p - p'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A fenti általános kijelentés ebben az esetben tehát azt a jólismert tényt tükrözi, hogy a mágneses kölcsönhatás a kötési energiához  $m/M$  rendben kisebb járulékot ad, mint a sztatikus Coulomb-kölcsönhatás.

A fentiek alapján a B.S. egyenlet alapmegoldásának — perturbálatlan megoldásnak — fogjuk nevezni a mind  $\alpha$ -ban, mind  $m/M$  legalacsonyabb rendű magfüggvényhez tartozó megoldást, tehát amelyre:

$$I(p, p', P) = I_L^{(1)}(p, p', P_n) \equiv I_L^{(1)}(\mathbf{k}, P_n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\beta^e \beta^p}{|\mathbf{k}|^2} \quad (2.15)$$

a sztatikus Coulomb-kölcsönhatásnak felel meg.

A perturbálatlan B.S. egyenlet:

$$\hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon) \psi(p) = -\beta^e \beta^p \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} I_L^{(1)}(\mathbf{k}) \psi(p+k). \quad (2.16)$$

Belátható, hogy a (2.16) egyenlet extrém nem-relativisztikus közelítésben a H-atomra vonatkozó szokásos Schrödinger-egyenletbe megy át. Ennek alapján definiálható a B.S. amplitúdók normálása úgy, hogy a megfelelő Schrödinger-hullámfüggvények koordinátatérbeli normája 1 legyen. (L. Függelék B.)

*Perturbációs számítás* szempontjából a szembeszökő különbség a szokásos Schrödinger-egyenlet és a B.S. egyenlet között az  $E_n$  energiától való függésben mutatkozik. Míg az előbbiben ez a függés lineáris, az utóbbiban kvadrátikus, és ezért a szokásos perturbációs számítási képletek nem alkalmazhatók minden további megfontolás nélkül.



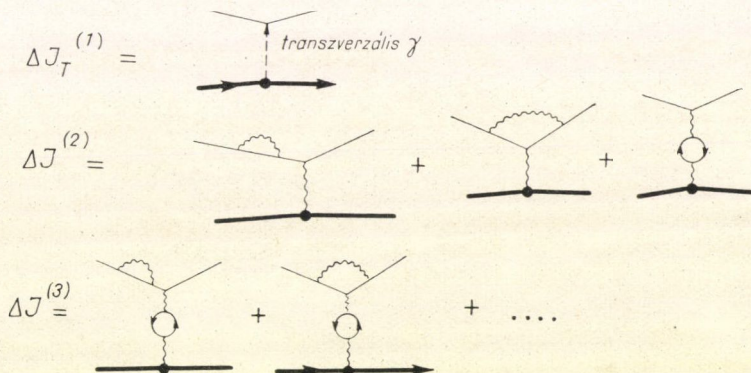
Salpeter [3] részletesen analizálta ezt a problémát. Eredménye a következőkben foglalható össze:

Válasszuk perturbálatlan magfüggvénynek a sztatikus Coulomb-kölcsönhatást leíró  $I_L^{(1)}$ -et! Legyen az ehhez tartozó energiasajátérték  $E_n$ , a megfelelő sajátfüggvény  $\psi_n(p)$ . Ha a  $\Delta I(p, p', P_n)$  magfüggvény  $I_L^{(1)}(\mathbf{k})$ -hoz képest kicsi, akkor a perturbációszámítás első rendjében az  $E_n$  energia megváltozása:

$$\Delta E_n^{(1)} \simeq \frac{(-2\pi i)}{4mM} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_n(p) \Delta I(p, p', P_n) \psi_n(p'). \quad (2.17)$$

(Ennek az eredménynek egy rövid levezetése a jelen jelölésmódban a B. függelékben található.)

Az 1.§-ban összefoglaltuk a Lamb-eltolódásra vonatkozó eddigi elméleti és kísérleti eredményeket. A B.S. egyenlet nyelvére lefordítva, az eddigi számítások a következő irreducibilis magfüggvényeket vették figyelembe:



Brodsky és Appelquist [4] eredménye teljes összhangba hozta az elméleti értéket a legfrissebb kísérleti eredményekkel. Nem lehetünk azonban teljesen nyugodtak, amíg meg nem győződünk arról, hogy a proton dinamikus tulajdonságainak hatása — ami  $\alpha$ -ban másodrendű! — valóban elhanyagolhatóan kis járulékot ad csak.

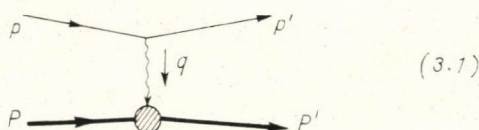
A proton dinamikus szerkezetének figyelembevételén szemléletesen a következő effektus spektrum-módosító hatását értjük: A H-atomban keringő elektron keringése közben polarizálja a protont, majd ezzel a megváltozott protonnal hat kölcsön, ami a proton állapotát újra módosítja — ez az elemi folyamat a H-atom élete során végtelen sokszor ismétlődik.

A következő § célja annak rövid összefoglalása, hogyan írhatjuk le kvantum-elektrodinamikai módszerekkel a fenti effektust, és hogy hozható ez kapcsolatba a rugalmatlan elektron-proton szórási kísérletekkel.



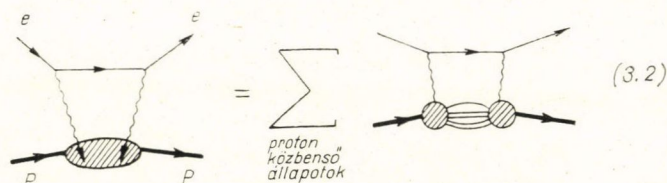
### 3. §. A dinamikus protonszerkezetre vonatkozó kísérleti információk (A proton szerkezeti függvényei)

Ismeretes, hogy a rugalmas elektron-proton szórásban a sztatikus protonszerkezet kimérhető, ugyanis a



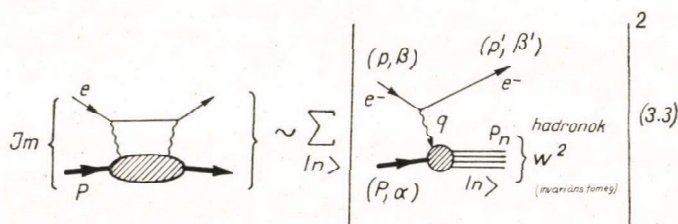
szórásamplitúdóban fellépő rugalmas alakfaktorok a sztatikus töltés és mágneses momentum eloszlásnak felelnek meg.

Vizsgáljuk a következő előreszórási amplitúdót!



Erről a folyamatról a fentiek analógiájára a következő szemléletes képet alkothatjuk: az első fotonsonda — ugyanúgy, mint az előbb — kitapogatja az alapállapotú proton szerkezetét, s egyúttal a kölcsönhatás során polarizálja (gerjeszti). Mivel a második fotonsonda már ezt a megváltozott szerkezetet érzékeli, a teljes amplitúdó a proton elektromos, ill. mágneses polarizálhatóságával hozható kapcsolatba.

A (3.2) amplitúdót az optikai tétel a következő — rugalmatlan elektron-proton szórási — folyamat teljes hatáskeresztmetszetével hozza kapcsolatba:



Ebben a §-ban röviden összefoglaljuk a (3.3) jobb oldalán szereplő folyamatra vonatkozó legfontosabb kísérleti és elméleti eredményeket [5, 6].

A folyamatot a következő  $S$ -mátrixelem jellemzi:

$$S_{fi} = \langle p', \beta', P_n \text{ out} | p, \beta; P, \alpha \text{ in} \rangle. \quad (3.4)$$



A redukciós technika alkalmazásával a leptonrész és a fotonpropagátor le-  
választható:

$$S_{fi} = -ie^2(2\pi)^4 \delta(p + P - p' - P_n) \frac{1}{(p - p')^2} \langle P_n | J_\mu(0) | P, \alpha \rangle \bar{u}_{\beta'}(p') \gamma^\mu u_\beta(p). \quad (3.5)$$

A differenciális hatáskeresztmetszet:

$$d\sigma = \frac{e^4}{4q^4} \frac{1}{[(Pp)^2 - m^2 M^2]^{1/2}} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{1}{(2\pi)^3} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

ahol:

$$L_{\mu\nu} = 2m \left[ mg_{\mu\nu} + \frac{1}{m} (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (pp') g_{\mu\nu}) + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho \beta^\sigma \right]. \quad (3.7)$$

az amplitúdó explicite ismert leptonrésze,  $W_{\mu\nu}$  pedig a hadronrész:

$$W_{\mu\nu} = \int d^4 x e^{iqx} \langle P, \alpha | J_\mu(x) J_\nu(0) | P, \alpha \rangle. \quad (3.8)$$

$W_{\mu\nu}$  általános Lorentz-invariáns kifejtése:

$$W_{\mu\nu} = 4M\pi \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) W_1(q^2, \nu) + \frac{4\pi}{M} \left( P_\mu - \frac{M\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{M\nu}{q^2} q_\nu \right) W_2(q^2, \nu) + \\ + id(q^2, \nu) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho \alpha^\sigma + ig(q^2, \nu) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho p^\sigma, \quad (3.9)$$

ahol:  $\nu = \frac{(Pq)}{M}$  a laboratóriumi rendszerben mért fotonenergia,  $q^2 = -Q^2 \leq 0$  a virtuális foton tömege,  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $d$  és  $g$  pedig a proton szerkezeti függvényei, vagy rugalmatlan alakfaktorai.

Látni fogjuk, hogy a Lamb-eltolódáshoz csak  $W_{\mu\nu}$  szimmetrikus része:

$$W_{\mu\nu}^S = 4M\pi \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) W_1 + \frac{4\pi}{M} \left( P_\mu - \frac{M\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{M\nu}{q^2} q_\nu \right) W_2 \quad (3.10)$$

ad járulékot, ezért elegendő csak a  $W_1(q^2, \nu)$  és  $W_2(q^2, \nu)$  szerkezeti függvények tulajdonságaira szorítkozni.

A kísérletileg mért spinfüggetlen differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{4x^2(E')^2}{q^4} \left[ 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\Theta}{2} + W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\Theta}{2} \right] \quad (3.11)$$

tehát jó közelítéssel kisszögű szórásnál  $W_2(\nu, q^2)$ , nagyszögű szórásnál pedig  $W_1(\nu, q^2)$  mérhető ki.

A későbbiek során előfordulnak még a következő mennyiségek:

A keletkező hadronok invariáns tömegnégyzete:

$$W^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2. \quad (3.12)$$

Az  $\omega$  és  $\omega'$  skálaváltozók:

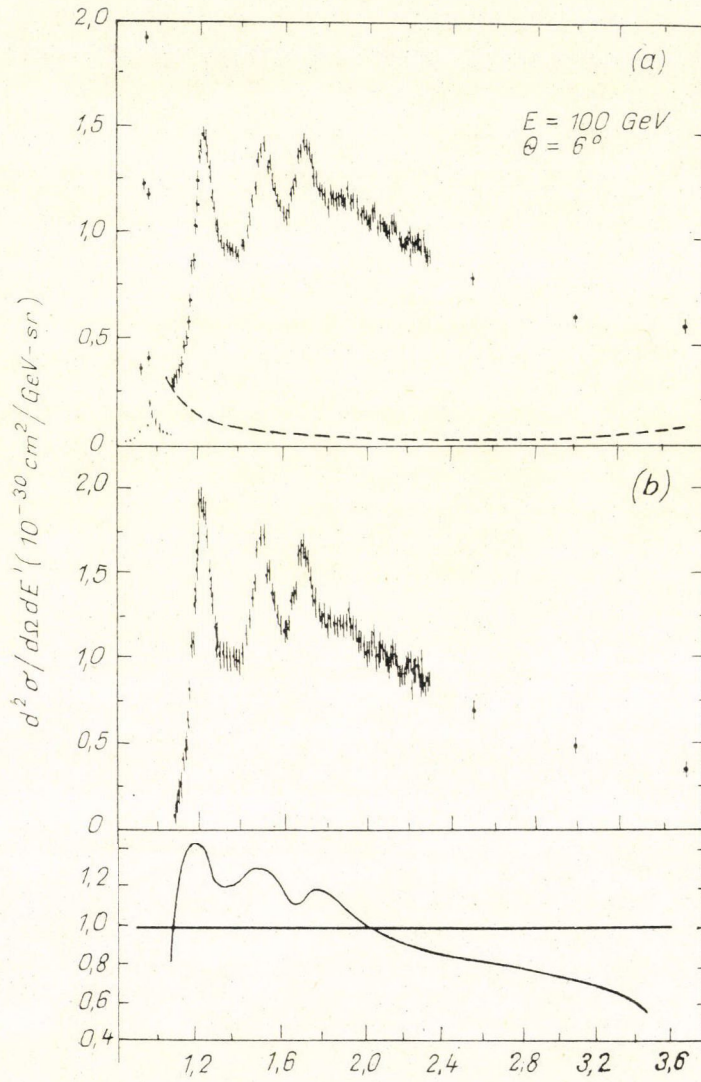
$$\omega = \frac{2M\nu}{Q^2}; \quad \omega' = \left( 1 + \frac{W^2}{Q^2} \right) = \omega + \frac{M^2}{Q^2}, \quad (3.13)$$



továbbá a longitudinális és transzverzális fotonokra vonatkozó hatáskeresztmetszetek:

$$\sigma_L = \frac{8M\pi^2\alpha}{(\omega-1)Q^2} \left[ \left( 1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) W_2 - W_1 \right] \quad (3.14)$$

$$\sigma_T = \frac{8M\pi^2\alpha}{(\omega-1)Q^2} [W_1].$$

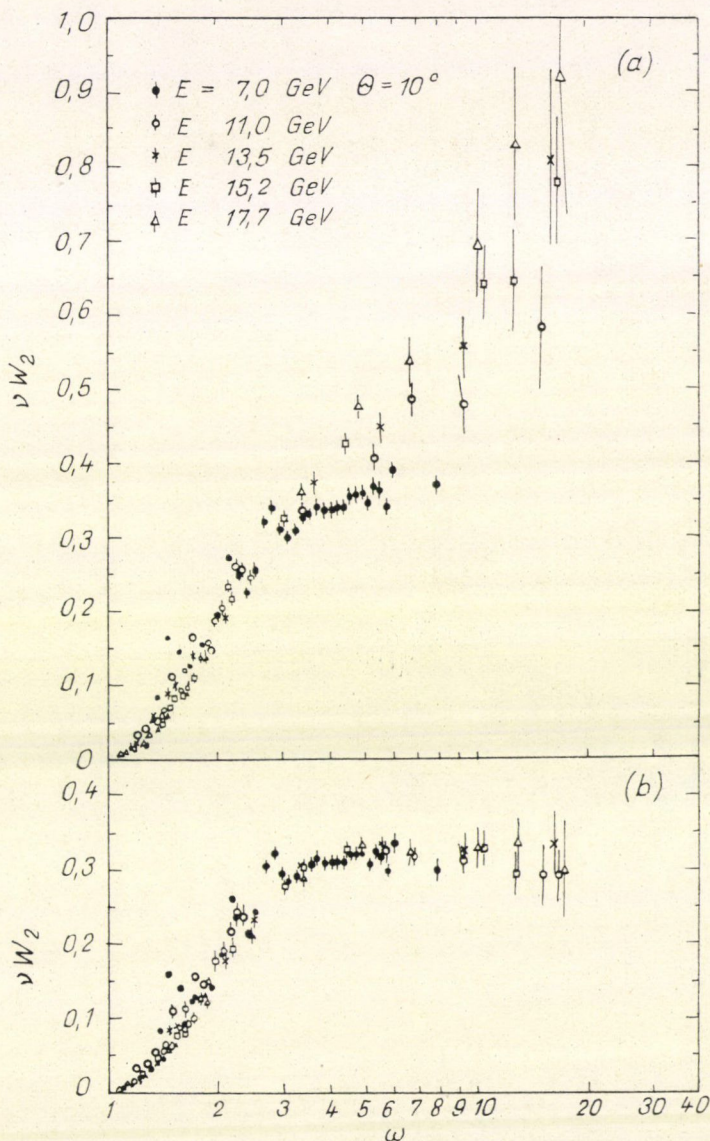


1. ábra



A kísérleti eredmények [6], a következőkben foglalhatók össze: A  $Q^2 - W^2$  vagy  $Q^2 - 2M\nu$  síkon a mért hatáskeresztmetszetek tulajdonságai alapján 3 jól elkülönült kinematikai tartomány különböztethető meg. (A mérések az  $1 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 20 \text{ GeV}^2$ ,  $1 \text{ GeV}^2 \leq W^2 \leq 25 \text{ GeV}^2$  tartományokra vonatkoznak.)

1. A  $W \leq 2 \text{ GeV}$  (rezonancia) tartományban a hatáskeresztmetszet rezonancia-szerkezetet mutat, a rezonanciák  $W = \text{konst.}$  vonalak mentén húzódnak. Ez úgy

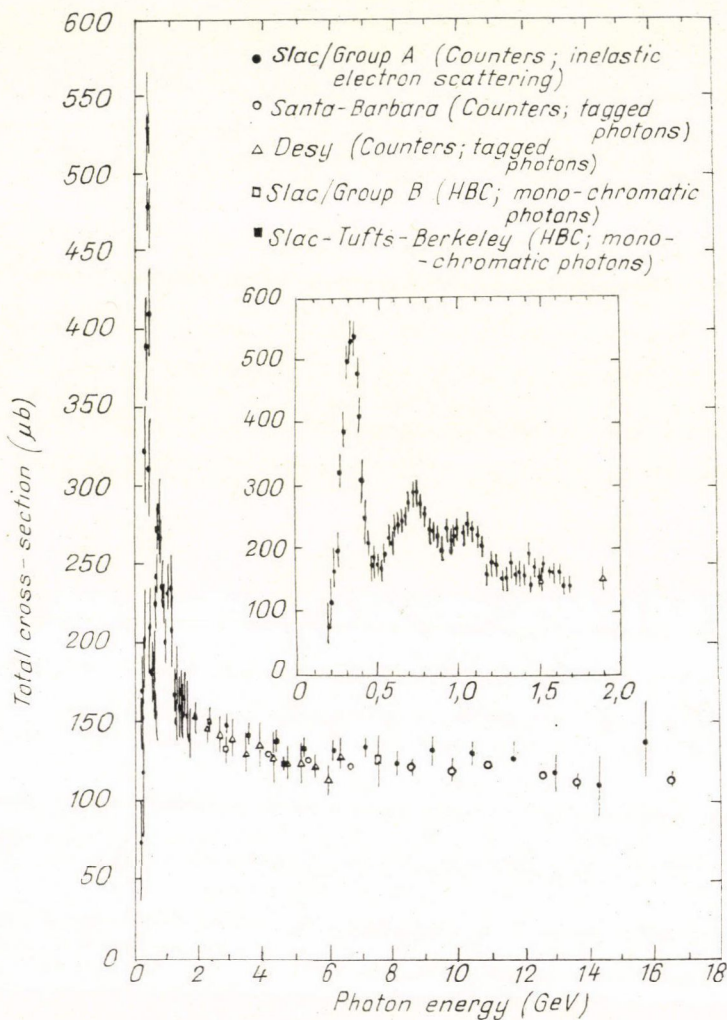


2. ábra



értelmezhető, hogy itt a proton magasabb energiájú, kvázidiszkrét gerjesztett állapotokba megy át. Az átmenetekhez tartozó formafaktorok a rugalmas alakfaktorokhoz hasonlóan  $Q^2$  növekedtével gyorsan csökkennek (1.1. ábra).

2.  $W \cong 2 \text{ GeV}$  és  $Q^2 \cong 1 \text{ GeV}^2$  (mélyen rugalmatlan) tartomány. Ebben a tartományban sima, folytonos jellegűek a mért hatáskeresztmetszetek. Vizsgálva ezek viselkedését, az a fontos következtetés adódik, hogy ebben a tartományban  $\nu W_2(Q^2, \nu)$  és  $W_1(Q^2, \nu)$  csak a két változó hányadosának — azaz  $\omega$ -nak — függvénye. Ezt a tulajdonságot nevezik skálainvarianciának. (A jelen kísérleti adatokkal összefér, hogy a  $\nu W_2 \equiv F_2(\omega)$  és  $\frac{2M}{\omega} W_1 = \frac{1}{\omega} F_1(\omega)$  függvények ezen a tartományon belül megegyeznek.)



3. ábra



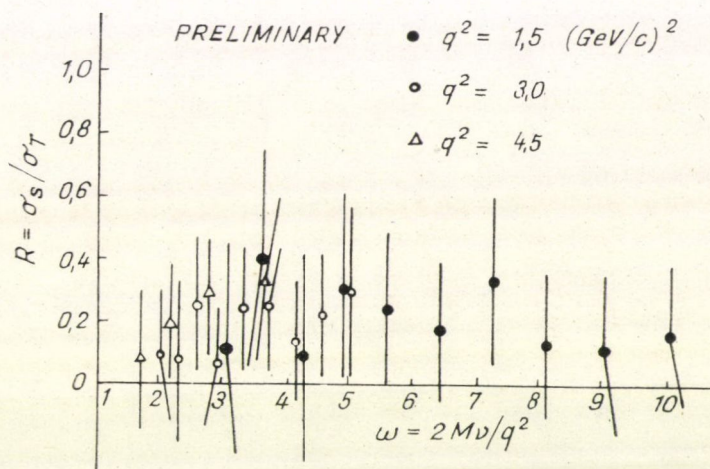
3. Nagyenergiájú (Regge) tartomány:  $Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2$  és  $\nu \geq 5 \text{ GeV}$ . Ebben a tartományban számottevő mérési eredmények valódi fotonra ( $Q^2=0$ ) vannak. Azonban ez is elég ahhoz, hogy nyilvánvalóvá váljék, miszerint a szerkezeti függvények viselkedésének a (2., ill. 3.) tartományban lényegesen különbözni kell. Valódi fotonra — mértékinvariancia miatt —  $\sigma_L(\nu) \equiv 0$ , másrészt a hatáskeresztmetszet mérésekből (1.3. ábra) az következik, hogy:

$$\sigma_T(\nu, Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} \sigma_{\text{tot}}^{\text{valódi } \gamma}(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \text{konst.} \quad (3.15)$$

Ha a skálalimesz erre a tartományra is kiterjeszthető lenne:

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{valódi } \gamma}(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

adódna, ami a kísérleti tényeknek ellentmond. A két tartomány között egy jól definiált határnak kell húzódnia.



4. ábra

Az elmélet fontos paramétere még az  $R = \sigma_L / \sigma_T$  arány. Valódi fotonra nyilvánvalóan  $R=0$ , a mélyen rugalmatlan tartományban pedig a mérések alapján (1.4. ábra)  $R \approx 0,15$  adódik. (De a kísérleti adatokkal még  $R=0$  is összefér.) A nagyenergiájú elektroproduktions mérési eredmények értelmezésére számos elméleti modell született [7, 8, 9, 10], ezek ismertetése azonban kívül esik a disszertáció témakörén.



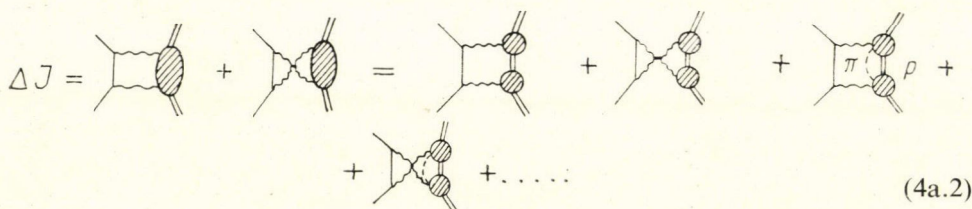
#### 4.§. A H-atom Lamb eltolódásának protonszerkezeti korrekciója

##### 4.§. a) A proton polarizálhatóság járuléka a nívóeltolódáshoz

A 2.§-ban láttuk, hogy ha  $\Delta I(p, p', E_n)$  egy olyan irreducibilis magfüggvény, amely a sztatikus Coulomb-kölcsönhatáshoz képest kis perturbációt jelent, akkor ennek hatására a stacionárius kötött állapotok energiájának megváltozása a

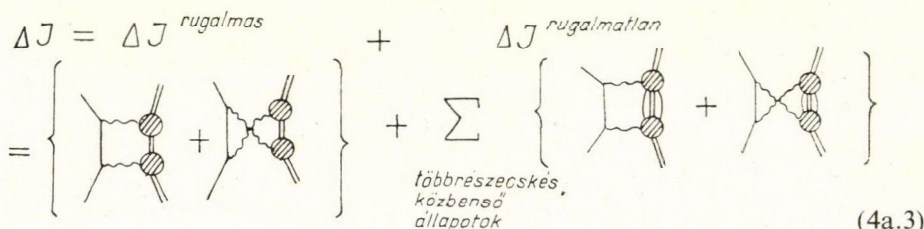
$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{(-2\pi i)}{4mM} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_n(p) \Delta I(p, p', E_n) \psi_n(p') \quad (4a.1)$$

formulával írható le a perturbációszámítás első rendjében. A proton polarizálhatóságának megfelelő irreducibilis magfüggvény — az elektromágneses kölcsönhatás legalacsonyabb rendjében — az előző § szerint a következő Feynman-gráfnak felel meg:



$$\Delta J = \text{[diagrams]} + \dots \quad (4a.2)$$

ami tovább így írható:



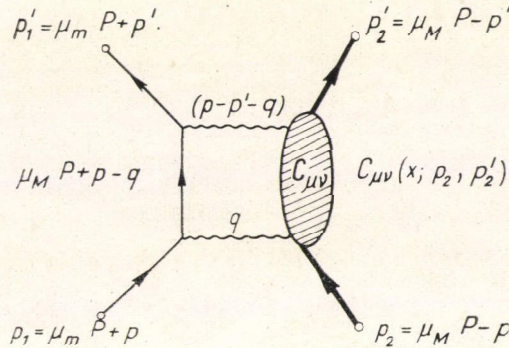
$$\Delta J = \Delta J^{\text{rugalmas}} + \Delta J^{\text{rugalmatlan}} \quad (4a.3)$$

A (4a.3) gráfnak megfelelő magfüggvény:

$$\Delta I(p, p', P) = -ie^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu [\mu_m \hat{P} + \hat{p} - \hat{q} - m + i\epsilon]^{-1} \gamma^\nu \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(p - p' - q)^2 + i\epsilon} \int d^4 x e^{iqx} C_{\mu\nu}(x, \mu_M P - p, \mu_M P - p'). \quad (4a.4)$$



A jelölések a következő ábra alapján értelmezhetők:



5. ábra

ahol  $C_{\mu\nu}(x, p_2, p'_2)$  a virtuális Compton-amplitúdó:

$$\bar{U}(p'_2)C_{\mu\nu}(x, p_2, p'_2)U(p_2) = \langle p'_2 | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | p_2 \rangle = -4M\pi i T_{\mu\nu}(x; p'_2, p_2). \quad (4a.5)$$

Behelyettesítve (4a.4)-et (4a.1)-be, az  $n$ -edik energiaszint eltolódására adódik:

$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{-e^4 \pi^2}{mM} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_n(p) \gamma^\mu [\mu_m \hat{p} + \hat{p} - \hat{q} - m + i\epsilon]^{-1} \gamma^\nu \cdot \\ \cdot \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - p' - q)^2 + i\epsilon} \int d^4 x e^{iqx} C_{\mu\nu}(x; \mu_M P - p', \mu_M P - p) \psi_n(p'). \quad (4a.6)$$

Vezessük be az energiaprojekciós operátorokat:

$$A_\pm^{i\pm}(\mathbf{p}) = [E_i(\mathbf{p}) \pm H_i(\mathbf{p})]/2E_i(\mathbf{p}) \quad (4a.7)$$

$$E_i(\mathbf{p}) = (m_i^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} \quad \{i\} = \begin{cases} \text{elektron} \\ \text{proton} \end{cases}$$

definícióval. Felhasználva a

$$A_+^e A_+^e + A_+^e A_-^p + A_-^e A_+^p + A_-^e A_-^p \equiv I$$

azonosságot, a B.S. hullámfüggvények 4 tag összegeként állnak elő:

$$\psi(p) = \psi_{++} + \psi_{+-} + \psi_{-+} + \psi_{--} = \sum_{(i,j=\pm)} \psi_{ij}(p),$$

ahol:

$$\psi_{ij}(p) = A_i^e(\mathbf{p}) A_j^p(\mathbf{p}) \psi(p).$$

Ezért a  $\Delta E \sim \int d_p^4 p d_{p'}^4 p' \bar{\psi}(p) \Delta I(p, p') \psi_n(p')$  kifejezés a B.S. amplitúdók (4a.9) alatti



kifejtésének felhasználásával 16 tag összegeként áll elő:

$$\Delta E_n \sim \sum_{i,j=\pm} \sum_{k,l=\pm} \int d^4 p' \int d^4 p \bar{\psi}_{ij}(p) \Delta I(p, p') \psi_{kl}(p'). \quad (4a.10)$$

A B.S. hullámfüggvények H-atomra explicite nem ismeretesek. A továbbiakban azonban látni fogjuk, hogy ez nem okoz komoly problémát. A (4a.6) összefüggés a B.S. hullámfüggvények tulajdonságainak felhasználásával olyan alakra redukálható majd, hogy az energiaeltolódás kiszámításához elegendő lesz a hidrogénatom nem-relativisztikus — Schrödinger — hullámfüggvényeinek ismerete.

A B.S. hullámfüggvények tulajdonságainak részletesebb ismertetése a Függelék B) pontjában található, itt csak hivatkozunk néhány — felhasználásra kerülő — eredményre:

A. A  $\psi_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$  B.S. amplitúdók relatív energia függését explicite leválasztva, érvényes a következő előállítás:

$$\psi_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon) = [2\pi i F_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)]^{-1} \Lambda_i^e \Lambda_j^p [E - H_e - H_p] \chi(\mathbf{p}), \quad (4a.11)$$

ahol:

$$F_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon) = \Lambda_i^e(\mathbf{p}) \Lambda_j^p(\mathbf{p}) \hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon),$$

és a  $\chi(\mathbf{p})$  amplitúdó a következő egyenletnek tesz eleget:

$$\{E - H_e(\mathbf{p}) - H_p(\mathbf{p})\} \chi(\mathbf{p}) = \int d^3 k \tilde{I}_L^{(1)}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{p} + \mathbf{k})$$

ahol:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \cdot \psi(\mathbf{p}, \epsilon). \quad (4a.12)$$

2. Belátható, hogy a  $\psi_{ij}(\mathbf{p}, \epsilon)$   $\{i, j = \pm\}$  függvények nagyságrendi viszonyai olyanok, hogy a  $\psi_{+-}$ ,  $\psi_{-+}$  és  $\psi_{--}$  amplitúdók  $\Delta E$ -hez az  $\alpha$  és  $\frac{m}{M}$  szerinti sorfejtések magasabb rendjeiben adnak csak járulékot. (Fizikailag ez azzal áll kapcsolatban, hogy ezek az amplitúdók tartalmazzák a negatív energiájú — antirészecske — közbenső állapotokat.)

Ezért jogos a következő közelítés:

$$\begin{aligned} \Delta E^{(1)} \simeq (\Delta E^{(1)})_{++}^{++} &= \frac{-e^4 \pi^2}{mM} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_{++}(\mathbf{p}, E_n) \gamma^\mu \frac{1}{q^2} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{(p-p'-q)^2} [\mu_m \hat{p} + \hat{p} - \hat{q} - m]^{-1} \gamma^\nu \int d^4 x e^{iqx} C_{\mu\nu}(x, \mu_M P - p', \mu_M P - p) \psi_{++}(p', E_n) \end{aligned} \quad (4a.13)$$

Felhasználva  $\psi_{++}(\mathbf{p}, \epsilon)$  (4a.11) alatti előállítását, továbbá, hogy:

$$\chi_{++}(\mathbf{p}) \equiv \Phi_{++}(\mathbf{p}) \quad (4a.14)$$

— ill. a megfelelő relációkat az adjungált B.S. amplitúdóra —  $\Delta E_n^{(1)}$ -re a következő



kifejezés adódik:

$$\begin{aligned} \Delta E_n^{(1)} \simeq & \frac{-e^4 \pi^2}{mM} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} d\epsilon \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^4} d\epsilon' \bar{\Phi}_{++}(\mathbf{p}) \frac{1}{2\pi i} \cdot \\ & \cdot \frac{E_n - E_e(\mathbf{p}) - E_p(\mathbf{p})}{(\mu_m E_n - E_e + \epsilon + i\delta)(\mu_M E_n - E_p - \epsilon + i\delta)} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu [\mu_m \hat{P} + \hat{p} - \hat{q} - m]^{-1} \gamma^\nu \cdot \\ & \cdot \frac{1}{q^2} \frac{1}{(p - p' - q)^2} \int d^4 x \cdot e^{iqx} C_{\mu\nu}(x, \mu_M P - p', \mu_M P - p) \frac{1}{2\pi i} \cdot \\ & \cdot \frac{E - E_e(\mathbf{p}') - E_p(\mathbf{p}')}{(\mu_m E_n - E_e' - \epsilon' + i\delta)(\mu_M E_n - E_p' - \epsilon' + i\delta)} \Phi_{++}(\mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (4a.15)$$

3.  $\psi_{++}(\mathbf{p}', \epsilon')$  explicit  $\epsilon'$  függéséből leolvasható, hogy a  $\Psi_{++}$  amplitúdónak pólusa van:

- $\epsilon' \sim W + i\delta \sim (m\alpha^2 + i\delta) \sim (\text{kötési energia})$  értéknél a felső félsíkon,
- $\epsilon' \sim -\left(\frac{m}{M}W + i\delta\right)$ -nál az alsó félsíkon.

Ha az  $\epsilon'$  szerinti integrálásnál az integrációs kontúrt a felső félsíkon zárjuk, akkor a felső félsíkon levő pólus miatt a proton és az elektron lényegében tömeghéjra kerül. — ( $\sim m\alpha^2$  bizonytalansággal.)

Ugyanez igaz  $\bar{\psi}_{++}(\mathbf{p}, \epsilon)$ -ra is. Ezért  $\Delta E_n^{(i)}$  két tag összegeként írható:

$$\Delta E_n^{(1)} \simeq (\Delta E_n^{(1)})_{\text{on-mass shell}} + (\Delta E_n^{(1)})_{\text{off-mass shell}}. \quad (4a.16)$$

A második tag lényegében abból adódik, hogy a B.S. egyenlet magfüggvényeként fellépő irreducibilis gráf lábai nem szabad vonalak, hanem propagátorok.

4. A B.S. amplitúdók egy további fontos tulajdonsága, hogy  $\epsilon \gg m\alpha^2 \sim W$  értékekre gyorsan csökkenő függvények.

$$\left( \psi_{++}(\mathbf{p}; \epsilon \gg m\alpha^2) \sim \frac{m\alpha^2}{\epsilon^2} \right)$$

Másrészt a Landau-egyenletek alapján belátható, hogy az integrandus:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (\mu_m \hat{P} + \hat{p} - \hat{q} - m + i\epsilon)^{-1} \frac{1}{q^2(p - p' - q)^2} C_{\mu\nu}(q; \mu_M P - p, \mu_M P - p')$$

része  $\epsilon$ -ban reguláris — s ezért feltehető, hogy  $\psi_{++}(\mathbf{p}, \epsilon)$  levágása elegendő ahhoz, hogy a  $(\Delta E_n)_{\text{shell}}^{\text{off-mass}}$  járulékot kicsívé tegye. Ebben a közelítésben tehát — kiintegrálva a relatív energiák  $\epsilon$  és  $\epsilon'$  szerint:

$$\Delta E_n^{(1)} \simeq \frac{-e^4}{4mM} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \bar{\Phi}_{++}(\mathbf{p}) \{ \Delta I(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E_n) \}_{p_{\frac{1}{2}}^2 = p_{\frac{1}{2}}'^2 = m^2, p_{\frac{3}{2}}^2 = p_{\frac{3}{2}}'^2 = M^2} \Phi_{++}(\mathbf{p}') \quad (4a.17)$$



5. A következő táblázatból kiolvasható a relatív energia szerint kiintegrált  $\Phi_{++}(\mathbf{p})$  B.S. amplitúdó viselkedése a  $|\mathbf{p}|=p$  argumentum különböző értékei mellett, a Bohr-momentum ( $p_0 \sim m\alpha$ ) értékénél egységnyinek véve a függvény nagyságrendjét:

$\backslash p$	$\alpha m$	$\alpha m < p < m$	$m < p < M$	$p > M$
$\Phi_{++}$	1	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^2$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$

Látható, hogy  $\alpha$ -ban legalacsonyabb rendben számolva, számottevő járulékot csak a Bohr-momentum nagyságrendjébe eső impulzusok adnak. Ilyen impulzusok mellett — extrém nem-relativisztikus közelítés — a  $\Phi_{++}(\mathbf{p})$ -re vonatkozó perturbálatlan B.S. egyenlet a Schrödinger-egyenletbe, a B.S. hullámfüggvények pedig a megfelelő — spinorokkal szorzott — Schrödinger-hullámfüggvényekbe mennek át.

Ilyen kis impulzusértékek mellett, mind az elektron, ill. proton spinorok, mind a virtuális Compton-amplitúdó az impulzusok lassan változó függvényei, s lényegében a Bohr-momentum helyén felvett értékükkel helyettesíthetők:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{++}(\mathbf{p}) &\sim \Phi_S^*(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{p}_1) \bar{U}(\mathbf{p}_2) \\ \Phi_{++}(\mathbf{p}') &\sim \Phi_S(\mathbf{p}') u(\mathbf{p}_1') \bar{U}(\mathbf{p}_2')\end{aligned}\quad (4a.18)$$

ahol:

$$p_1 = \mu_m P + p \sim (m, \mathbf{p}_0) \quad |\mathbf{p}_0| \sim \alpha m$$

$$p_2 = \mu_M P - p \sim (M, -\mathbf{p}_0)$$

és  $\Phi_S(\mathbf{p}')$ ,  $\Phi_S^*(\mathbf{p})$  Schrödinger-hullámfüggvények.

A virtuális Compton-amplitúdó pedig:

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu}(q; p_2, p_2') &\simeq C_{\mu\nu}(q; [M, \mathbf{p}_0], [M, -\mathbf{p}_0]) = \\ &= C_{\mu\nu}\left(q^2, \frac{p_2 q}{M}\right) \equiv C_{\mu\nu}(q^2, \nu)\end{aligned}\quad (4a.19)$$

ahol:

$$\left(\frac{p_2 q}{M}\right) = \nu \simeq q^0$$

a virtuális  $\nu$  laboratóriumi energiája.

A (4a.18) és (4a.19) közelítések felhasználásával, proton és elektronspinre átlagolva:

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(1)} &\simeq \frac{-e^4}{4mM(2\pi)^4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Phi_S^*(\mathbf{p}) \int \frac{d^4 q}{q^2} \frac{1}{q_0^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{q})^2} \frac{1}{2} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{q^2 - 2mq_0} \text{Tr}\{(\hat{p}_1 + m)\gamma^\mu (\hat{p}_1' - \hat{q} + m)\gamma^\nu\} \sum_S \bar{U}_S(\mathbf{p}_2) C_{\mu\nu}(q^2, \nu) U_S(\mathbf{p}_2) \Phi_S(\mathbf{p}').\end{aligned}\quad (4a.20)$$



Az árammegmaradás:  $q^\mu C_{\mu\nu} = q^\nu C_{\mu\nu} = 0$  felhasználásával:

$$\Delta E_n^{(1)} \simeq \frac{ie^4}{(2\pi)^3 m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Phi_S^*(\mathbf{p}') \int \frac{d^4 q}{q^2} \frac{1}{q_0^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{q})^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{q^2 - 2mq_0} L^{\mu\nu}(p_1 q) T_{\mu\nu}^S(q^2, \nu) \Phi_S(\mathbf{p}), \quad (4a.21)$$

ahol:

$$L^{\mu\nu}(p_1, q) = g^{\mu\nu}(p_1 q) + 2p_1^\mu p_1^\nu \quad (4a.21)$$

a leptonrész,  $T_{\mu\nu}^S(q^2, \nu)$  pedig a virtuális előszórási Compton-amplitúdó szimmetrikus — spinfüggetlen — része, melynek legáltalánosabb (és megfelelő szimmetria tulajdonságoknak eleget tevő) Lorentz-invariáns kifejtése:

$$T_{\mu\nu}^S(q^2, \nu) = \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) T_1(q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} \left( p_{2\mu} - \frac{M_\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( p_{2\nu} - \frac{M_\nu}{q^2} q_\nu \right) T_2(q^2, \nu).$$

$$\dim [T_i] = [\text{tömeg}]^{-1}. \quad (4a.23)$$

Felhasználva  $L^{\mu\nu}$  és  $T_{\mu\nu}^S$  fenti előállítását, továbbá hogy:

$p_1 \simeq \frac{m}{M} p_2$  az energiaszint eltolódására:

$$\Delta E_n^{(1)} \simeq \frac{ie^4}{(2\pi)^3 m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Phi_S^*(\mathbf{p}') \int \frac{d^4 q}{q^4} \frac{1}{q^2 - 2mq_0} \left[ (p_1 q) \left\{ \left( 1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right) T_2 - 3T_1 \right\} + \right.$$

$$\left. + 2m^2 \left\{ \left( 1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right)^2 T_2 + \left( \frac{q_0^2}{q^2} - 1 \right) T_1 \right\} \right] \Phi_S(\mathbf{p}') \quad (4a.24)$$

adódik. A (4a.24) kifejezésben  $\mathbf{p}$ , ill.  $\mathbf{p}'$ -től való függést már csak a hullámfüggvények tartalmaznak, ezek szerint kiintegrálhatunk, továbbá a  $(p_1 q) = (mq_0 - \mathbf{p}_0 \mathbf{q})$ -val arányos tagokból az integrandus párossági tulajdonságai miatt csak az  $mq_0$ -al arányos tagok maradnak, tehát:

$$\Delta E_n^{(1)} \simeq \frac{ie^4}{(2\pi)^3 m} |\psi_n(0)|^2 \int \frac{d^4 q}{q^4} F(q^2, q_0) \quad (4a.25)$$

ahol:

$$F(q^2, q_0) = T_1(q^2, q_0) \left[ -3mq_0 + 2m^2 \left( \frac{q_0^2}{q^2} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \left( 1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right) T_2(q^2, q_0) \left[ mq_0 + 2m^2 \left( 1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right) \right],$$

és:

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha m}{n} \right)^3;$$

$\psi_n(0)$  a Schrödinger-hullámfüggvény az  $\mathbf{x}=0$  helyen.



## 4.§. b) Cottingham-transzformáció és diszperziós relációk

Az előző pontban a Lamb-eltolódás proton polarizálhatósági járuléka a

$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{ie^4}{(2\pi)^3 m} |\psi_n(0)|^2 \int \frac{d^4 q}{q^4} F(q^2, q_0) = \frac{ie^4}{(2\pi)^3 m} |\psi_n(0)|^2 I \quad (4b.1)$$

kifejezés adódott. Ebben az alakjában a (4b.1) formula még nem alkalmas az energia-korrekció konkrét becslésére, hiszen a virtuális Compton-amplitúdóból adódó  $T_1(q^2, \nu)$  és  $T_2(q^2, \nu)$  függvények közvetlenül nem ismertek.

Cottingham [11] a neutron-proton tömegkülönbséggel foglalkozó cikkében megmutatta egy hasonló típusú kifejezésről, hogy az megfelelő transzformáció és diszperziós relációk felírása után lényegében (levonási, állandó ill. fix pólus járulékatól eltekintve) kifejezhető a nukleonok szerkezeti függvényeivel. Ugyanez lesz igaz az  $F(q^2, q_0)$  függvényre is.

(4a.5) alatti definíciójába egy teljes rendszert beírva a proton közbenső állapotokra:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q, p_2) = & \frac{i}{4M\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 x \int_0^{\infty} dx_0 e^{iqx} \langle p_2 | I_\mu(x) \sum_{p_n} | p_n \rangle \langle P_n | I_\nu(0) | p_2 \rangle + \\ & + \frac{i}{4M\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 x \int_{-\infty}^0 dx_0 e^{iqx} \langle p_2 | I_\nu(0) \sum_{p_n} | p_n \rangle \langle P_n | I_\mu(0) | p_2 \rangle \end{aligned} \quad (4b.2)$$

(4b.2)-ből az  $x$  szerinti integrálás elvégzése után adódik:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q, p_2) = & \frac{(2\pi)^3}{4M\pi} \sum_{p_n} \langle p_2 | I_\mu(0) | p_n \rangle \langle P_n | I_\nu(0) | p_2 \rangle \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{P}_n - \mathbf{q})}{P_n^0 - M - q^0 - i\epsilon} + \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{P}_n + \mathbf{q})}{P_n^0 - M + q^0 - i\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

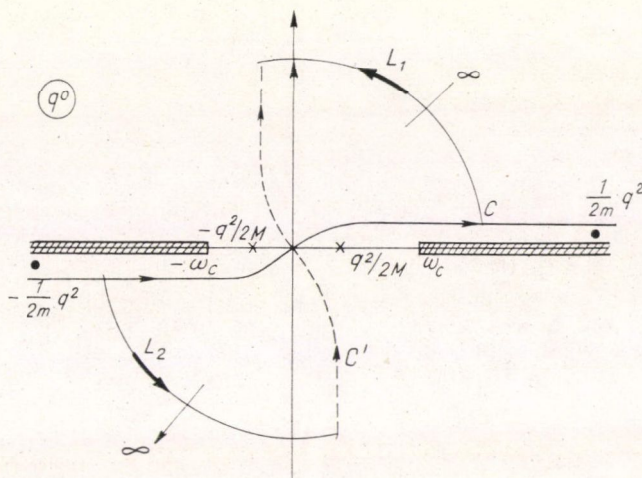
Az utóbbi előállításból leolvasható, hogy a  $T_{\mu\nu}(q, p_2)$  amplitúdónak pólusai vannak a:  $q^0 = \pm q^2/2M$  pontokban és vágásai indulnak a:  $q^0 = \omega_c = \pm \frac{1}{2M} [\mu^2 + 2M_\mu - q^2]$  pontokból. A  $\Delta E$ -ben szereplő integrandus egyrészt tartalmazza a  $T_{\mu\nu}^S$  Compton-amplitúdó szingularitásait, másrészt explicite fellépnek benne a következő további pólusok (a leptonrészből, ill. fotonpropagátorból):

$$\mathbf{q}^0 = \pm [|\mathbf{q}| - i\epsilon] \quad \text{kétszeres pólus}$$

$$q^0 = \pm \frac{1}{2m} [q^2 + i\epsilon]$$



A szingularitások elhelyezkedése a  $q^0$  síkon tehát:



A (4b.1)-ben szereplő  $I$  integrál egy  $q^0$  szerinti integrációt tartalmaz a  $C$  görbe mentén. Ezt az integrációs utat el lehet forgatni  $\pi/2$ -el, ha a következő feltételek teljesülnek:

a) a  $q^0$  sík első és harmadik negyedében az integrandusnak a felsoroltakon kívül nincsenek további szingularitásai.

b) Az  $L_1$ , ill.  $L_2$  ívek járuléka elhagyható.

Ekkor tehát az integrációs út a valós  $q^0$  tengelyből elforgatható az imaginárius  $q^0$  tengelybe.

Végrehajtva még a következő integrációs változó cserét:

$$q_0 \rightarrow iQ_0, \quad \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q} \quad (4b.4)$$

adódik:

$$I = i \int_{-\infty}^{\infty} dQ_0 \int \frac{1}{Q^4} F(-Q^2, iQ_0), \quad (4b.5)$$

ahol:

$$q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = -(Q_0^2 + \mathbf{Q}^2) = -Q^2 \leq 0$$

miatt az integrál már csak térszerű és valódi fotonokat tartalmaz.

$$I = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 Q}{Q^4} \frac{1}{Q^2 + 2miQ_0} \left\{ \left[ -3miQ_0 + 2m^2 \left( \frac{Q_0^2}{Q^2} - 1 \right) \right] T_1(-Q^2, iQ_0) + \left( 1 - \frac{Q_0^2}{Q^2} \right) \left[ imQ_0 + 2m^2 \left( 1 - \frac{Q_0^2}{Q^2} \right) \right] T_2(-Q^2, iQ_0) \right\}. \quad (4b.6)$$

### Diszperziós relációk

A virtuális Compton-amplitúdó megadható fix  $q^2$  mellett  $q^0 = \nu$ -ben felírt diszperziós relációkkal [12].

Vizsgáljuk a virtuális Compton-amplitúdó nagyenergiás tulajdonságait! Regge-



viselkedést feltételezve nagy  $v$  és fix  $q^2$  mellett [12]:

$$\begin{aligned} T_1^{(1)}(q^2, v) &\xrightarrow{v \rightarrow \infty} \beta_1^{(1)}(q^2) v^{\alpha_1(0)} \\ T_2^{(1)}(q^2, v) &\xrightarrow{v \rightarrow \infty} \beta_2^{(1)}(q^2) v^{\alpha_1(0)-2}, \end{aligned} \quad (4b.7)$$

ahol:  $\alpha_1(0)$  az  $\alpha_1$  trajektória  $t=0$ -val való metszéspontja,  $I$ =izospin.

(4b.7)-ből látható, hogy mivel  $\alpha_1(0) \leq 1$  mindig teljesül, (Froissart-korlát)  $T_2(q^2, v)$ -re mindig levonás nélküli diszperziós reláció fog fennállni, míg  $T_1(q^2, v)$ -re csak akkor, ha a vezető Regge-trajektóriára  $\alpha_1(0) < 0$  teljesül. A mérési eredményekből következik, hogy a spinfüggetlen virtuális Compton-amplitúdó nagy energiákon jól leírható a Pomeron, és az  $f-A_2$  trajektóriákat feltételezve. Mind a Pomeronra, mind az  $f-A_2$  trajektóriákra  $\alpha(0) > 0$ , ezért (4b.7)-ből következik, hogy  $T_1(q^2, v)$  levonásos — a Froissart-korlát miatt egy-levonásos — diszperziós relációt elégít ki  $v^2$ -ben. (Crossing miatt:  $T_i(q^2, v) = T_i(q^2, -v)$ .) Tehát:

$$\begin{aligned} T_1(q^2, v) &= T_1(q^2, 0) + \frac{4q^4 G_M^2(q^2) v^2 4M^2}{(q^4 - 4M^2 v^2) q^4} + \frac{v^2}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{dv'^2 \operatorname{Im} T_1(q^2, v')}{v'^2 (v'^2 - v^2)}, \\ T_2(q^2, v) &= \frac{4q^2 (4M^2 G_E^2 - q^2 G_M^2)}{\left( \frac{q^2}{4M^2} - 1 \right) (q^4 - 4M^2 v^2)} + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{dv'^2 \operatorname{Im} T_2(q^2, v')}{v'^2 - v^2}. \end{aligned} \quad (4b.8)$$

Az optikai tétel felhasználásával adódik:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} T_i(q^2, v) = \frac{1}{2\pi} W_i(q^2, v) \quad i = 1, 2. \quad (4b.9)$$

Figyelembe véve a (4b.8) diszperziós előállítást, ill. a (4b.9) optikai tételt és szögek szerint kiintegálva, kapjuk:

$$\begin{aligned} I &= -2\pi i \int_0^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^4} \int_{-Q}^Q \frac{dQ_0}{Q^2 + 2miQ_0} \sqrt{Q^2 - Q_0^2} \left\{ \left[ 2m^2 \left( \frac{Q_0^2}{Q^2} - 1 \right) - 3miQ_0 \right] \left[ T_1(-Q^2, 0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4Q^4 G_M^2(-Q_0^2)}{(Q^4 + 4M^2 Q_0^2) Q^4 / 4M^2} - \frac{Q_0^2}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{dv^2 W_1(-Q^2, v)}{v^2 (v^2 + Q_0^2)} \right] + \left( 1 - \frac{Q_0^2}{Q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ imQ_0 + 2m^2 \left( 1 - \frac{Q_0^2}{Q^2} \right) \right] \left[ \frac{4Q^2 (4M^2 G_E^2 + Q^2 G_M^2)}{\left( 1 + \frac{Q^2}{4M^2} \right) (Q^4 + 4M^2 Q_0^2)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{dv^2 W_2(-Q^2, v)}{v^2 + Q_0^2} \right] \right\} = \\ &= I_1^{\text{levonási}} + I_1^{\text{rugalmas}} + I_1^{\text{rugalmatlan}} + I_2^{\text{rugalmas}} + I_2^{\text{rugalmatlan}}. \end{aligned} \quad (4b.10)$$



A (4b.10) előállítás alapján a teljes  $\Delta E$  járulék így írható: A  $Q_0$  változó szerinti integrálokat elvégezve, az egyes tagokra a következők adódnak:

$$(\Delta E_n)_1^{\text{rugalmas}} = \frac{-4\alpha^2\pi|\psi_n(0)|^2}{m^3} \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^4} G_M^2 \left[ (Q^2 - 2m^2) \sqrt{Q^4 + 4m^2Q^2} - \right. \\ \left. - Q^4 \left( 1 - \frac{m^4}{M^4} \right) + 2 \frac{m^4}{M^2} Q^2 \left( 1 - \frac{Q^2}{2M^2} \right) \sqrt{1 + 4M^2/Q^2} \right]. \quad (4b.12a)$$

$$(\Delta E_n)_2^{\text{rugalmas}} = \frac{4\pi\alpha^2|\psi|^2}{mM^2} \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^4} \frac{4M^2 G_E^2 + Q^2 G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} \left[ Q^2 \left( 1 - \frac{m^2}{M^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{M^2} (Q^2 + 4M^2) \sqrt{1 + \frac{4M^2}{Q^2}} - (Q^2 + 4m^2) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right]. \quad (4b.12b)$$

$$(\Delta E_n)_1^{\text{rugalmatlan}} = \frac{2\alpha^2|\psi|^2}{2m^3} \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^4} \int_{\omega_c}^\infty \frac{dv \cdot v W_1(-Q^2, v)}{(Q^2 - 4m^2\Theta)\Theta} \cdot \\ \cdot \left[ (2m^2Q^2 - Q^4) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} + Q^4 - 16m^4\Theta^2 + 8m^4(2\Theta - 1) \sqrt{\Theta(1 + \Theta)} \right] \quad (4b.12c)$$

$$(\Delta E_n)_2^{\text{rugalmatlan}} = \frac{2\alpha^2}{m} |\psi|^2 \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^4} \int_{\omega_c}^\infty \frac{dv \cdot v W_2(-Q^2, v)}{Q^2 - 4m^2\Theta} \cdot \\ \cdot \left[ Q^2 - 4m^2\Theta + 4m^2(1 + \Theta) \sqrt{\frac{1 + \Theta}{\Theta}} - (Q^2 + 4m^2) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right]. \quad (4b.12d)$$

$$(\Delta E_n)_1^{\text{levonási}} = \frac{\alpha^2\pi}{m^3} |\psi|^2 \int \frac{dQ^2}{Q^4} \left[ (Q^4 - 2m^2Q^2) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} - Q^4 \right] T_1(-Q^2, 0), \quad (4b.12e)$$

ahol

$$\Theta = v^2/Q^2.$$

#### 4. §. c) A virtuális Compton-amplitúdóban fellépő fix pólussal kapcsolatos problémák

A diszperziós relációk felírásánál, a Compton-amplitúdó nagyenergiás viselkedésére szokásos Regge-aszimptotikát tételeztünk fel. Fontos azonban megjegyezni, hogy elektromágneses és gyenge folyamatok esetén az amplitúdók olyan szingularitásokat is tartalmazhatnak, melyek erős kölcsönhatások tárgyalása esetén nem lépnek fel, pl. fix pólusokat a komplex impulzusmomentum síkon. (Az unitaritásból közvetlenül következik, hogy erős kölcsönhatásokra az amplitúdók az impulzusmomentum síkon, a valós tengely olyan pontjaiban, melyeken vágások nem haladnak át, nem tartalmazhatnak fix pólusokat. Ha azonban egy elektromágneses vagy gyenge folyamatot a perturbációs számítás valamilyen rendjében számítunk ki — és így az amplitúdó nem uniter — fix pólusok fellépése nem zárható ki.)

Valódi fotonok Compton-szórását vizsgálva, azt várjuk, hogy nagy energiákon az amplitúdót a Pomeranchuk-trajektória fogja dominálni. Kétségek merülnek fel



azonban, hogy ez az előreszórési amplitúdóban is teljesül-e ( $t=0$ ). Ez egyszerű megfontolásokból látható. Egyszerűség kedvéért vizsgáljuk valódi fotonok Compton-szórását pionokon,  $s$ -csatornában a  $\gamma\pi \rightarrow \gamma\pi$  folyamatot.

Ezt a folyamatot  $s$ -csatornában két független helicitás amplitúdó:  $\langle 1|A^s|1 \rangle$  és  $\langle 1|A^s|-1 \rangle$  írja le. Ezeket a  $t$ -csatornabeli helicitás amplitúdókkal a crossing mátrix kapcsolja össze, ami a jelen esetben igen egyszerű:

$$\langle 1|A^s|1 \rangle = \langle |A^t|1, -1 \rangle; \quad \langle 1|A^s|-1 \rangle = \langle |A^t|1, 1 \rangle.$$

Az  $s$ -csatornában előreszórásra  $\langle 1|A^s|-1 \rangle = 0$ , impulzusmegmaradás miatt, ezért a  $t$ -csatornában csak  $\langle |A^t|1, -1 \rangle$  ad járulékot. Erre a helicitásamplitúdóra  $\lambda=2$ , és így  $J=1$ -re ez egy sense-nonsense amplitúdó, tehát sense-nonsense lecsatolódást feltételezve az amplitúdónak  $J=1$ -re el kell tűnni. Ebből az következik, hogy a Pomeranchuk-trajektória reziduumbüggvénye  $\alpha(t)=1$ -nél, azaz  $t=0$ -nál zérus. Így a pomeron Compton-előreszórásra nem adhat járulékot, tehát:  $\sigma^{\text{tot}}(\gamma\pi) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ . Ugyanez az eredmény adódik akkor is, ha a Compton-szórást nem zérus, hanem feles spinű hadronokon vizsgáljuk. Könnyen belátható, hogy ez az eredmény elfogadhatatlan következtetésekhez vezet. Felhasználva ui., hogy pl. vektor-mezonok fotóprodukcijához a pomeron járulékot ad [13], következik, hogy:

$$\sigma^{\text{inel}}(\gamma p) > \sigma^{\text{tot}}(\gamma p) \quad \text{ha} \quad s \rightarrow \infty.$$

Részletesebb analízis szerint [13], az amplitúdókra a szokásos Regge-analízist elvégezve, a hatáskeresztmetszetekre a következő eredmény adódik:

$$\sigma^{\text{inel}}(\gamma p) \sim \ln^{-1} \frac{s}{s_0} > \sigma^{\text{el}} \sim \ln^{-2} \frac{s}{s_0} > \sigma_{\text{tot}}(\gamma p) \sim \left( \frac{s}{s_0} \right)^{-0,3}.$$

Látható, hogy a pomeron lecsatolása az előreszórési Compton-amplitúdóról komoly nehézségekre vezet. Az ellentmondást feloldandó, ha valamilyen módon a pomeron mégiscsak járulékot tudna adni. Ez teljesül pl. ha az amplitúdó tartalmaz egy  $J=1$  fix pólust — láttuk, hogy ez nem sértene az unitaritást, hiszen az amplitúdót csak a  $\gamma p$ -csatolás legalacsonyabb rendjében számoltuk. Azt kell tehát megvizsgálni, hogy egy ilyen feltevés a mérési eredményekkel összhangban áll-e, ill. hogy kimutatható-e mérésekkel a fix pólus jelenléte.

Ezt az analízist a Compton-amplitúdó nagyenergiás viselkedésére (valódi fotonokra) *Damashek* és *Gilman* [14] végezte el. Megmutatták, hogy a spinre átlagolt előreszórési amplitúdóban az imaginárius rész nagyenergiás függése és a Regge-elmélet alapján várt valós rész mellett fellép egy extra valós állandó, ami nagyságát és előjelét tekintve megegyezik a Thomson limittel.

A virtuális Compton-amplitúdót vizsgálva, számos szerző jutott arra a következtetésre, hogy a fix pólus ebben a folyamatban is szerepet játszik [15, 16, 17, 18].

Nagy  $q^2$ -ekre könnyen belátható, hogy a kísérleti adatokhoz illesztett  $F_1(\omega)$  és  $F_2(\omega)$  skálafüggvények viselkedése, és a Regge-elméleten alapuló analitikussági követelmények ellentmondóak, hacsak a  $T_1(q^2, \nu)$  és  $T_2(q^2, \nu)$  amplitúdók nem tartalmazznak fix pólust. Vizsgáljuk ezt a  $T_2(q^2, \nu)$  amplitúdó esetére! Legyen:

$$\tilde{T}_2(q^2, \nu) = T_2(q^2, \nu) - \sum_{\alpha_i \neq 0} \beta_i(q^2) \nu^{\alpha_i-2} \left( \frac{e^{i\pi\alpha_i} \pm 1}{\sin \pi\alpha_i} \right). \quad (4c.1)$$



Ha az amplitúdó nem tartalmaz további  $\alpha \cong 0$  pólust, akkor fennáll a következő szuperkonvergencia reláció:

$$\int_0^{\infty} dv \cdot v \tilde{W}_2(q^2, v) = 0, \quad (4c.2)$$

ahol:

$$v \tilde{W}_2 = S_2(q^2) \delta \left( v - \frac{q^2}{2M} \right) + v W_2 \Theta \left( v - m_\pi - \frac{q^2 + m_\pi^2}{2M} \right) - \sum \beta_i(q^2) v^{\alpha_i - 1}$$

$$S_2(q^2) = \frac{2q^2}{4M^2 + q^2} \left[ G_E^2(q^2) + \frac{q^2}{4M^2} G_M^2(q^2) \right]. \quad (4c.3)$$

Skálalimeszben, nagy  $v$  és  $q^2$ -re:

$$v W_2(q^2, v) \rightarrow F_2(\omega). \quad (4c.4)$$

Ahhoz, hogy (4c.4) érvényes legyen,  $\sum_i \beta_i(q^2) v^{\alpha_i - 1}$  aszimptotikus alakjának szintén skálainvariánsnak kell lennie: Tehát a  $q^2 \rightarrow \infty$  limitben a szuperkonvergencia reláció:

$$\int_0^{\infty} \tilde{F}_2(\omega) d\omega = 0, \quad \tilde{F}_2(\omega) \equiv F_2(\omega) \Theta(\omega - 1) - \sum_i \gamma_i \omega^{\alpha_i - 1} \quad (4c.6)$$

alakú lesz (a rugalmas formfaktorok  $q^2 \rightarrow \infty$ -re eltűnnek). A fenti szuperkonvergencia relációt a kísérleti adatokkal összevetve az adódik, hogy a bal oldali integrál definit módon nem zérus, a reláció sérül. Ebből az ellentmondásból kiutat jelent, ha a Regge-trajektóriák mellett feltételezünk még egy  $J=0$  fix pólust is. Ekkor  $v \tilde{T}_2(q^2, v)$  aszimptotikus viselkedése:

$$v \tilde{T}_2(q^2, v) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} -\frac{R_2(q^2)}{v} + o\left(\frac{1}{v^{1+\varepsilon}}\right). \quad (4c.7)$$

és a (4c.2) szuperkonvergencia reláció helyett a következő összegszabály érvényes:

$$\int_0^{\infty} dv \cdot v \tilde{W}_2(q^2, v) = \pi \cdot R_2(q^2), \quad (4c.8)$$

illetve  $q^2 \rightarrow \infty$ -re:

$$\int_0^{\infty} d\omega \tilde{F}_2(\omega) = 2M\pi \left[ \lim_{q^2 \rightarrow \infty} \frac{R_2(q^2)}{q^2} \right]. \quad (4c.9)$$

Vizsgáljuk most a (4c.8) relációt a  $q^2 \rightarrow 0$  limitben! Felhasználva, hogy:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \left( \frac{v W_2}{q^2} \right) = \frac{1}{4\pi^2 \alpha} \sigma(v). \quad (4c.10)$$

adódik:

$$1 + \frac{M}{4\pi^2 \alpha} \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}(v) dv = 2M\pi \lim_{q^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{R_2(q^2)}{q^2} \right], \quad (4c.11)$$



ahol:

$$\tilde{\sigma}(v) = \sigma(v) \Theta \left( v - m_\pi - \frac{m_\pi^2}{2M} \right) - \sum \beta_i(0) \cdot v^{z_i-1}.$$

Damashek és Gilman azt találta, hogy valódi fotonokra (4c.11) jobb oldala  $\approx 1$ , tehát:

$$R_2(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{-1}{2M\pi} \cdot q^2. \quad (4c.12)$$

Visszatérve a  $q^2 \rightarrow \infty$  határesetre, a (4c.9) bal oldalán szereplő integrál értékéről a jelenlegi kísérleti adatok alapján annyit állíthatunk biztosan, hogy az véges és nem zérus. Polinomiális reziduumból függvényt feltételezve, ezt a követelményt:

$$R_2(q^2) = C \cdot q^2, \quad (C \text{ valós állandó}) \quad (4c.13)$$

alakú függvények elégítik ki.  $C$  értékét az  $\int_0^\infty d\omega \tilde{F}_2(\omega)$  integrál értéke határozza meg. Ez nem független attól, hogy a skálafüggvényre milyen Regge-viselkedést tételezünk fel.

a) ha  $F_2^{\text{Regge}} = a + b \cdot \omega^{-1/2}$ ,

tehát az amplitúdót a pomeron és az  $f-A_2$  trajektóriák dominálják, akkor

$$\int_0^\infty d\omega \tilde{F}_2(\omega) < 0, \text{ tehát a reziduumból függvény előjelet vált } q^2=0 \text{ és } q^2 \rightarrow \infty \text{ között.}$$

b) ha  $F_2^{\text{Regge}} = a + b \cdot \omega^{-1/2} + C \cdot \omega^{-3/2}$ ,

tehát  $F_2(\omega)$ -hoz járulékot ad még egy  $\alpha = -1/2$  tengelymetszetű trajektória is, akkor az integrál értékére  $\int_0^\infty d\omega \tilde{F}_2(\omega) \cong 1$ , adódik, ebben az esetben tehát a reziduumból függvény valóban polinom, a  $C$  állandó a  $q^2=0$  és  $q^2 \rightarrow \infty$  határesetekben megegyezik.

Hogy a fenti két alternatíva közül a valóságban melyik realizálódik, a mérések alapján egyelőre nem dönthető el. Számos elméleti argumentum szól a b) lehetőség mellett, és ezt támasztják alá a különböző elméleti modellekben elvégzett számítások is: parton modell [16], Drell—Lee-modell [17], fénykúpalgebra. Ezek közös konklúziója a következő:

A  $T_1(q^2, v)$  és  $T_2(q^2, v)$  invariáns Compton-amplitúdók nagyenergiás viselkedése, figyelembe véve a fix pólus járulékát:

$$T_1(q^2, v) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} R_1(q^2), \quad T_2(q^2, v) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} -\frac{1}{v^2} R_2(q^2) \quad (4c.14)$$

ahol a fix pólus reziduumból függvényei:

$$R_1(Q^2) = -\frac{1}{2M\pi}, \quad R_2(Q^2) = -\frac{1}{2M\pi} Q^2. \quad (4c.15)$$

A továbbiak során a (4c.15) eredményt fogadjuk el.

Definiáljuk a longitudinális Compton-amplitúdót a következő összefüggéssel:

$$T_l(v, q^2) = T_1(v, q^2) + \frac{v^2}{q^2} T_2(v, q^2). \quad (4c.16)$$



A fix pólus reziduumfüggvényeinek (4c.15) alakját felhasználva látható, hogy  $T(v, q^2)$ -hez a fix pólus nem ad járulékot. Másrészt láttuk, hogy a jelenlegi mérési adatokkal összefér, hogy nagy energiákon longitudinális-hatáskeresztmetszet zérushoz tart:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_L / \sigma_T = 0$$

Ezt a két feltevést elfogadva, következik, hogy  $T_L(v, q^2) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$  és így  $T_L(v, q^2)$  levonás nélküli diszperziós relációt elégít ki.

$$T_L(v, -Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{v_t}^{\infty} \frac{v' W_L(v', Q^2) dv'}{v'^2 - v^2} + \frac{4Q^4}{4M^2 v^2 + Q^2} \frac{G_M^2 - G_E^2}{1 + Q^2/4M^2}. \quad (4c.17)$$

A Lamb-eltolódás számítása szempontjából ez nagyon fontos következtetés: láttuk ui. hogy a proton szerkezeti korrekció a következő tagok összegeként állítható elő:

$$\Delta E_n = \sum_{i=1,2} \{ \Delta E_i^{\text{rugalmas}} + \Delta E_i^{\text{rugalmatlan}} \} + \Delta E_1^{\text{levonási}}$$

Az első négy tag járuléka a Born-tagok, ill. a  $W_1(q^2, v)$  és  $W_2(q^2, v)$  függvények teljes  $q^2-v$  síkbeli viselkedésének ismeretében numerikusan meghatározható. Problémát csak a  $\Delta E_1^{\text{levonási}}$  járulék meghatározása jelenthet (pontosabban a  $T_1(-Q^2, 0)$  levonási állandó meghatározása). Az eddigi mérési eredményeken túlmenő elméleti feltevések nélkül ez a probléma nem is oldható meg. Azonban könnyen belátható, hogy az eddigiekben tárgyalt két — a mérési eredményekkel összeférő — feltevés:

1. A fix pólus reziduumfüggvénye  $q^2$  polinomja

$$2. \lim_{v \rightarrow \infty} (\sigma_L / \sigma_T) = 0$$

lehetővé teszi a levonási állandó meghatározását. A longitudinális amplitúdó definíciójából ui.  $v=0$ -ra következik:

$$T_L(0, q^2) = T_1(0, q^2), \quad (4c.18)$$

tehát a (4c.17) diszperziós reláció  $v=0$ -ra egyúttal a levonási állandó értékét is meghatározza.

$$T_1(0, -Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{v_t}^{\infty} \frac{W_1(v, -Q^2) dv}{v} + 16M^2 Q^2 \frac{G_M^2 - G_E^2}{4M^2 + Q^2}. \quad (4c.19)$$

#### 4. §. d) Numerikus eredmények

A 4b. és 4c. §-ok eredményeit, ill. (az utóbbi) feltevéseit elfogadva, a proton szerkezeti korrekció értéke most már numerikusan is meghatározható: az energia-eltolódást olyan integrálok adják, melyek explicit kinematikai faktork mellett csak a  $W_1(Q^2, v)$  és  $W_2(Q^2, v)$  spinfüggetlen szerkezeti függvényeket tartalmazzák.

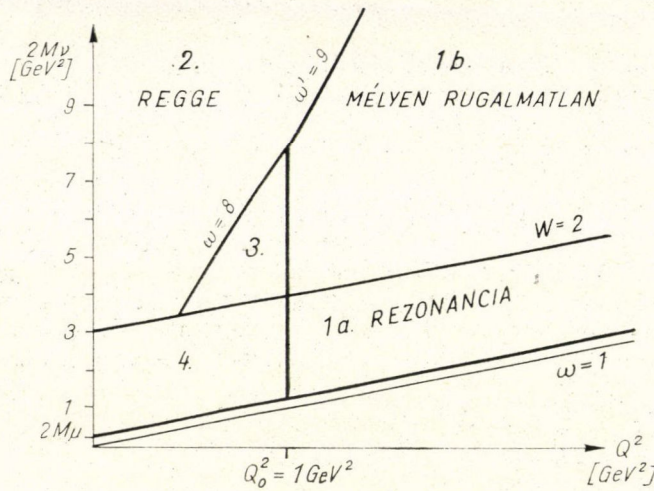
A mérések a  $Q^2-v$  sík kinematikai tartományának ( $Q^2 \geq 0$ ,  $\omega \geq 1$ ) egy jelentős részében megadják ezeknek a függvényeknek a viselkedését, azokra a tartományokra pedig, melyekre mérési adat nincs, az irodalomból ismert elméleti fitek alkalmazhatók.



Konkrétan a  $W_1(Q^2, \nu)$  és  $W_2(Q^2, \nu)$  függvények a teljes  $Q^2 - \nu$  síkbeli előállítására a következő elméleti és kísérleti forrásokon alapul:

1. mért fotóabszorpciós hatáskeresztmetszetek (valódi fotonok,  $Q^2=0$ );
2. rugalmatlan  $e-p$  szórásadatok. (SLAC—MIT mérés, 1.3. §);
3. a rugalmatlan  $e-p$  szórás szerkezeti függvényeinek Breidenbach—Kuti fitje [19].

Ezek a  $Q^2 - \nu$  sík 1. és 2. tartományában (1.6. ábra), továbbá a  $Q^2=0$  (valódi foton) tengely mentén adják meg a  $W_1$  és  $W_2$  függvényeket. A „kimaradt” 3. és 4. tartományokban, feltéve, hogy itt a szerkezeti függvények — alkalmasan választott változóiban — simán viselkednek, a formfaktorokat jól közelítjük a határoló tartományok közötti lineáris interpolációval.



6. ábra

A számításokhoz felhasznált analitikus függvényalakok a következők: (a pontos numerikus faktorokat l. [19])

1.  $Q^2 \geq Q_0^2$ ,  $\omega' \leq 9$  tartomány
- ( $W \geq 2$  mélyen rugalmatlan +  $W \leq 2$  rezonancia) -tartomány.

Itt  $\nu W_2(Q^2, \nu)$  a következő alakba írható:

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = F_2(\omega') [R(W) + B(W)]$$

- a)  $W \leq 2$  GeV-re (rezonancia tartomány 1.3. § 1. ábra)

$$R(W) = \sum_i \alpha_i R_i(W) \quad \text{a rezonanciákat}$$

(relativisztikus Breit—Wigner formulák)

$$B(W) = 1 - \sum \frac{b_i}{(1 + W - W_i)^2} \quad \text{a sima hátteret}$$

} veszi figyelembe

- b)  $W \geq 2$  GeV-re (mélyen rugalmatlan tartomány, 1.2. ábra).



Itt  $R(W) \rightarrow 0$  és  $B(W) \rightarrow 1$ , így:

$$vW_2(Q^2, v) \xrightarrow{W \gg 2} F_2(\omega')$$

$$F_2(\omega') = C_1 \left(1 - \frac{1}{\omega'}\right)^3 + C_2 \left(1 - \frac{1}{\omega'}\right)^4 + C_3 \left(1 - \frac{1}{\omega'}\right)^5.$$

a  $W_1(Q^2, v)$  függvényt az 1a) és 1b) tartományokban a

$$2MW_1(Q^2, v) = 2M \frac{1}{1+R} \left(1 + \frac{v}{Q^2}\right) W_2(Q^2, v)$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg.

$$2. \text{ Regge tartomány } W \cong 2 \text{ GeV} \begin{cases} Q^2 \cong Q_0^2 & \omega \cong 8 \\ Q^2 \cong Q_0^2 & \omega' \cong 9. \end{cases}$$

$$vW_2(Q^2, v) = C_1 \frac{Q^2}{Q_1^2 + Q^2} + C_2 \sqrt{\frac{Q^2}{Q_1^2 + Q^2}} \cdot \omega^{-1/2}, \quad Q_1^2 = 0,26 \text{ GeV}^2$$

$$2MW_1(Q^2, v) = D_1 \frac{Q^2}{Q_2^2 + Q^2} \cdot \omega + D_2 \sqrt{\frac{Q^2}{Q_2^2 + Q^2}} \cdot \omega^{1/2}.$$

Az  $R \rightarrow 0$  ( $\sigma_L \rightarrow 0$  valódi fotonokra) feltételből és a  $R \xrightarrow{\omega \gg 1} 0,18$  feltételből a numerikus paraméterekre a következő megszorítások adódnak:

$$R \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} 0 \quad C_1 \cdot Q_2^2 = D_1 \cdot Q_1^2 \quad \text{és} \quad C_2 \cdot Q_2^2 = D_2 \cdot Q_1^2$$

$$R \xrightarrow{\omega \gg 1} 0,18 \quad C_1 - D_1 = 0,18 D_1.$$

3. A  $W \geq 2$ ,  $Q^2 \leq Q_0^2$  és  $\omega \leq 8$  tartományban a  $W_1(Q^2, v)$  és  $W_2(Q^2, v)$  szerkezeti függvények rögzített  $W$  mellett, közelíthetők  $Q^2$ -ben lineáris interpolációval az 1b) és 2. tartományok között.

4.  $W \leq 2$  és  $Q^2 \leq Q_0^2$ .

A tartomány  $Q^2 = Q_0^2$  (rezonancia tartomány) és  $Q^2 = 0$  (fotoabszorpció) határain ismert a szerkezeti függvények viselkedése.

$$\text{A } Q^2 = 0 \text{ határon: } \lim_{Q^2 \rightarrow 0} W_2(Q^2, v)/Q^2 = \frac{M^2}{4\pi^2 \alpha^2} \sigma_T(v),$$

ahol  $\sigma_T(v)$  a valódi  $\gamma$ -proton szórás teljes hatáskeresztmetszete.

A  $W_2(Q^2, v)/Q^2$  függvény rögzített  $W$  mellett ismét előállítható a 4. tartományon belül  $Q^2 = 0$  és  $Q^2 = Q_0^2$  közötti lineáris interpolációval. Ugyanitt a  $W_1(Q^2, v)$  függvény a

$$W_1(Q^2, v) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} \frac{M^2}{4\pi^2 \alpha^2 (1+R)} v\sigma_T(v), \quad R \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} 0$$

összefüggéssel adott.

Az energiaeltolódást megadó (4b.12) formulák igen bonyolult kinematikai függvényeket tartalmaznak. Ezekről azonban könnyen megmutatható, hogy a  $Q^2$  változóban 3 tartományra bontva a  $Q^2 - v$  síkot, ( $Q^2 < m^2$ ,  $m^2 < Q^2 < M^2$  és  $Q^2 > M^2$ )



ezek a függvények jó közelítéssel egyszerű kifejezésekkel helyettesíthetők. Így például a  $\Delta E^{(2)}$  járulék a következő alakba írható:

$$\Delta E_n^{(2)} = \frac{2\alpha^2}{m} |\psi_n(0)|^2 \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^4} \int_{v_t}^\infty dv \cdot v W_2(Q^2, v) \Phi_2(Q^2, v),$$

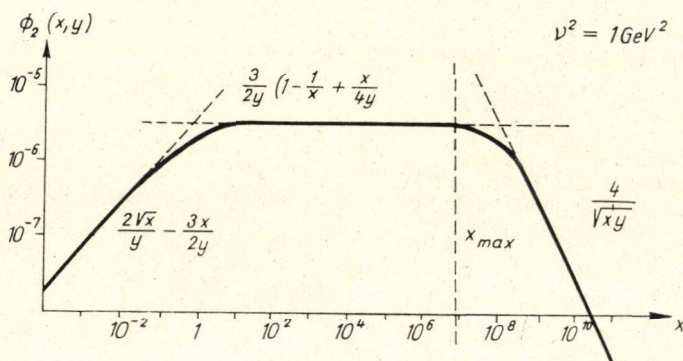
ahol:

$$\Phi_2(Q^2, v) = \frac{1}{Q^2 - 4m^2 \Theta} \left[ Q^2 - 4m^2 \Theta + 4m^2 (1 + \Theta) \sqrt{\frac{1 + \Theta}{\Theta}} - (Q^2 + 4m^2) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right].$$

Bevezetve a  $Q^2 = x \cdot m_l^2$  és  $v^2 = y \cdot m_l^2$  jelölést:

$$\Phi_2(x, y) = 1 - \sqrt{1 + \frac{x}{y}} + \frac{4+x}{y} \left\{ \sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{x}{y}} \right\}^{-1}$$

alakba írható. Ábrázolva ezt a függvényt, a következő függvényalak adódik:



7. ábra

(ahol  $x_{\max}$  jelöli azt az  $x$  értéket, ameddig rögzített  $y$  mellett  $x$ -ben integrálni kell).

$$\Phi_2(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{xy}} & \text{ha } x \gg y \\ \frac{3}{2y} & \text{ha } 1 \ll x \ll y \\ \frac{2\sqrt{x}}{y} & \text{ha } x \ll 1 \end{cases}$$

Belátható, hogy 50%-nál kisebb hibát vétünk, ha  $\Phi_2(x, y)$ -t az előbbi aszimptotikus alakokkal helyettesítjük a megfelelő tartományokban.



Így már a  $\Delta E_n^{(2)}$  járulék könnyen meghatározható:

I. Ha  $Q^2 < (3m/4)^2$ .

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(2)}|_I &= \frac{2\alpha^2}{m} |\psi_n(0)|^2 \int_0^{3m/4} \frac{2Q dQ}{Q^4} \int_{v_t}^{\infty} dv \cdot v W_2(Q^2, v) \cdot \frac{2mQ}{v^2} = \\ &= 8\alpha^2 |\psi_n(0)|^2 \int_0^{3m/4} dQ \cdot \int_{v_t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left[ \frac{v W_2}{Q^2} \right]_{Q^2 \rightarrow 0}.\end{aligned}$$

Mivel  $Q^2 < m^2$ , ebben a tartományban jogos a

$$\frac{v W_2(Q^2, v)}{Q^2} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\sigma_T(v)}{4\pi^2 \alpha}$$

helyettesítés, ahol  $\sigma_T(v)$  a fotoabszorpció teljes hatáskeresztmetszet valódi fotonok Compton-szórására és így:

$$\Delta E_n^{(2)}|_I = 8\alpha^2 |\psi_n(0)|^2 \frac{3m}{4} \frac{1}{4\pi^2 \alpha} \int_{v_t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \sigma_T(v).$$

Alacsonyenergiás tételek felhasználásával a jobb oldalon szereplő integrál a proton dinamikus polarizálhatóságával hozható kapcsolatba. Nevezetesen, érvényes a következő összesszabály [20]:

$$\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{v_t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \sigma_T(v),$$

ahol  $\alpha_{\text{pol}}$  és  $\beta_{\text{pol}}$  a proton dinamikus elektromos, ill. mágneses polarizálhatósága. (A Compton-szórásban mért dinamikus polarizálhatóság a külső térben mért statikus polarizálhatóságtól  $(\alpha_0, \beta_0)$  — melynek definíciója: külső térben levő protonra a Hamilton-operátor:  $H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \alpha_0 E^2 + \frac{1}{2} \beta_0 H^2$  — nukleon visszalökődési effektusok miatt különbözik.)

A mérések alapján:

$$\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}} = 1,0 \cdot 10^{-42} \text{ cm}^3 \sim \frac{1}{8M^3},$$

tehát végül:

$$\Delta E_n^{(2)}|_I = 6m\alpha |\psi_n(0)|^2 \cdot (\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}}).$$

II. A  $Q^2 > M^2$  tartomány járuléka.

$$\Delta E_n^{(2)}|_{II} = 3m\alpha^2 \frac{1}{M^3} |\psi_n(0)|^2 \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} F_2(\omega)}_{o(1)}$$

tehát  $\Delta E_n^{(2)}|_{II} \sim \alpha$ -rendben kisebb mint az I. tartomány járuléka.

III. Átmeneti tartomány  $\left(\frac{3m}{4}\right)^2 < Q^2 < M^2$



a)  $v > 2M$  Regge tartomány.

$$\Delta E_n^{(2)}|_{\text{Regge}} = 2\alpha^2 |\psi_n(0)|^2 \frac{m}{M^3} \log \frac{M}{m},$$

ami ismét  $\alpha$ -rendben kisebb az I. tartomány járuléknál.

b)  $v < 2M$  Rezonancia tartomány.

$$\Delta E_n^{(2)}|_{\text{III b}} = 6m\alpha |\psi_n(0)|^2 \ln \frac{M}{m} (\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}}).$$

Tehát  $\Delta E_n^{(2)}$ -höz a teljes  $[Q^2 - v]$  sík két tartománya ad számottevő járulékot:

$$\left. \begin{array}{l} \text{az I. } Q^2 < \left(\frac{3m}{4}\right)^2, \quad v_t < v < \infty \\ \text{és III. b) } \left(\frac{3m}{4}\right)^2 < Q^2 < M^2, \quad v < 2M \end{array} \right\} \text{ tartományok,}$$

és ezek járuléka összesen:

$$\Delta E_n^{(2)} = 6m\alpha |\psi_n(0)|^2 (\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}}) \left\{ 1 + \ln \frac{M}{m} \right\}.$$

Hasonlóan számítható ki a szinteltolódás a további két járulékra  $\Delta E_n^{(1)}$  és  $\Delta E_n^{\text{levonási}}$ -ra is. A kinematikai függvényekre ekkor a következő egyszerű közelítések alkalmazhatók:

$$\Phi_1(Q^2, v) = \begin{cases} \frac{3m^2 Q^2}{2v^2} & \text{ha } Q^2 \ll m^2 \\ \frac{2m^4 Q^2}{v^4} & \text{ha } m^2 \ll Q^2 \ll M^2 \\ \frac{6m^4}{v^2} & \text{ha } Q^2 \gg v^2. \end{cases}$$

$$\Phi_I(Q^2, v) = \begin{cases} -4m^3 Q & \text{ha } Q^2 \ll m^2 \\ -6m^4 & \text{ha } Q^2 \gg m^2. \end{cases}$$

Továbbra is igaz, hogy a fő járulékok az I. és III. b) tartományokból adódnak, és végül a Lamb-eltolódás proton-polarizálhatósági járuléka a proton dinamikus polarizálhatóságával fejezhető ki.

Eredőben ez a járulék:

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= -m\alpha |\psi_n(0)|^2 (\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}}) \left\{ 2 \ln \frac{M}{m_l} + 4 \right\} = \\ &= -\frac{1}{32\pi} (m\alpha^4) \left( \frac{m}{M} \right)^3 \left\{ \ln \frac{M}{m_l} + 2 \right\}. \end{aligned}$$

Hidrogénatom esetén ez az érték numerikusan:

$$\Delta E_n = 2,22 \cdot 10^{-20} \text{ MeV} \sim 53,71 \text{ MHz} = 0,05 \text{ ppm},$$

ami elhanyagolhatóan kicsi a mérés (50 ppm) pontosságához képest.



### 5. §. Az eredmények alkalmazása müon-hidrogénre

A müon-hidrogén  $\mu^- - p$  kötött rendszer. A H-atomra vonatkozó eredmények a müon—elektron univerzalitás felhasználásával egyszerűen átvihetők müon-hidrogénre. A müon—elektron univerzalitáson azt értjük, hogy a tömegtől (és ebből eredő hatásoktól) eltekintve, az elektron és a müon azonos tulajdonságokkal rendelkezik, és minden kölcsönhatásukra a következő tulajdonság jellemző: bármely reakció hatáskeresztmetszetében a

$$\mu^- (\mu^+) \leftrightarrow e^- (e^+)$$

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) \leftrightarrow \nu_e (\bar{\nu}_e)$$

helyettesítés, egyszerűen egy formális  $m_\mu \leftrightarrow m_e$  cserével ekvivalens. Ez a tulajdonság számos kérdést vet fel [21]. Léteznek-e nehezebb töltött leptonok? Ha nem léteznek, miért van két töltött lepton? Valóban pontszerű részek-e a leptonok vagy csak még nem észleltük a szerkezetüket? Végül: vannak-e eddig még fel nem ismert különbségek az elektron és a müon között?

A fenti kérdések kísérleti vizsgálata két irányba is folyik:

1. kísérletek az elektron-müon család nehezebb tagjainak megtalálására.

A kísérletek egészen  $M_l \leq 3,5$  GeV-ig eddig negatív eredményre vezettek: nem találtak ebben az energiatartományban töltött nehéz leptonokat ( $\tau > 10^{-9}$  s élet-tartam).

2. A müon és elektron tulajdonságainak még pontosabb összehasonlítása, annak reményében, hogy valami eddig még fel nem ismert különbséget találnak. Erre ismét két lehetőség kínálkozik:

a) eddig még nem vizsgált tulajdonságok mérése. Ebbe a csoportba tartozik a rugalmatlan lepton-nukleon szórás beható vizsgálata. Ha létezik valami olyan anomális müon-hadron kölcsönhatás, ami az elektronokra nem megengedett, akkor ennek a mélyen rugalmatlan hatáskeresztmetszetekben jelentkezni kell;

b) az eddig ismert tulajdonságok még pontosabb mérése (pl. anomális mágneses momentum).

Mint arra majd e § végén még visszatérünk, az anomális müon-hadron kölcsönhatás — ha létezik — a müon-hidrogén spektrumára is hatással lehet, és ha ez az effektus esetleg egy mérhető szinteltolódást ad, a müon-hidrogén spektrumának vizsgálata szintén egy módszer lehet a müon-elektron különbségek kutatásában.

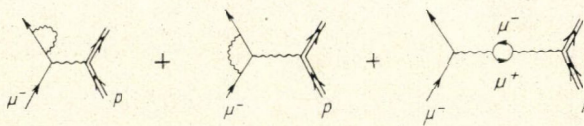
Foglaljuk össze röviden a müon-hidrogén spektrumára vonatkozó eddigi ismereteinket!

Kvantummechanikában a müon-hidrogént ugyanaz a Dirac-egyenlet írja le, mint a közönséges H-atomot (ha formálisan végrehajtjuk az  $m_e \rightarrow m_\mu$  helyettesítést). Az atomban kötött müon energiájának lehetséges értékei:

$$E_{n,j}^{(\mu, -p)} = \underbrace{m_\mu c^2}_{\text{nyugalmi energia}} - \underbrace{\frac{m_\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}}_{\text{durva szerkezet}} + \underbrace{\frac{m_\mu e^8}{2\hbar^4 c^2 n^4} \left( \frac{3}{4} - \frac{n}{j+1/2} \right)}_{\text{finom szerkezet}} + \dots$$

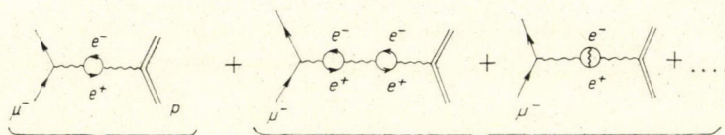


Kvantumtérelméletben a kötött  $\mu^-p$  rendszer az elektron-proton rendszeréhez hasonló Bethe—Salpeter-egyenletet elégíti ki, az irreducibilis betétrészekben  $e^-(e^+) \rightarrow \mu^-(\mu^+)$  helyettesítéssel. A Lamb-eltolódás számítása során a szokásos Lamb-shift gráfok szinteltolódást eredményeznek (ez egyszerűen az  $m_e \rightarrow m_\mu$  helyettesítéssel megkapható).



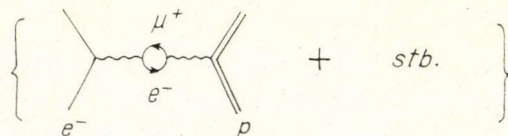
$$\Delta E (2S_{1/2} \ 2P_{1/2}) = 4,9 \cdot 10^{-3} \alpha^2 R_y \quad , \quad R_y = \frac{m_\mu \alpha^2}{2}$$

Bonyolultabbá válik a helyzet akkor, ha egy olyan folyamat nívó-módosító hatását kívánjuk meghatározni, melyben müonok és elektronok egyaránt szerepelnek, pl. a



(a) (b)

folyamatok megfelelői a H-atom spektrumában nem adnak mérhető korrekciót. Itt viszont éppen ezek a gráfok fogják a legjelentősebb járulékat adni. Ez szemléletesen érthető is, mivel az elektron vákuumpolarizáció a foton propagátort olyan



+ stb.

$R_\mu$  távolságokon módosítja jelentősen, ahol:  $R_\mu \sim \hbar = \hbar_\mu / m_e c$  (elektron Compton-hullámhossz). Ugyanebbe a nagyságrendbe esik a müon Bohr-pályasugara müon-hidrogénben:  $r_B^\mu \sim \hbar / \alpha m_\mu c$  így érthető, hogy a  $(\mu^-p)$  rendszer igen érzékeny erre az effektusra.

Ugyanígy az is világos, hogy normál hidrogénre a megfelelő paraméterekre  $R_e \sim \alpha \frac{m_e}{m_\mu}$ .

•  $r_B^\mu$ : a müon-vákuumpolarizáció olyan kis távolságokra módosítja a Coulomb-potenciált, ahol az elektron nem fordul elő számottevő valószínűséggel.

A müon hidrogén Lamb-eltolódásához az (a) és (b) gráfok a következő járulékat adják:

(a)  $(-1,4927 \pm 0,0006) \alpha^2 R_y$ ,

(b)  $(-0,0112) \alpha^2 R_y$ .

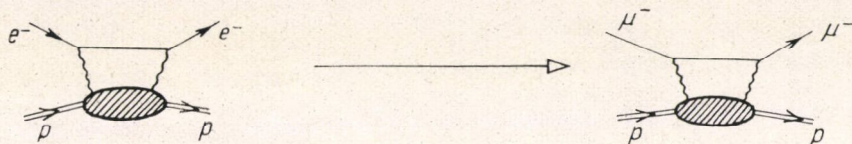


A véges méret korrekció:  $(0,0258 \pm 0,0006)\alpha^2 \text{Ry}$ . Mindezek járuléka eredőben:

$$\Delta E(2S_{1/2}) - \Delta E(2P_{1/2}) = (-1,4929 \pm 0,0006)\alpha^2 \text{Ry}$$

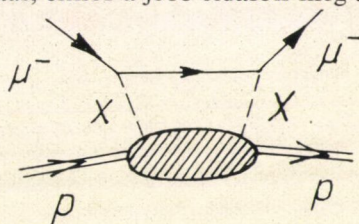
szinteltolódást ad.

A proton polarizálhatósági járulék, elfogadva a müon-elektron univerzalitást, az előző fejezet eredményei alapján aránylag egyszerűen megkapható. A csere ebben az esetben egyszerűen  $m_e \rightarrow m_\mu$  helyettesítést jelent. (Más a helyzet ha létezik anomális



müon-hadron kölcsönhatás, ekkor a jobb oldalon még további tagok is szerepelnek,

melyeket általában a



gráffal jellemezhetünk,

ahol  $X$  jelenti az anomális kölcsönhatást közvetítő részecskét ( $J=0$ , tömeg:  $M_X$ ). Ez a részecske lehet hadron, (esetleg több is) vagy egy — még eddig ismeretlen — nehéz foton.)

A müon-hidrogén Lamb-eltolódásának mérése:

H-gázon müon-nyalábot átvezetve müon-hidrogén keletkezik. Ennek nagy része alapállapotban, kis hányada pedig a  $2S$  gerjesztett állapotban van. Ez az utóbbi meta-stabil állapot. Mikrohullámú generátorral indukálható a  $2S \rightarrow 2P$  átmenet, ami azt eredményezi, hogy a  $2P \rightarrow 1S$  (1,9 keV)  $\gamma$ -sugarak intenzitása megnő.

Kérdés, milyen ponossággal határozható meg a  $2S \rightarrow 2P$  átmenetet indukáló rezonancia-frekvencia? A jelenlegi kísérleti technika szerint maximálisan:<sup>22</sup>

$$\hbar\omega \sim 10^{-4} \alpha^2 \text{Ry}$$

pontosság érhető el. A protonszerkezeti korrekció tehát akkor válik érdekessé, ha numerikus értéke ezzel a korláttal nagyságrendileg összemérhető.

A müon-hidrogén Lamb-eltolódásának protonszerkezeti korrekciója.

A 4. § b)-ben kapott eredmények minden további nélkül alkalmazhatók müon-hidrogénre,  $\Delta E$  kifejezésében az elektron tömegét müon-tömeggel helyettesítve.

A számítás ugyanúgy végezhető el, mint a 4. § d)-ban, és az eredmény a kö-

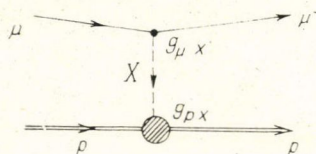


vetkező:

$$\begin{aligned}\Delta E_\mu &= (-m_\mu \alpha) |\psi_n(0)|^2 (\alpha_{\text{pol}} + \beta_{\text{pol}}) \left\{ 2 \ln \frac{M}{m_\mu} + 4 \right\} = \\ &= -\frac{1}{32\pi} (m_\mu \alpha^4) \left( \frac{m_\mu}{M} \right)^3 \left\{ \ln \frac{M}{m_\mu} + 2 \right\} = \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left( \frac{m_\mu}{M} \right)^3 \left( \ln \frac{M}{m_\mu} + 2 \right) \alpha^2 \text{ Ry} = 1,2 \cdot 10^{-4} \alpha^2 \text{ Ry} = \\ &= 4,121 \cdot 10^3 \text{ MHz} = 80 \text{ ppm},\end{aligned}$$

ami a mérés pontosságával (100 ppm) összemérhető.

Végül egy egyszerű modellen megvizsgálható, hogy módosítaná egy anómális müon-hadron kölcsönhatás a müon-hidrogén spektrumát. A már előbbieken említett  $X$ -hadron csere:



$$\Delta E_X = \frac{g_{\mu X} g_{p X}}{M_X^2} |\psi_n(0)|^2$$

mértékű szinteltolódást okoz.

Összehasonlítva ezt a fenti polarizálhatósági járulékkal:

$$\delta_X = \left| \frac{\Delta E_X}{\Delta E_{2\gamma}} \right| = \frac{16\pi}{5} \frac{g_{\mu X} \cdot g_{p X}}{e^2} \frac{M}{m_\mu} \frac{M^2}{M_X^2}.$$

A jelenlegi mérési adatok és elméleti megfontolások [21], a szereplő paraméterekre a következő megszorításokat adják:

$$\frac{g_{\mu X} g_{p X}}{e^2} \lesssim 0,05$$

$$M_X^2 = (0,2 \pm 0,4) \cdot M^2.$$

Ezekkel az adatokkal a  $\delta_X$  paraméter értéke akár 10–50 is lehet, ami mindenképpen mérhető effektust jelent. Ha ilyen anomáliát a Lamb-eltolódás mérése nem mutat ki, az egyúttal a fenti paraméterekre is egy élesebb megszorítást fog adni.

## Függelék

### A) Jelölések és definíciók

*Metrikus tenzor:*

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



Dirac mátrixok:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2g^{\mu\nu}, \quad \beta = \gamma^0, \quad \alpha = \gamma^0 \cdot \gamma$$

konkrét reprezentációja:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}$$

Pauli mátrixok:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

Állapotok normálása:

$$\langle \mathbf{p}, s | \mathbf{p}', s' \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 2p_0 \cdot \delta_{ss'}.$$

Spinorok normálása:

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) = 2m.$$

Energiaprojekciós operátorok:

$$\Lambda_{\pm}^{(i)}(\mathbf{p}) = \frac{E_i(\mathbf{p}) \pm H_i(\mathbf{p})}{2E_i(\mathbf{p})}$$

$$\left. \begin{aligned} H_e(\mathbf{p}) &= m\beta + \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} \\ H_p(\mathbf{p}) &= M\beta - \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \right\} \text{ tömegközépponti rendszerben}$$

Fourier transzformáció:

$$\Phi(p) = \int F(x) e^{ipx} d^4x$$

$$F(x) = (2\pi)^{-4} \int \Phi(p) e^{-ipx} d^4p.$$

Virtuális Compton amplitúdó:

$$\bar{U}(\mathbf{p}_1) C_{\mu\nu}(x, p_1 p_2) U(\mathbf{p}_2) = \langle p_1 | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | p_2 \rangle = -4M\pi i T_{\mu\nu}(x; p_1, p_2).$$

Az előreszórési virtuális Compton-amplitúdó spinfüggetlen, szimmetrikus részének Lorentz-invariáns kifejtése:

$$\tau_{\mu\nu}^S(q^2, \nu) = \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) T_1(q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} \left( P_\mu - \frac{M\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{M\nu}{q^2} q_\nu \right) T_2(q^2, \nu).$$

$$\dim [T_1] = \dim [T_2] = \text{tömeg}^{-1}$$

$$\nu = \frac{(Pq)}{M}, \quad Q^2 = -q^2 \geq 0, \quad \Theta = \nu^2/Q^2.$$

Optikai tétel:

$$\frac{1}{\pi} \text{Im } T_i(q^2, \nu) = \frac{1}{2\pi} W_i(q^2, \nu) \quad q^2 \leq 0\text{-ra.}$$



Kétreścseke Green-függvény:

$$G(x_a x_b, y_a y_b) \equiv \langle 0 | T \{ \psi(x_a) \Phi(x_b) \bar{\psi}(y_a) \bar{\Phi}(y_b) \} | 0 \rangle.$$

$$X = \mu_m x_a + \mu_M x_b \quad x = x_a - x_b \quad y = y_a - y_b.$$

$$\mu_m = m/(m+M) \quad \mu_M = M/(m+M).$$

Impulzustérben:

$$G(p, q; P) = \int d^4 x \int d^4 y \int d^4(X-Y) e^{ipx} e^{-iqy} e^{iP(X-Y)} G(x, y; X-Y)$$

a következő egyenletnek tesz eleget:

$$\begin{aligned} & (\mu_m \hat{P} + \hat{p} - m) (\mu_M \hat{P} - \hat{p} - M) G(p, q; P) = \\ & = -(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q) - (2\pi)^{-4} \int d^4 p' I(p, p', P) G(p', q; P). \end{aligned}$$

A kötött állapot Bethe—Salpeter-hullámfüggvénye:

$$\psi(x_a, x_b; P) \equiv \langle 0 | T \{ \psi(x_a) \Phi(x_b) \} | B \rangle.$$

A tömegközéppont mozgását leválasztva:

$$\psi(p, P) = (2\pi)^{-3/2} \cdot e^{-iPX} \cdot \psi(p).$$

$\psi(p)$  a következő Bethe—Salpeter-egyenletet elégíti ki:

$$(\mu_m \hat{P} + \hat{p} - m) (M + \hat{p} - \mu_M \hat{P}) \psi(p) = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} I(p, p'; P) \psi(p'),$$

(ahol  $p, p'$  a két részecske relatív impulzusa kezdeti, és végállapotban,  $P$  a tömegközéppont négyesimpulzusa).

*Perturbációs számítás:*

Ha  $\Delta I_E$  a Coulomb-kölcsönhatáshoz képest kis perturbáció, az energiaszint eltolódása:

$$\Delta E_n = \frac{-i\pi^2}{Mm} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_n(p) \Delta I_E(p, p') \psi_n(p').$$

B) A Bethe—Salpeter hullámfüggvények tulajdonságai. Perturbációs számítás.

A H-atomot leíró Bethe—Salpeter-egyenlet:

$$\hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon) \psi_n(p) = (-\beta^e \beta^p) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} I(p, p'; P) \psi_n(p') \quad (\text{B.1})$$

ahol:

$$\hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon) = (\mu_m E + \epsilon - \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} - m\beta) (\mu_M E - \epsilon + \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} - M\beta).$$

A perturbálatlan egyenlet (B.1), magfüggvénynek a longitudinális fotoncserét — Coulomb-kölcsönhatást — választva:

$$I(p, p'; P) \rightarrow I_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \equiv I_0(\mathbf{k}). \quad (\text{B.2})$$



Legyen:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \cdot \psi(\mathbf{p}, \epsilon). \quad (\text{B.3})$$

Ez a  $\Phi(\mathbf{p})$  függvény a következő egyenletnek tesz eleget:

$$\{E - H_e(\mathbf{p}) - H_p(\mathbf{p})\} \Phi(\mathbf{p}) = 2\pi i \{A_+^e A_+^p - A_-^e A_-^p\} \frac{-\beta^e \beta^p}{(2\pi)^4} \int d^3 k I_0(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (\text{B.4})$$

Definiálja  $\chi(\mathbf{p})$ -t a következő összefüggés:

$$\Phi(\mathbf{p}) = (A_+ A_+ - A_- A_-) \chi(\mathbf{p}). \quad (\text{B.5})$$

Akkor  $\chi(\mathbf{p})$  a következő egyenletnek tesz eleget:

$$\frac{\beta^e \beta^p}{i} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} I_0(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = \{E - H_e(\mathbf{p}) - H_p(\mathbf{p})\} \chi(\mathbf{p}), \quad (\text{B.6})$$

és:

$$\psi(\mathbf{p}, \epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \hat{F}^{-1}(\mathbf{p}, \epsilon) \{E - H_e(\mathbf{p}) - H_p(\mathbf{p})\} \chi(\mathbf{p}). \quad (\text{B.7})$$

A (B.4) egyenlet extrém nem relativisztikus közelítésben a Schrödinger-egyenletbe,  $\Phi(\mathbf{p})$  a Schrödinger-hullámfüggvénybe megy át. Defináljuk a B.S. hullámfüggvények normálását úgy, hogy extrém nem relativisztikus közelítésben a megfelelő Schrödinger-hullámfüggvények normája koordinátatérben 1 legyen. Ez teljesül, ha:

$$\int \bar{\chi}(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}) d^3 p = 4mM(2\pi)^3. \quad (\text{B.8})$$

Legyen:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{p}) = A_i^e A_j^p \Phi(\mathbf{p}). \quad (\text{B.9})$$

A (B.4) egyenlet megoldásainak nagyságrendi viszonyai  $|\mathbf{p}|=p$  függvényében [3]:

$p$	$p < \alpha m$	$\alpha m < p < m$	$m < p < M$	$p > M$
$\Phi_{++}$	1	$(\alpha m/p)^4$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$
$\Phi_{-+}$	$\alpha^3$	$\alpha^3 (\alpha m/p)$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$
$\Phi_{+-}$	$\alpha^3 (m/M)^2$	$\alpha^3 \frac{\alpha m}{p} \left(\frac{m}{M}\right)^2$	$\alpha^4 \frac{m}{p} \left(\frac{m}{M}\right)^2$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$
$\Phi_{--}$	$\alpha^4 (m/M)^2$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{M}\right)^2$	$\alpha^4 \frac{m}{p} \left(\frac{m}{M}\right)^2$	$\alpha^4 \left(\frac{m}{p}\right)^3$



*Perturbációs számítás:*

Mint a 2. §-ban említettük, a szokásos perturbációs képletek a B.S. egyenletre minden további nélkül nem alkalmazhatók, mivel a Schrödinger-egyenletől eltérően ez az egyenlet az energiában kvadratikusan

Definiáljuk a  $\psi_n^A(\mathbf{p}, \epsilon)$  függvényt a következő összefüggés:

$$\psi_n^A(\mathbf{p}, \epsilon) = \{2\pi i F_A(\mathbf{p}, \epsilon)\}^{-1} (E_A - H_e(\mathbf{p}) - H_p(\mathbf{p})) \chi_n(\mathbf{p}), \quad (\text{B.10})$$

ahol:

$$E_A = E_n + \Delta E.$$

$E_n$  az  $n$ -edik stacionárius energiasajátérték, és:

$$F_A(\mathbf{p}, \epsilon) = \hat{F}(\mathbf{p}, \epsilon, E_A).$$

Ekkor  $\psi_n^A(\mathbf{p}, \epsilon)$  a következő egyenletet elégíti ki  $\Delta E$ -ben elsőrendben:

$$(\hat{F}_A - \hat{I}_0) \psi_n(\mathbf{p}, \epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \Delta E \cdot \chi_n(\mathbf{p}), \quad (\text{B.11})$$

ahol:

$$\hat{I}_0 = -\beta^e \beta^p \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} I_0(\mathbf{k}) \psi(p+k).$$

Tekintsünk egy perturbált B.S. egyenletet  $I = I_0 + \Delta I$  magfüggvénnyel, ahol:  $\Delta I \ll I_0$ . Legyen az ehhez tartozó energiasajátfüggvény:

$$\psi_n(p) \cdot [\psi_n(p) \xrightarrow{\Delta I \rightarrow 0} \psi_n(p)]$$

és a megfelelő energiasajátérték:

$$E_A = E_n + \Delta E, \quad \Delta E \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \Delta I \rightarrow 0.$$

$$\{\hat{F}_A - \hat{I}_0 - \Delta I\} \psi_n(p) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Legyen:

$$\psi_A = \psi_n - \psi_n^A.$$

Ekkor:

$$(\hat{F}_A - \hat{I}_0) (\psi_n^A + \psi_A) = \Delta I \cdot (\psi_n^A + \psi_A). \quad (\text{B.13})$$

Mivel:  $\Delta I \ll I_0$ , ezért  $\Delta E \ll E_n$  és  $\psi_A \ll \psi_n^A \approx \psi_n$ .

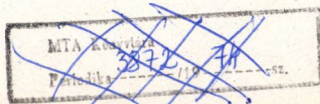
Szorozva (B.13) mindkét oldalát balról  $(\psi_n^A)^+$ -el és integrálva  $d^4 p$  szerint:

$$\Delta E \cdot \int \chi_n^+ (\psi_n^A + \psi_A) d^4 p = -2\pi i \int (\psi_n^A)^+ \Delta I \cdot (\psi_n^A + \psi_A) \cdot d^4 p.$$

Mindkét oldalon az első tag elsőrendűen, a második másodrendűen kicsi.  $\Delta E$ -ben az elsőrendű közelítést úgy kaphatjuk meg, ha mindkét oldalon elhanyagoljuk a második tagot, és  $\psi_n^A$ -t  $\psi_n$ -nel közelítjük:

$$\Delta E_n^{(1)} \approx \frac{-i\pi^2}{mM} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_n(p) \cdot \Delta I_E(p, p') \psi_n(p'). \quad (\text{B.14})$$

Ilyen energiakorrekciót jelent tehát a magfüggvény egy kis perturbációja.





## IRODALOM

1. Drell, Sullivan, Phys. Rev. 148, 1477, 1967.
2. Nakanishi, Progr. Theor. Phys. Suppl. 1969.
3. Salpeter, Phys. Rev. 87, 328, 1952.
4. Appelquist, Brodsky, Phys. Rev. A2, 2293, 1970.
5. Gilman: 4<sup>th</sup> Int. Symp. on  $e-\gamma$  interactions at High Energies. Liverpool, 1969.
6. Miller, SLAC-Report 129, 1971.
7. Bjorken, Paschos, Phys. Rev. 185, 1975, 1969.
8. Drell, Levy, Yan, Phys. Rev. 187, 2159, 1969; Phys. Rev. D1, 1035, 1970.
9. Fritzsche, Gell-Mann, CALT—68—297, 1971.
10. Kuti, Weisskopf, Phys. Rev. D4, 3418, 1971.
11. Cottingham, Annals of Physics 25, 424, 1963.
12. Harari, Phys. Rev. Letters 17, 1303, 1966.
13. Shepard, Phys. Rev. 159, 1331, 1967.
14. Damashek, Gilman, Phys. Rev. D1, 1319, 1970.
15. Close, Gunion, SLAC—PUB—892, 1971.
16. Close, Gunion, Brodsky, SLAC—PUB—973, 1971.
17. S. Y. Lee, UCSD—10P10—93, 1972.
18. Rajaraman, Rajjasekaran, Phys. Rev. D3, 266, 1971.
19. Breidenbach, Kuti, Physics Letters 41B, 345, 1972.
20. Choudhury, Freedman, Phys. Rev. 168, 1739, 1968.
21. Perl et. al. SLAC—PUB—1009, 1972.
22. Di Giacomo, Nucl. Phys. B11, 411, 1969.



# KÖNYVISMERTETÉS

**R. Röhler: Biologische Kybernetik (Regelungsvorgänge in Organismen). Teubner Studienbücher der Biologie. Stuttgart. (974.**

A kibernetika interdisziplinális tudomány, még nagyon messze vagyunk attól, hogy szilárdan megalapozott fogalmi és tételrendszere legyen. A szerző ezért korlátozta mondanivalóját az alcím-ben szereplő szabályozási folyamatokra. Ez utóbbiak ugyanis a biológiai kibernetikának azt a részét képezik, amelynek legszilárdabb az elméleti és kísérleti bázisa, s az sem elhanyagolható körülmény, hogy gyakorlati alkalmazás szempontjából a legfontosabb.

A szerző mondanivalóját korlátozza az a körülmény is, hogy tárgyát bizonyos matematikai ismeretek nélkül nem lehet megfelelő szinten ismertetni. Biológiai szabályozásról sok mindent kiderítettek a kibernetika előtti időkben is, de ezek csak kvalitatív állítások voltak. A kvantitatív megállapításokra törekvő biológiai kibernetika nem elégedhet meg a középiskolai matematikai ismeretekkel, és így a szerző kénytelen bizonyos matematikai tételeket is tárgyalni, tanácsolva, hogy olvasója forgasson egy megfelelő matematikai szakkönyvet is a rendszerelmélet klasszikus alapjait képező komplex függvényekkel és a mátrix számításokkal kapcsolatban.

A könyv jelen formájában fizikus hallgatóknak tartott előadások alapján készült, de számít a magasabb évfolyamokra járó biológus hallgatókra is, s azokra a neurológusokra, akik a központi idegrendszer funkcióját meg kívánják érteni.

A könyvet az új szervezetünket érintő tudományos ismeretek után érdeklődő minden szakember figyelmébe ajánljuk. (T. Gy.)

Technikai szerkesztő: Turchányi György

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sós Attila

A kézirat beérkezett 1974. február 5. — Terjedelem: 9,8 (A/5) ív

74-566 — Szegedi Nyomda

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADEMIA  
KÖNYVTÁRA



A MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,

1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.



Ára: 10,— Ft  
Előfizetés kötetenként: 48,— Ft

INDEX: 26 491

### TARTALOMJEGYZÉK

<i>Vincze Imre</i> : A szennyező atomok mágneses momenta anomális hőmérsékletfüggésének vizsgálata vas és nikkal alapú ötvözetekben .....	279
<i>Nagy Sándor, Sailer Kornél, Daróczy Sándor, Raics Péter, Nagy József és Germán Endre</i> : Ge (Li) detektor hatásfokának mérése kiterjedt forrásra .....	323
<i>Gajzágó Éva</i> : A Lamb eltolódás protonszerkezeti korrekciója .....	339

### KÖNYVISMERTETÉS

<i>R. Röhler</i> : Biologische Kybernetik. (T. Gy.) .....	390
---	-----



307.226

14

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

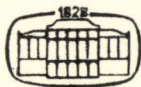
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,  
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR  
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI  
JÁNOSSY LAJOS

XXII. KÖTET

5. FÜZET



AKADÉMIAI KIADÓ  
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST 1974



# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10–10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratról évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendőek:

Jánossy Lajos akadémikus  
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út  
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmú ismertetőt írnak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közölnék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írnak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójelbe tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.



# RELATIVISZTIKUS PLAZMA REZGÉSEI ÖNMAGA ÁLTAL KETTETT SKALÁRTÉRBEN\*

TIHANYI LÁSZLÓ  
ELTE, Csillagászati Tanszék

E dolgozatban összenyomható plazmával foglalkozunk, melynek részecskéi között erős skalár-kölcsönhatást tételezünk fel. Megadjuk a gáz Lagrange-függvényét, energiaimpulzus-tenzorát és a gázra vonatkozó teljes egyenletrendszerét. Foglalkozunk az általános hőáramlási egyenletnek a jelen modellben érvényes alakjával, és megadjuk a gáz viszkozitási tenzorát. Diszperziós relációt írunk fel a kisamplitudójú rezgésekre vonatkozólag, és értelmezzük az egyes módusokat. Felírjuk a fázis- és csoportsebességek kifejezéseit.

## 1. §. Bevezetés

Az utóbbi években előtérbe kerültek a csillagászat olyan kérdései, melyek megválaszolása a relativisztikus plazmadinamika apparátusát igényli. Ugyanakkor ez a terület eléggé „bejáratlan”. Szükséges részint a módszerek kipróbálása, részint az egyszerűbb modellek (ideális gáz) fokozatosan bonyolultabbakkal való felváltása. Ezen az úton az egyik első lépés az, ha a plazma részecskéi között kölcsönhatást tételezünk fel.

Úgy tűnik, hogy a csillagászat a megfigyelés területén is egyre közelebb jut szupersűrű objektumokhoz. Az ilyenek anyagának részecskéi között a kölcsönhatás már egyáltalán nem hanyagolható el. A jelen dolgozatban nem célunk ezt a kvantummechanika által eddig feltárt részleteiben figyelembe venni, mindössze arra korlátozódunk, hogy intenzív, rövid hatótávolságú skaláris kapcsolat formájában feltelesszük a részecskék közt. Már ez a „klasszikus” közelítés is új effektusokat eredményez.

A szupersűrű objektumokban uralkodó viszonyok leírása mai eszközeinkkel igen munkaigényes feladat. E dolgozat egyike az első, tapogatózó lépéseknek ez irányban, és éppen ezért igen kis lépés. Fontos eredményünknek tartjuk, hogy miközben az eddigiektől eltérő eredményekhez jutottunk (a sebességformulák, viszkozitási tenzor) és ezzel az eddigieknél pontosabb közelítéseket tettünk lehetővé, minden eredményünk a már sokszor jónak tapasztalt közelítésekbe megy át a skalártér hatásának elhanyagolásakor.

Köszönetet mondok *Abonyi Ivánnak*, volt tanáromnak értékes tanácsaiért és baráti segítségéért.

\* Az e cikkben foglaltak kezdetlegesebb formában a szerző szakdolgozatának tárgyát képezték. Érkezett, 1973. május. 10.



## 2. §. Az alapegyenletek és előállításuk

### a) Lagrange-függvény, energiaimpulzus-tenzor

A gáz mozgás- és potenciálegyenletei a megfelelően választott Lagrange-függvény variálásával megkaphatók. Legyen a Lagrange-függvény a következő:

$$L = \mu c^2 - p - \frac{1}{8\pi} (g^{rs} \partial_r \varphi \partial_s \varphi + G^2 \varphi^2). \quad (2.1)$$

Ebben  $p = p(x)$  a skalár nyomás, amely a skalártértől független;  $\varphi = \varphi(x)$  a skalár-tér potenciálja,  $G$  az ehhez tartozó reciprokat hatótávolság.  $\mu$  az egységnyi térfogatban foglalt nyugalmi tömeg. Az  $S = \int \sqrt{g} L dx$  hatásintegrál  $g^{ik}$  szerinti variációjában  $\delta g^{ik}$  együtthatói szolgáltatják az energiaimpulzus-tenzor komponenseit: [l. (1)]

$$T_{ik} = \mu u_i u_k + p g_{ik} + \frac{1}{4\pi} \partial_i \varphi \partial_k \varphi - \frac{1}{8\pi} (g^{rs} \partial_r \varphi \partial_s \varphi + G^2 \varphi^2) g_{ik}. \quad (2.2)$$

### b) A mozgásegyenletek

Ezeket az energia- és impulzus-megmaradás tétele jelenti:  $\nabla_k T_i^k = 0$ . A supersűrű anyag mozgásai változtathatják a metrikát. Ezt úgy vehetnénk figyelembe, hogy bevezetjük a  $g_{ik}$  változókat és hozzájuk az Einstein-féle gravitációs egyenleteket. Ehhez a dolgozat keretei szűkek. Ezért a továbbiakban Minkowski-metrikát választunk:

$$\nabla_k = \partial_k, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = ct. \quad (2.3)$$

Így a mozgásegyenletek:

$$0 = \partial_k (\mu u_i u^k) + \partial_i \left[ p - \frac{G^2}{8\pi} \varphi^2 - \frac{1}{8\pi} g^{rl} \partial_r \varphi \partial_l \varphi \right] + \partial_k \left[ \frac{1}{4\pi} \partial_i \varphi \partial_r \varphi g^{rk} \right]. \quad (2.4-2.7)$$

### c) A potenciálegyenlet

A hatásintegrált  $\varphi$  szerint variálva jutunk a feltételezett skalártér Yukawa-típusú egyenletéhez:

$$(\square - G^2) \varphi = - \frac{\partial(\mu c^2)}{\partial \varphi}. \quad (2.8)$$

A jobb oldal a skalárpotenciál forrása, erre kézenfekvő feltevés: [l. (2)]

$$\frac{\partial(\mu c^2)}{\partial \varphi} \sim qn, \quad (2.9)$$

itt  $q$  a részecskék egyforma, a skalártérre vonatkozó töltése és  $n$  a pontszámsűrűség.



Innen látható, hogy a Lagrange-függvény  $\mu$ -ben tartalmazza a részecske-skalártér kölcsönhatásra vonatkozó részét. Tehát a potenciálegyenlet:

$$(\square - G^2)\varphi = -4\pi qn. \quad (2.10)$$

d) *Kontinuitási egyenlet*

Ilyen a  $\mu$  tömegsűrűsége nem áll fenn, ez látszik a mozgásegyenletekből. Ellenben fennáll a pontszámsűrűsége, ha feltesszük, hogy a részecskék nem keletkeznek és nem tűnnek el:

$$\partial_k(nu^k) = 0. \quad (2.11)$$

e) *Állapotegyenlet*

Ez célszerűen mindig skalár reláció. Erre a g) pontban visszatérünk. A jelen esetben az állapotegyenlet:

$$\mu = \mu(s, p, n, \varphi). \quad (2.12)$$

Itt  $s$  az entrópiasűrűség. Írjuk fel  $\mu$  teljes sajátidő szerinti deriváltját és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{\varphi, s, n} = a; \quad \left(\frac{\partial\mu}{\partial s}\right)_{\varphi, p, n} = b; \quad \frac{\partial\mu}{\partial\varphi} = \frac{qn}{c^2}; \quad \left(\frac{\partial\mu}{\partial n}\right)_{\varphi, p, s} = M. \quad (2.13)$$

(2.11)-et figyelembevéve az állapotegyenlet:

$$u^k \partial_k \mu = au^k \partial_k p + bu^k \partial_k s + \frac{qn}{c^2} u^k \partial_k \varphi - Mn \partial_k u^k. \quad (2.14)$$

f) *Sebességnégyzet*

Ambár több helyen figyelembe vesszük, hogy  $u^i$  négyes sebesség, a komponensek közötti összefüggést mégis az alapegyenletek közé kell venni, mert mind a négy komponens független változóként megtartjuk. Tehát:

$$u_i u^i = -c^2; \quad u_i \partial_k u^i = 0. \quad (2.15)$$

g) *A hőáramlás egyenlete*

Az állapotegyenlet egyik változója az entrópiasűrűség volt, további egyenletet kell találni hozzá. Idézzük a hő általános áramlási egyenletét: (l. [3], p. 185, 49.4-es formula)

$$qT \left( \frac{\partial s^*}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } s^* \right) = \sigma'_{ik} \partial_k v_i + \text{div}(\kappa \text{ grad } T). \quad (2.16)$$

Ebben  $\kappa$  a hővezetési együttható,  $s^*$  a fajlagos entrópia,  $\mathbf{v}$  a közönséges sebesség. Ezen egyenlet négyes általánosítása nem ütközik nehézségekbe, mert tenzoregyenlet.



A fajlagos helyett az egy részecskére eső entrópiát, a sűrűség helyett a pontszám-sűrűséget beírva:

$$nT \frac{d}{d\tau} \left( \frac{s}{n} \right) = \sigma'^{ik} \partial_k u_i + \partial_k (\kappa \partial_s T g^{sk}). \quad (2.17)$$

Klasszikus értelmezésével összhangban a bal oldal a hőenergiaváltozás. Tudjuk, hogy hőenergia mint olyan nincs. (L. [4].) Csak egységes energiatartalom van, amely különféle módokon meg tud változni. Vannak makroszkopikusan könnyen interpretálható módok és vannak, amelyekhez a makroszkopikus, fenomenológikus termodinamika részleteikben nem fér hozzá. Ilyenek például azok, amelyek a részecskeszintű kölcsönhatásokkal kapcsolatosak. A kanonikus írásmód kedvéért a makroszkopikusan jól értelmezhető extenzív-intenzív mennyiségpárok mintájára bevezették a hőmérsékletet és az entrópiát, összefogva általuk az energetikai változásoknak lényegükben ismeretlen részét, a (2.16) egyenletnek megfelelően. A hőáramlás egyenletére elengedhetetlenül csak akkor van szükség, ha a kölcsönhatásoknak van ilyen tisztázatlan része. (Használata más esetben is lehet praktikus.) A jelen modellben nem ez a helyzet, mivel a részecskeszintű kölcsönhatásokra nézve pontos feltevással éltünk. Ezért a későbbiekben el is fogjuk hagyni. Most azonban felírjuk (2.17) e modellben érvényes alakját.

(2.17)-ben  $\sigma'_{ik}$  a belső súrlódás tenzora. A hőmennyiség mellett ez is olyan, amelyről általában „nem tudunk semmit”, de a jelen dolgozatban pontosan ismerjük. Kiszámítására a következő módszer szolgál: (l. [5]).

Egy vektormezőt felbonthatunk egy „sajátidő-altérben” fekvő és egy komplementer részre. Könnyen igazolható, hogy ehhez a megfelelő projektorok:

sajátidő-altérre vetít:

komplementer altérre vetít:

$$P_\alpha^\beta = -\frac{u_\alpha u^\beta}{c^2}; \quad S_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta + \frac{u_\alpha u^\beta}{c^2}. \quad (2.18)$$

Egy tenzort is felbonthatunk hasonló módon, ha diádnak tekintjük:

$$Z^{ik} = (P_r^i P_s^k) Z^{rs} + (S_r^i P_s^k) Z^{rs} + (P_r^i S_s^k) Z^{rs} + (S_r^i S_s^k) Z^{rs}. \quad (2.19)$$

Természetes, hogy egy tenzor általában nem esik szét egy tiszta sajátidőirányú és egy tiszta sajáttérben fekvő részre. A felbontás egyes tagjai a tenzor konkrét megadásával értelmezhetők. Alkalmazzuk a felbontást az energiaimpulzus-tenzorra! Ekkor az első tag például:

$$\frac{1}{c^2} (u^i u_r u^k u_s T^{rs}) = \frac{1}{c^2} u^i u_k w. \quad (2.20)$$

Itt  $w$  az invariáns energiasűrűség. A második és harmadik tag makroszkopikus folyamatokként (áramok, örvények, rezgések stb.) fogható fel. A negyedik tartalmazza az összes többi, makroszkopikusan nem megfogható jelenséget, és a negatív feszültségi tenzorral azonosítható:

$$-\sigma^{ik} = (S_r^i S_s^k) T^{rs}. \quad (2.21)$$



Ha ebből a nyomással kapcsolatos részt leszámítjuk, a tiszta belső sűrűdési tenzort kapjuk:

$$\sigma'^{ik} = \sigma^{ik} + pS^{ik}. \quad (2.22)$$

(A hármas térben ennek a  $\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + p\delta_{\alpha\beta}$  formula felel meg.) A fentiek szerint előállított viszkozitási tenzor:

$$\begin{aligned} \sigma'^{ik} = & \left[ -\delta_l^i \delta_m^k - \frac{1}{c^2} \delta_m^k u_l u^i - \frac{1}{c^2} \delta_l^i u_m u^k - \frac{u_l u^i u_m u^k}{c^4} \right] * \\ & * \left[ \frac{1}{4\pi} \partial_s \varphi \partial_r \varphi g^{sl} g^{rm} - \frac{1}{8\pi} g^{rs} \partial_r \varphi \partial_s \varphi g^{lm} - \frac{1}{8\pi} G^2 \varphi^2 g^{lm} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Könnyen belátható, hogy ez valóban a viszkozitási tenzor. (L. [6]). Ezt a tenzort (2.17)-be beírva megkaptuk az entrópiaprodukcióra vonatkozó összefüggést, amelyből látszik, hogy egyensúlyi plazma esetében (ahol a hőmérséklet állandó) a fajlagos entrópia megváltozásáért kizárólag a skalártér felelős. Ez az eredmény összhangban van azzal, hogy az ideális gáz rezgései izentropikusak. (L. [3].)

Megjegyezzük még a következőket: [1]-ben, a 114. oldalon azt találhatjuk, hogy a hőmérséklet nem skalár. Az entrópia igen, de az entrópiasűrűség sem. Az állapotegyenletben azonban egyenrangúként szerepel skalárváltozókkal. Emellett (2.17) jobb oldalának két része is csak akkor egyformán skalár, ha a hővezetési együttható nem az. Ez bonyolulttá tenné az egyenletek kezelését, ezért a következő eljárást tartjuk célszerűnek: minden termodinamikai egyenlet és változó legyen skaláris, amennyiben kikötjük, hogy a változók értékét csak együttmozgó koordináta-rendszerben mérjük, termodinamikai relációt csak ilyen rendszerben állapítunk meg. Ilyen relációnak tekintjük az állapotegyenletet is. A hőmérséklettel és az entrópiával kapcsolatos nehézségek oka nyilvánvalóan az, hogy nem igazi alapvető állapotjellemzők.

Ezzel együtt vannak a gázra vonatkozó alapegyenletek, és pedig a következő 9 db: (2.4); (2.5); (2.6); (2.7); (2.10); (2.11); (2.14); (2.15); (2.17) a (2.23)-mal. A hozzájuk tartozó 9 változó:  $u^i$ ;  $\mu$ ;  $\varphi$ ;  $s$ ;  $p$ ;  $n$ . Ez tehát egy kompatibilis, de nem lineáris rendszer.

### 3. §. Linearizált egyenletek a kisamplitudójú rezgésekre

Tegyük fel, hogy a plazma egyensúlyi állapotára szuperponáljuk a kisamplitudójú hullámok Fourier-komponenseit. Az egyensúlyi állapot itt azt jelenti, hogy a (2.13) deriváltak állandónak tekinthetők. Továbbá állandó a szintén parciális derivált-jellegű hőmérséklet is:  $T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}$ . Az egyensúlyi értékeket 0 indexszel jelöljük.

Ezek tetszőleges állandók lehetnek, a potenciált kivéve, amely:

$$\varphi_0 = \frac{4\pi q n_0}{G^2} \quad (3.1)$$



A hő áramlási egyenletének linearizálásakor (2.23)-ból kiszámítható a viszkozitási tenzor első közelítésbeli alakja:

$$\sigma_0'^{ik} = \frac{G^2}{8\pi} \varphi_0^2 g^{ik} + \frac{G^2}{8\pi c^2} \varphi_0^2 u^i u^k = \frac{G^2}{8\pi} \varphi_0^2 S^{ik}. \quad (3.2)$$

Vagyis a  $G^2 \varphi_0^2 / 8\pi$  mennyiség a nyomással azonos szerepet tölt be, a skalártér nyomásjárulékának tekinthető. Ez azt jelenti, hogy valódi tenzorjellegű sűrűlódás csak a második közelítésben lép fel.

Célszerű továbbá bevezetni a  $k_k u_0^k = L$  jelölést, valamint a  $k_k \delta u^k = \delta L$  definíciót, és hozzávenni az egyenletekhez. Ebben  $k_k$  a vizsgált Fourier-komponens hullám-számvektora. Az így kapott egyenletrendszer determinánsa a táblázaton látható.

A további vizsgálatra azonban ez az egyenletrendszer nem a legalkalmasabb. Egyrészt a hő áramlási egyenletében csak a nyomásjárulék-rész marad, amely beolvasztható a közönséges nyomásba, másrészt minden konkrét számításához meg kellene adni (2.13) értékeit, és ez nem mindig egyszerűbb, mint az esetleg rendelkezésre álló egyszerűbb állapotegyenlet használata. Ha például a hőmérsékletet állandónak tekintjük, akkor használható a  $p = nkT$  izotermikus állapotegyenlet. Ebben nem szerepel az entrópia, így a hőáramlás egyenletét egyszerűen elhagyjuk. A  $p$  nyomást nem tekintjük a mozgást befolyásoló dinamikus paraméternek, hanem a részecskék kiegyenlítődési törekvései kinematikus jellemzőjének (melynek csak mérési módja dinamikus). Tehát sem  $p$ -be, sem  $T$ -be nem értjük bele a skalártér hatását. Az ideális gáz állapotegyenlet linearizált alakja a következő:

$$0 = \delta p - kT \delta n. \quad (3.3)$$

Ezek után (3.3)-at beírjuk a mozgásegyenletekbe  $p$  helyére, így a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk a kisamplitúdójú zavar amplitúdóira:

$$0 = \mu_0 L \delta u_i + u_{i0} L \delta \mu - q n_0 k_i \delta \varphi + k_i k T \delta n + \mu_0 u_{i0} \delta L \quad (3.4-3.7)$$

$$0 = (k_i k^i + G^2) \delta \varphi - 4\pi q \delta u \quad (3.8)$$

$$0 = L \delta n + n_0 \delta L \quad (3.9)$$

$$0 = u_0^i \delta u_i \quad (3.10)$$

$$0 = k^i \delta u_i - \delta L. \quad (3.11)$$

Hogy nemtriviális megoldás (azaz valamilyen zavar) létezzék, annak invariáns feltétele az, hogy ezen egyenletrendszer determinánsa eltűnjék. A (3.4)–(3.11) egyenletek determinánsát a változók sorrendjében felírva és a Gauss-elimináció szabályai szerint kifejtve a következő diszperziós relációhoz jutunk:

$$0 = \mu_0^3 L^5 c^2 (K^2 + G^2) \left\{ 1 + \left( \frac{K^2}{L^2} + \frac{1}{c^2} \right) \left( \frac{4\pi q^2 n_0^2}{\mu_0 (K^2 + G^2)} - \frac{k T n_0}{\mu_0} \right) \right\}. \quad (3.12)$$

Itt  $K^2 = k_i k^i$ .

Láthatóan három különböző zavartípus lehetséges. Az elsőt az  $L = k_i u^i = 0$  egyenlet adja. Látható, hogy ilyenkor a hullám-számvektor ortogonális a sajátidő irányára. (L. a (2.18) projektort.) Ez tehát olyan tetszőleges térbeli inhomogenitást



jelent, amely még lineárisan kicsiny. Ennek egyik Fourier-komponense egy térbeli periodicitás, azaz rétegezethez.

A másodikat a  $K^2 + G^2 = 0$  egyenlet jelenti. Ha tekintetbe vesszük, hogy  $G$  a Yukawa-egyenletben a skalártér reciprokl hatótávolsága, akkor:

$$G^2 = \frac{\mathfrak{M}^2 c^2}{\hbar^2} \rightarrow \hbar \omega = \mathfrak{M} c^2,$$

ahol  $\mathfrak{M}$  a mezon tömeg. Vagyis ez a zavar egyszerűen „mezonrezonancia”. Az, hogy a (3.16) fázis sebesség ezen a frekvencián végtelenné válik, úgy értelmezhető, hogy ezen a frekvencián a gázban akárhol található erőter-mezonokat egyszerre a gerjesztés eredményének tekintjük, még ha azzal nincsenek is oksági kapcsolatban. Egyébként ilyenkor a (3.8) közelítés nem is jogos.

A harmadik típusú zavar egyenlete:

$$1 + \left( \frac{K^2}{L^2} + \frac{1}{c^2} \right) \left( \frac{4\pi q^2 n_0^2}{\mu_0 (K^2 + G^2)} - \frac{k T n_0}{\mu_0} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Vezessük be a

$$A = \frac{4\pi q^2 n_0^2}{\mu_0}; \quad B = \frac{k T n_0}{\mu_0} \quad (3.14)$$

jelöléseket, és vegyük figyelembe, hogy együttmozgó rendszerben:

$$L^2 = (k_i u^i)(k_k u^k) = \omega^2; \quad K^2 = \mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.15)$$

ahol  $\mathbf{k}$  a hármas hullámszámvektor.

Ezekkel (3.13)-ból a zavar fázis sebességére (a közönséges, hármas fázis sebességre) adódik:

$$\begin{aligned} V_{1 \text{ skalárfény}}^2 &= \\ &= \frac{2B\omega^2}{\frac{B\omega^2}{c^2} - BG^2 + \omega^2 + A - \sqrt{\left(\omega^2 + A - \frac{B}{c^2}\omega^2 - BG^2\right)^2 + 4B\omega^2 \left(G^2 + \frac{A}{c^2} - \frac{B}{c^2}G^2\right)}} \\ V_{2 \text{ akusztikus}}^2 &= \\ &= \frac{2B\omega^2}{\frac{B\omega^2}{c^2} - BG^2 + \omega^2 + A + \sqrt{\left(\omega^2 + A - \frac{B}{c^2}\omega^2 - BG^2\right)^2 + 4B\omega^2 \left(G^2 + \frac{A}{c^2} - \frac{B}{c^2}G^2\right)}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Az indexek mellé írt szavak azt jelentik, hogy a kétféle módus ugyan kevert, de rokonítható a szavak által jelentett típusú tiszta rezgésekkel. Ha ugyanis az anyag-skalártér kölcsönhatástól eltekintünk, és az erőter-hatótávolságot az egyszerűség kedvéért végtelennek vesszük („álfoton”), azaz:  $G^2 \rightarrow 0$ , akkor

$$\begin{aligned} V_1^2 &\rightarrow c^2 \\ V_2^2 &\rightarrow B = \frac{k T n_0}{\mu_0} = \frac{p_0}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (3.17)$$



## TÁBLÁZAT

A lineáris egyenletrendszer determinánsa  
(a hő áramlási egyenletével)

	$\delta u_1$	$\delta u_2$	$\delta u_3$	$\delta u_4$	$\delta \mu$	$\delta \varphi$	$\delta s^*$	$\delta n$	$\delta p$	$\delta L$
mozgás	$\mu_0 L$	0	0	0	$u_{10} L$	$-qn_0 k_1$	0	0	$k_1$	$\mu_0 u_{10}$
mozgás	0	$\mu_0 L$	0	0	$u_{20} L$	$-qn_0 k_2$	0	0	$k_2$	$\mu_0 u_{20}$
mozgás	0	0	$\mu_0 L$	0	$u_{30} L$	$-qn_0 k_3$	0	0	$k_3$	$\mu_0 u_{30}$
mozgás	0	0	0	$\mu_0 L$	$u_{40} L$	$-qn_0 k_4$	0	0	$k_4$	$\mu_0 u_{40}$
állapot	0	0	0	0	1	$-\frac{qn_0}{c^2}$	$-b$	0	$-a^2$	$\frac{M}{L} n_0$
potenciál	0	0	0	0	0	$K^2 + G^2$	0	$-4\pi q$	0	0
hő	0	0	0	0	0	0	$L$	0	0	$-A$
kontinuitás	0	0	0	0	0	0	0	$L$	0	$n_0$
sebességnégyzet	$u_0^1$	$u_0^2$	$u_0^3$	$u_0^4$	0	0	0	0	0	0
$\delta L$	$k^1$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	0	0	0	0	0	-1

$V_2$  az izotermikus hangsebesség, a  $T=\text{const}$  feltevés miatt. Ha (3.17)-ben figyelembe vesszük, hogy  $\mu_0$  nem a részek pusztán tömegösszege egy térfogategységben, hanem az energiaimpulzus-tenzorból kiolvashatóan:

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{p}{c^2} = \frac{m_0 n_0}{c^2} + \frac{\varepsilon^*}{c^2} + \frac{p}{c^2}, \quad (3.18)$$

ahol  $\varepsilon^*$  a „termodinamikai” belső energiasűrűség,  $m_0$  egyetlen részecske tömege akkor  $V_2$  alakilag is megegyezik az Abonyi Ivánnál is találhatóval (l. [7]).

Természetesen vehettünk volna adiabatikus állapotegyenletet is (3.3) helyett, akkor a skalártérmentes esetben az adiabatikus hangsebesség adódott volna.

#### 4. §. A csoportsebesség

A fázissebesség a valódi zavar terjedéséről nem sokat mond, ezért kiszámítjuk a csoportsebességeket is a következő formula alapján:

$$V_{\text{csoport}} = \frac{d\omega}{|dk|} = \frac{V_{\text{fázis}}^3}{V_{\text{fázis}}^2 - \omega^2 \frac{d(V_{\text{fázis}}^2)}{d(\omega^2)}}. \quad (4.1)$$



Ezzel a csoportsebességek:

$$V_{\text{cs skalárakuszt.}}^2 = \frac{2B[D\omega^2 + E \mp \sqrt{F^2\omega^4 + H\omega^2 + E^2}]}{\omega^2 \left[ D \mp \frac{2F^2\omega^2 + H}{2\sqrt{F^2\omega^4 + H\omega^2 + E^2}} \right]^2}, \quad (4.2)$$

ahol:

$$\begin{aligned} D &= \frac{B}{c^2} + 1 \\ E &= A - BG^2 \\ F^2 &= \left(1 - \frac{B}{c^2}\right)^2 \\ H &= 2 \left(1 - \frac{B}{c^2}\right) (A - BG^2) + 4B \left(G^2 + \frac{A}{c^2} - \frac{B}{c^2} G^2\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

A csoportsebesség kifejezéséből látszik, hogy skalárhullámok mindaddig nem terjednek, amíg a frekvencia el nem éri a  $\omega^2 = G^2 c^2$  skalármezonok keltéséhez szükséges értéket. Ha már elérte, akkor ilyen mezonok keletkeznek, és a plazma képes lesz kollektív skalár-indítékú mozgásra is. („A virtuális mezonok legfeljebb két szomszédos részecskét köthetnek össze”).

A fázis és csoportsebesség könnyen becsülhető, mert minden szereplő mennyiségre találhatók mért vagy elméletileg becsült adatok.

#### IRODALOM

1. *Novobátzky Károly*: A relativitás elmélete 1963, Tankönyvkiadó Bp.
2. *Marx György*: Relativisztikus hidrodinamika MFF, 5. 91—104. 1957.
3. *Landau—Lifshitz*: Fluid mechanics 1963, Pergamon Press
4. *Fényes Imre*: Termosztatika és termodinamika 1968, Műszaki Könyvkiadó Bp.
5. *C. Eckart*: The thermodynamics of irreversible processes III. (Relativistic theory of the simple fluid) Phys. Rev., 58, 919, 1940.
6. *Tihanyi László*: Relativisztikus gáz rezgései önmaga által keltett skalárterben. Szakdolgozat, 1971, ELTE Elm. Fiz. Tanszék
7. *Abonyi Iván*: Small amplitude waves and weak discontinuities in the relativistic hydrodynamics of an ideal fluid. Acta Phys. Acad. Scient. Hungaricae, 27, 269, 1969.
8. *Ivanyenko—Szokolov*: Klasszikus térelmélet. 1955, Akadémiai Kiadó, Bp.







# KÜSZÖBJELENSÉGEK VIZSGÁLATA EGY EGZAKTUL MEGOLDHATÓ MODELL KERETÉBEN\*

DÉNES ERVIN

MTA, Központi Fizikai Kutatóintézete, Budapest

## TARTALOMJEGYZÉK

I. Bevezetés .....	401
II. Küszöbjelenségek áttekintése .....	404
II.a) A küszöbviselkedés .....	410
II.b) A keresztthatás .....	412
II.c) A csupok mértéke .....	415
II.d) Alkalmazások .....	416
III. Kísérleti áttekintés .....	419
IV. Egy egzaktul megoldható modell a küszöbjelenségek tárgyalására .....	426
V. Eredmények .....	434
VI. Következtetések .....	443
Köszönetnyilvánítás .....	444
Irodalomjegyzék .....	444

## 1. Bevezetés

Tapasztalatból tudjuk, hogy a természetben előforduló kölcsönhatások — a Coulomb- és a gravitációs kölcsönhatástól eltekintve — rövid hatótávolságúak. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy bizonyos esetekben a kölcsönhatások pontos ismerete nélkül meghatározzuk a rövid hatótávú erővel kölcsönható részecskék szóródásának hatáskeresztmetszetét [1, 2].

Ha az

$$a_i + X_i \rightarrow a_j + X_j \quad (\text{I.1})$$

többszorosított folyamatot tekintjük, akkor a következő hatáskeresztmetszetek energiafüggésére tehetünk kijelentést:

- az  $X_i(a_i, a_i)X_i$  rugalmas szórására, ha a szóródó részecske kis energiájú,
- az  $X_i(a_i, a_j)X_j$  reakcióra, ha a bemenő, vagy kijövő részecske kis energiájú,
- az  $X_i(a_i, a_j)X_j$  folyamatra, ha a rendszer energiája egy tetszőleges  $X_i(a_i, a_k)X_k$  folyamat küszöbenergiája közelében van.

A hatáskeresztmetszetek viselkedését azon energiatartományban vizsgáljuk, ahol valamely eddig zárt reakció csatorna energetikailag lehetségessé válik. Ezekben a tartományokban tapasztalható hatáskeresztmetszet anomáliákat nevezzük „küszöbjelenségek”-nek. A küszöbjelenségekkel kapcsolatban két összefüggő

\* Egyetemi doktori értekezés. Készült a KFKI Részecske- és Magfizikai Kutatási Terület Elméleti Osztályán 1971/73-ban.  
Érkezett 1973. május 17.



problémakört különböztetünk meg. A *küszöbviselkedés* vizsgálata válaszol arra a kérdésre, hogyan változik egy adott reakció hatáskeresztmetszete az energia függvényében a küszöbenergia környékén. A *kereszthatás* vizsgálata egy zárt csatorna megnyílásának következményeit tárgyalja, valamely más, egyidejűleg végbemenő reakció hatáskeresztmetszetében.

Hangsúlyozzuk, hogy ezekben az esetekben a hatáskeresztmetszetek energiafüggését a kölcsönhatás részleteinek ismerete nélkül tudjuk megmondani, csupán azt tesszük fel, hogy

1. a részecskék között rövid hatótávú kölcsönhatásokon kívül legfeljebb Coulomb-erő hat,

2. a vizsgált folyamatban csak kétrészecske csatornák fordulnak elő.

I.1. TÁBLÁZAT

		$b$ és $Y$ között nincs Coulomb kölcsönhatás	$b$ és $Y$ azonos töltésű	$b$ és $Y$ ellentétes töltésű		
a) Rugalmas szórás kis energiákon ( $b$ és $Y$ lassú részek)	$Y(b, b)Y$	$\sigma_i \sim k^{4l}$	$\sigma_i = \sigma_i^c + \sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)}$ , ahol $\sigma_i^c = \frac{\pi}{k^2} 4 \sin^2 \eta_i \sim \frac{4\pi}{k^2}$ , $a = \frac{e_1 e_2}{\hbar v}$ , $\eta_i$ a Coulomb-fázis			
			$\sigma_i^{(1)}$	$\sigma_i^{(2)}$	$\sigma_i^{(1)}$	$\sigma_i^{(2)}$
			$\frac{1}{k^2} e^{-2\pi a} \times$ $\times$ oszcilláló szorzó	$\frac{1}{k^2} e^{-4\pi a}$	$\frac{1}{k^2} \times$ $\times$ oszcilláló szorzó	$\frac{1}{k^2}$
b) Kétrészecske reakció, a bemenő vagy a ki- jövő részecske kis energiájánál ( $b$ és $Y$ lassú, $a$ és $X$ gyors részek)	$Y(b, a)X$	$\sigma_i \sim k^{2l-1}$	$\sigma_i \sim \frac{1}{k^2} e^{-4\pi a}$		$\sigma_i \sim \frac{1}{k^2}$	
	$X(a, b)Y$	$\sigma_i \sim k^{2l+1}$	$\sigma_i \sim e^{-2\pi a}$		$\sigma_i \sim \text{konst.}$	
c) Kereszthatás: Az $X(a, a)X$ szórás hatáskeresztmetszeté- nek menete az $X(a, b)Y$ reakció kü- szöbenergiájánál	$X(a, a)X$	$L = \begin{cases} 1 & \text{ha } l = 0 \\ 2 & \text{ha } l > 0 \end{cases}$  $\bar{\sigma}_l, \alpha_l \text{ konst.}$	$\sigma_i \sim \text{konst.}$		$\sigma_{l=0} \sim \text{konst.}, \text{ ha}$ $k^2 > 0;$  $\sigma_{l=0} \sim \frac{\pi}{k^2} \left  1 - \right.$  $\left. \frac{1 - \beta \operatorname{ctg} \frac{\pi}{ k }}{1 - \beta^* \operatorname{ctg} \frac{\pi}{ k }} e^{2i\delta_0} \right ^2,$	
					$\text{ha } k^2 < 0, \text{ ahol } \beta$ és $\delta_0$ komplex és valós konstans,  $\operatorname{Im} \beta > 0$	



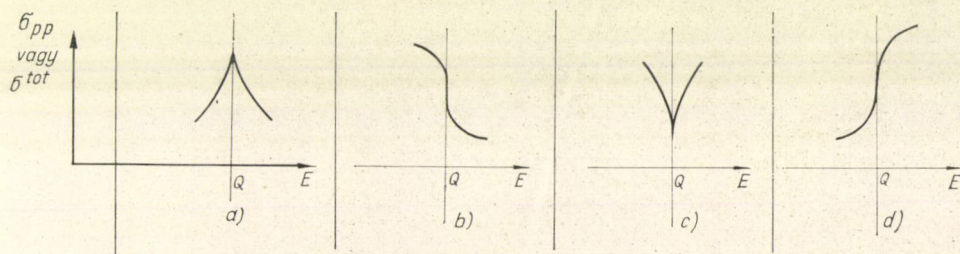
Ezeket a feltételeket a későbbiekben még pontosítani fogjuk. A fenti feltételek birtokában a hatáskeresztmetszet egyéb tulajdonságaira is következtethetünk (pl. hatáskeresztmetszetek alsó és felső korlátja stb.), de ezekre most nem térünk ki. Jelen dolgozat célja a küszöbjelenségek vizsgálata, ezek közül is a hangsúlyt a *c)* pont alatti keresztthatás vizsgálatára tesszük.

Az áttekintés kedvéért az I.1 táblázatban összefoglaljuk a különböző küszöbjelenségeket [4, 6, 10], melyek közül néhányat a későbbiek során részletesebben fogunk foglalkozni. A táblázat összeállításakor feltettük, hogy azok a részecskék, amelyek létrejötte a küszöbtől kezdve lehetővé válik, spin nélküliek, tehát a hatáskeresztmetszet  $\sigma = \sum_i \sigma_i$  alakba írható. A részecskék relatív mozgásának impulzusmomentumát  $l$ -lel, impulzusát  $k$ -val, sebességét  $v$ -vel és a részecskék töltését  $e_1$ -gyel, illetve  $e_2$ -vel jelöltük.

Spinnel rendelkező részecskék keletkezése esetén a fenti kép annyiban módosul, hogy a differenciális hatáskeresztmetszetek egy szögtől függő faktorról szorozódnak [7].

A táblázat harmadik oszlopával ( $b$  és  $Y$  ellenkező töltésű) — mint a magfizikában ritkán előforduló esettel — nem foglalkozunk. A fenti táblázat alapján két esetben várhatjuk, hogy a küszöbjelenségek érdekes anomáliaként jelentkezzenek a hatáskeresztmetszetekben. Az egyik eset az  $Y(b, a)X$  típusú folyamat  $l=0$  esetén, ha  $b$  és  $Y$  között nincs Coulomb-kölcsönhatás. Ilyenkor  $\sigma_0 \sim 1/k$ , ez az úgynevezett  $1/v$  törvény. Ilyen típusú folyamat a lassú neutron befogás, melynek hatáskeresztmetszetét több száz izotópra megmérték, és mindössze hat esetben találtak észrevehető eltérést az  $1/v$  törvénytől [28].

A másik eset, ahol anomáliát várhatunk, a keresztthatás. Itt, ha  $b$  és  $Y$  között nincs Coulomb-kölcsönhatás,  $\sigma_l$  ( $l > 0$ ) az energia simán változó függvénye  $k=0$  környékén. Ha viszont  $l=0$ , a  $\frac{d\sigma}{dE} \sim \frac{d\sigma}{dk^2}$  derivált  $k=0$  környékén végtelenné válik ( $+$  vagy  $-$ ), azaz a hatáskeresztmetszetben a következő négy anomália-típus valamelyike jelentkezik:



I.1. ábra. A hatáskeresztmetszetben fellépő lehetséges anomália-típusok a küszöb környékén

Ezek az úgynevezett Wigner-féle csupok.

Ha Wigner-csupokat keresünk, akkor csak azokat a folyamatokat kell tekintenünk, ahol  $s$  hullámú neutron távozása is lehetséges, hiszen  $b$  és  $Y$  között csak akkor nincs Coulomb-kölcsönhatás (a magfizika témakörén belül maradva), ha  $b$  = neutron.



Figyelemre méltó körülmény, hogy ez ideig csak igen kevés cuspot, illetve esetleg cusppal azonosítható anomáliát figyeltek meg. A megfigyelt esetek a következő közös vonásokkal rendelkeznek:

a) A cusp egy rezonancia közelében van.

b) A közelben levő rezonancia „egyszerű szerkezetű”. (Könnyű magok esetében kevés szabadsági fok gerjesztődik, azaz a közbenső magnak csak kevés állapota vesz részt a rezonancia létrehozásában. A nehéz magoknál pedig a szóban forgó rezonancia egyrészcseke neutronrezonancia jellegű.)

Felmerül a kérdés, hogy miért nem találtak cuspot sok más esetben is. Erre egy lehetséges magyarázat, hogy a küszöb és rezonancia egymásra hatása az, ami lehetővé teszi a cusp megfigyelését.

Jelen dolgozat célja, hogy egy egzaktul megoldható modell keretében vizsgáljuk a küszöbjelenségek és rezonanciák kölcsönhatását. Arra a kérdésre keresünk választ, hogy hogyan viselkedik a küszöb közelében a hatáskeresztmetszet, ha a küszöb környékén egy (egyrészcseke, doorway vagy compound) rezonancia is található.

A dolgozat további részében részletesen áttekintjük a küszöbviselkedést és az eddig talált cuspokat. Ezután megmutatjuk, hogy egy nem lokális szeparálható potenciállal hogyan lehet egyrészcseke, izobár analóg (doorway) vagy compound rezonanciákat létrehozni és ezekkel a küszöbjelenségeket tanulmányozni.

## II. Küszöbjelenségek áttekintése

Ebben a fejezetben Wigner levezetését követve megnézzük, hogyan vizsgálható egy zárt csatorna megnyílásának hatása valamely más, egyidejűleg végbemenő reakció hatáskeresztmetszetére, és miként módosul a kép, ha a küszöb környékén rezonancia jelentkezik a hatáskeresztmetszetekben. A jelenség leírására legalkalmasabb az  $R$  mátrix elmélet, mert a hatáskeresztmetszetek küszöbkörnyéki viselkedését a Schrödinger-egyenlet külső, magon kívüli része és az  $R$  mátrix közelbe eső pólusa határozza meg. Az  $R$  mátrix elmélet az  $S$  mátrixot éppen a külső hullámfüggvényeken és az  $R$  mátrixon keresztül fejezi ki. Az  $R$  mátrix elmélet használhatóságához csupán azt kell feltennünk, hogy a magerők rövid hatótávúak és a vizsgált reakció kezdeti és végállapotában két részecske van jelen.

Röviden összefoglaljuk azokat a fogalmakat és képleteket, amelyeket az  $R$  mátrix elméletből a továbbiakban felhasználunk [25, 7].

Legyen  $\varphi$  a Schrödinger-egyenlet megoldása olyan határfeltételekkel, hogy a küszöb feletti energiákra  $r_c \rightarrow \infty$ -nél  $\varphi$  legyen periodikus, a küszöb alatti energiákra pedig exponenciálisan csökkenő. (Itt  $c$  a csatorna indexet,  $r_c$  a  $c$  csatornában a részecskék relatív távolságát jelöli.) Vezessük be a  $V_{cl}$  és  $D_{cl}$  mennyiségeket a következő módon:

$$\varphi = \sum_{cl} V_{cl} \psi_{cl} |_{r_c=a} \quad (\text{II.1})$$

$$\varphi' = \sum_{cl} D_{cl} \psi_{cl} \frac{2M_c}{\hbar} \Big|_{r_c=a}, \quad (\text{II.2})$$

ahol  $l$  a pályamomentum,  $\varphi'$  a  $\varphi$  szerinti deriváltja,  $\psi_{cl}$  a hullámfüggvény azon



része, mely nem tartalmazza az  $r_c$  relatív távolságot,  $M_c$  a redukált tömeg a  $c$  csatornában és  $a$  a csatornasugár. (Feltesszük, hogy a csatornasugarat minden csatornában azonosnak tekinthetjük.) Az  $R$  mátrix elmélet szerint

$$V_{cl} = \sum_{c'l'} R_{cl, c'l'} D_{c'l'}, \quad (\text{II.3})$$

ahol

$$R_{cl, c'l'} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda, cl} \gamma_{\lambda, c'l'}}{E_{\lambda} - E} \quad (\text{II.4})$$

a reakció mátrix, amely valós és szimmetrikus.

A Schrödinger-egyenlet  $cl$  csatornára vonatkozó megoldását mint ki- és befutó hullámok szuperpozícióját írhatjuk fel a nyitott csatornák esetében. Jelöljük a kifutó hullámot  $O_{cl}$ -lel.

$$O_{cl} = \sqrt{\frac{M_c}{\hbar k_c}} \sqrt{\frac{\pi k_c r_c}{2}} \frac{1}{r_c} H_{l+1/2}^{(1)}(k_c r_c), \quad (\text{II.5})$$

ahol  $k_c$  a  $c$  csatornabeli hullámszám:

$$E = Q_c + k_c^2, \quad (\text{II.6})$$

$Q_c$  a  $c$  csatorna küszöbenergiája és  $H_{l+1/2}^{(1)}$  az  $l+1/2$  indexű Hankel-függvény. A befutó hullámfüggvény:  $I_{cl} = O_{cl}^*$ . A zárt csatornában érvényes hullámfüggvényt szintén jelölhetjük  $O_{cl}$ -lel, mert zárt csatornában  $k_c$  tisztán képzetes és a kifutó hullámot a felső félsíkon analitikusan folytatva képzetes  $k_c$ -re éppen a zárt csatornában érvényes exponenciálisan csökkenő hullámfüggvényre jutunk.

Tehát:

$$\varphi = \sum_{cl} \psi_{cl} [\alpha_{cl} O_{cl} + \beta_{cl} O_{cl}^*] \quad (\text{II.7})$$

a Schrödinger-egyenlet megoldása (II.1) alatti határfeltételek mellett (zárt csatornára  $\beta_{cl}=0$ ).

Definíció szerint

$$V_{cl} = [\alpha_{cl} O_{cl} + \beta_{cl} O_{cl}^*]_{r_c=a}. \quad (\text{II.8})$$

Mínthogy

$$\varphi' = \sum_{cl} \psi_{cl} [\alpha_{cl} O'_{cl} + \beta_{cl} O_{cl}^{*'}] \quad (\text{II.9})$$

(II.2) alapján

$$D_{cl} = \frac{\hbar}{2M_c} [\alpha_{cl} O'_{cl} + \beta_{cl} O_{cl}^{*'}]_{r_c=a}. \quad (\text{II.10})$$

Vezessük be a következő mennyiséget:

$$q_{cl} = \frac{2M_c}{\hbar} \frac{O_{cl}}{O'_{cl}}. \quad (\text{II.11})$$

(II.8)-ba beírva (II.11)-et

$$V_{cl} = \frac{\hbar}{2M_c} [\alpha_{cl} q_{cl} O'_{cl} + \beta_{cl} q_{cl}^* O_{cl}^{*'}]_{r_c=a}. \quad (\text{II.12})$$



$V_{cl}$  és  $D_{cl}$  között az  $R$  mátrix teremt kapcsolatot:

$$\frac{1}{M_c} [\alpha_{cl} q_{cl} O'_{cl} + \beta_{cl} q_{cl}^* O_{cl}^{*'}] r_c = a = \sum_{c'l'} R_{cl, c'l'} \frac{1}{M_{c'}} [\alpha_{c'l'} O'_{c'l'} + \beta_{c'l'} O_{c'l'}^{*'}] r_{c'} = a. \quad (\text{II.13})$$

A fenti egyenletet, bevezetve a

$$q_{cl, c'l'} = q_{cl} |_{r_c=a} \delta_{cl, c'l'} \quad (\text{II.14})$$

$$O'_{cl, c'l'} = \frac{1}{M_c} O'_{cl} |_{r_c=a} \delta_{cl, c'l'}$$

mátrixokat, egyszerűbben is felírhatjuk mátrix írásmódban:

$$qO'\alpha + q^*O^{*'}\beta = R(O'\alpha + O^{*'}\beta), \quad (\text{II.15})$$

ahol a dőlt kövér mátrixot, az álló kövér vektort jelent a  $cl$  indexben. (II.15)-öt átrendezve az az

$$\alpha = -O'^{-1}(q - R)^{-1}(q^* - R)O^{*'}\beta \quad (\text{II.16})$$

alakra hozható.

Az  $S$  mátrixot az

$$\alpha = -S\beta \quad (\text{II.17})$$

összefüggés definiálja. (II.16) és (II.17)-et összehasonlítva látjuk, hogy

$$S = O'^{-1}(q - R)^{-1}(q^* - R)O^{*'} \quad (\text{II.18})$$

A fenti kifejezés célszerű alakját kapjuk a következő összefüggések felhasználásával:

$$(q - R)^{-1}(q^* - R) = (q - R)^{-1}(q^* - q + q - R) = (q - R)^{-1}(q^* - q) + 1 \quad (\text{II.19})$$

és

$$(q^* - q)_{cl, cl} = q_{cl}^* - q_{cl} = \frac{2M_c}{\hbar} \left( \frac{O_{cl}^*}{O_{cl}^{*'}} - \frac{O_{cl}}{O_{cl}'} \right) = \frac{2M_c}{\hbar} (O_{cl}^* O'_{cl} - O_{cl} O_{cl}^{*'}) \frac{1}{|O_{cl}'|^2}. \quad (\text{II.20})$$

Minthogy az eredetileg megengedett csatornákra

$$O_{cl}^* O'_{cl} - O_{cl} O_{cl}^{*'} = \frac{2iM_c}{\hbar}. \quad (\text{áramsűrűség}) = \frac{2iM_c}{\hbar} \frac{1}{r_c^2} \quad (\text{II.21})$$

(II.20)-t

$$q_{cl}^* - q_{cl} = i \left( \frac{2M_c}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{|O_{cl}'|^2 r_c^2} \quad (\text{II.22})$$

alakra hozhatjuk. (II.18)-ba beírva (II.19)-et és az  $r_c = a$  helyen vett (II.22)-t, az  $S$  mátrixnak a küszöbjelenségek vizsgálata szempontjából legalkalmasabb alakját nyerjük (elhagyva a mátrixokat jelölő kiemeléseket):

$$S = O'^{-1}O^{*'} - \frac{4i}{(\hbar a)^2} O'^{-1}(R - q)^{-1}O'^{-1}. \quad (\text{II.23})$$



A későbbiekben az  $S$  mátrixot spin nélküli részek reakciójára kívánjuk felhasználni, mely esetben a hatáskeresztmetszet:

$$\sigma(a \rightarrow b) = \sum_l \sigma^{(l)}(a \rightarrow b) = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\delta_{ab} - S_{ab}|^2. \quad (\text{II.24})$$

Ezután az áttekintés után térjünk rá a küszöbviselkedés és a kereszthatás tárgyalására. Vezessük be a Wigner-féle szóhasználatot:

Nevezzük a küszöbenergia alatt megengedett részecskét  $p$  részecskének (csatornának), a küszöbenergia alatt nem megengedett részecskét  $n$  részecskének (csatornának). Vizsgálhatunk  $n \rightarrow p$  vagy  $p \rightarrow n$  típusú reakciót. Az előző egzoterm típusú, azaz a reakció folyamán  $Q$  reakcióhő is felszabadul, míg az utóbbi endoterm típusú, azaz csak akkor indul meg, ha a  $p$  típusú részecske legalább  $Q$  energiával rendelkezik. A hatáskeresztmetszet küszöbkörnyéki vizsgálata azt jelenti, hogy olyan esetet tárgyalunk, amikor az  $n$  típusú részecske kis energiával rendelkezik.

A későbbiekben az  $n \rightarrow p$ ,  $p \rightarrow n$  és  $n \rightarrow n$  típusú reakciókkal (küszöbviselkedés), valamint  $p \rightarrow p$  szórással (kereszthatás) fogunk foglalkozni. Az  $n \rightarrow p$  és  $p \rightarrow n$  átmeneteknél az  $S$  mátrix nem diagonális elemeit kell kiszámítani. A (II.23) képlettel megadott  $S$  mátrix első tagja nem ad járulékot, mert diagonális, míg a második tagban mindig lesz egy  $p$  típusú és egy  $n$  típusú  $O'^{-1}$ . A küszöbenergia környékén a  $p$  típusú  $O'^{-1}$ -nak nincs szingularitása, tehát konstansnak tekinthető. A hatáskeresztmetszet küszöbkörnyéki viselkedését így az  $(R-q)^{-1}$  és az  $n$  típusú  $O'^{-1}$  határozza meg.  $q_{nl}$  és  $Q_{nl}^{-1}$  küszöbkörnyéki viselkedését a későbbiekben megvizsgáljuk.  $R_{cl, c'l'}$  energiafüggését (II.4) alapján ismerjük. Ha a küszöb környékén nincs az  $R$  mátrixnak pólusa, akkor  $R_{cl, c'l'}$  konstansnak tekinthető. Ha azonban a küszöbenergia és egy  $E_\lambda$  rezonanciaenergia egymás közelében van, akkor az  $R$ -ben az adott  $E_\lambda$ -hoz tartozó tagot explicite ki kell írni. Mivel a későbbiekben a rezonancia és a küszöb kölcsönhatását akarjuk megvizsgálni, ezért az  $R$  mátrixot így írjuk fel:

$$R_{cl, c'l'} = R_{cl, c'l'}^0 + \frac{\gamma_{\lambda, cl} \gamma_{\lambda, c'l'}}{E_\lambda - E}. \quad (\text{II.25})$$

A következőkben vizsgálatainkat semleges, spin nélküli részekre korlátozzuk. A spinek figyelembevétele az eredményeket nem befolyásolja, míg a töltés figyelembevétele igen (lásd I.1 táblázat), de ezek a levezetés menetét nem érintik. Pl. a töltés figyelembevétele azt jelenti, hogy  $O_{cl}$  (II.5) alakjában Hankel-függvények helyett Coulomb-függvényt kell írni. Levezetéseink során a Wigner-féle gondolatmenetet követjük azzal az eltéréssel, hogy rezonanciák felléptére is számítunk, azaz konstans  $R$  mátrix helyett a (II.25) alakkal számolunk.

Az  $O_{nl}$  hullámfüggvények küszöbkörnyéki viselkedésének tárgyalásához tekintsük a  $H_{l+1/2}^{(1)}$  [30]-ból ismert alakját:

$$H_{l+1/2}^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} i^{-(l+1)} e^{+ikr} \sum_{m=0}^l (-1)^m \frac{(l+m)!}{m!(l-m)!} \frac{1}{(2ikr)^m}. \quad (\text{II.26})$$

Ezt (II.5)-be írva azt kapjuk, hogy

$$O_{nl} = \sqrt{\frac{M_n}{\hbar k_n}} \frac{1}{r} i^{-(l+1)} e^{ik_n r} \sum_{m=0}^l (-1)^m \frac{(l+m)!}{m!(l-m)!} \frac{1}{(2ik_n r)^m}. \quad (\text{II.27})$$



A küszöb környezetét a  $k_n a \ll 1$  összefüggéssel definiáljuk. A (II.23) alatti  $S$  mátrixhoz  $O'_{nl}{}^{-1}$ -re van mindig szükségünk, mely (II.27) alapján  $k_n$ -ben vett legalacsonyabb rendben

$$\frac{1}{O'_{nl}} \sim k_n^{l+1/2}. \quad (\text{II.28})$$

A  $q_{nl}$  függvény küszöbkörnyéki viselkedéséhez  $O'_{nl}$ -re is szükségünk van. (II.27)-et  $r$  szerinti deriválva kapjuk, hogy

$$O'_{nl} = \sqrt{\frac{M_n}{\hbar k_n}} i^{-(l+1)} e^{ik_n r} \sum_{m=1}^{l+1} (-1)^{m-1} \frac{(l+m-1)!}{(m-1)!(l-m+1)!(2i)^{m-1}} \cdot \left( \frac{ik_n^2}{(k_n r)^m} - \frac{mk_n^2}{(k_n r)^{m+1}} \right) \quad (\text{II.29})$$

$$q_{nl} = \frac{2M_n}{\hbar} \frac{O_{nl}}{O'_{nl}} = \frac{2M_n}{\hbar} \frac{\sum_{m=1}^{l+1} \frac{c_{m-1} k_n}{(k_n r)^m}}{\sum_{m=1}^{l+1} \frac{c_{m-1} k_n^2}{(k_n r)^m} \left( i - \frac{m}{k_n r} \right)}. \quad (\text{II.30})$$

A törtet  $k_n^2 r^{l+2}$ -vel bővítve, az összegezéseknél az indexet  $m \rightarrow l+1-m$ -ként átjelölve kapjuk, hogy

$$q_{nl} = \frac{2M_n}{\hbar} r \frac{\sum_{m=0}^l c_{l-m} (k_n r)^m}{\sum_{m=0}^l i c_{l-m} (k_n r)^{m+1} - \sum_{m=0}^l (l+1-m) c_{l-m} (k_n r)^m}. \quad (\text{II.31})$$

(II.30) és (II.31)-ben bevezettük a

$$c_m = \frac{(-1)^m (l+m)!}{m! (l-m)! (2i)^m} \quad (\text{II.32})$$

jelölést.

$q_{nl}$  (II.31)-beli alakját a  $k_n a \approx 0$  környékén sorbafejtve azt kapjuk, hogy

$$q_{nl} = \bar{q}_{nl} + a_l k_n a + b_l (k_n a)^2 + \dots, \quad (\text{II.33})$$

ahol

$$\begin{aligned} \bar{q}_{nl} &= -\frac{2M_n}{\hbar} a \frac{1}{(l+1)} \\ a_l &= \begin{cases} -\frac{2M_n}{\hbar} a i, & \text{ha } l = 0 \\ 0, & \text{ha } l > 0 \end{cases} \\ b_l &= \begin{cases} \frac{2M_n}{\hbar} a, & \text{ha } l = 0 \\ -\frac{2M_n}{\hbar} a \cdot \frac{1}{4}, & \text{ha } l = 1 \\ \frac{2M_n}{\hbar} a \frac{1}{(l+1)^2}, & \text{ha } l > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$



(II.33) és (II.34) összevetéséből láthatjuk, hogy a  $q_{nl}$  függvény küszöbkörnyéki viselkedése élesen különbözik  $l=0$  és  $l \neq 0$  esetén. Az  $l=0$  esetben  $q_{n0}$  hatvány sorában  $k_n$  az első hatványon is fellép, így  $q_{n0}$ -nak  $E=Q+k_n^2$  szerinti deriváltja a küszöb környékén szinguláris:

$$\frac{dq_{n0}}{dE} = \frac{dq_{n0}}{dk_n} \frac{dk_n}{dE} = (a_l a + 2b_l a^2 + \dots) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{E-Q}}, \quad (\text{II.35})$$

míg  $l>0$ -ra ez a szingularitás nem áll fenn. A későbbiekben látni fogjuk, hogy  $q_{nl}$  ezen viselkedése okozza hogy keresztthatás csak  $l=0$ -nál jelentkezik.

Hátra van még az  $(R-q)^{-1}$  mátrix küszöbkörnyéki viselkedésének vizsgálata. Tegyük fel, hogy csak két csatornán mehet végbe a reakció. A rugalmas  $p$  csatornán és a küszöb  $n$  csatornán. Ekkor

$$(R-q)_l = \begin{pmatrix} R_{pp}^{(l)} - q_{pl} & R_{pn}^{(l)} \\ R_{pn}^{(l)} & R_{nn}^{(l)} - q_{nl} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.36})$$

ahol az első el nem tűnő korrekció pontosságával

$$q_{nl} = \bar{q}_{nl} + \gamma_l k_n^L. \quad (\text{II.37})$$

Itt

$$\gamma_l = \begin{cases} a_l \cdot a & \text{és} \\ b_l \cdot a^2 & \end{cases} \quad L = \begin{cases} 1 & \text{ha} \\ 2 & \end{cases} \quad \begin{matrix} l=0 \\ l>0 \end{matrix} \quad (\text{II.38})$$

[vesd össze (II.33) és (II.34)-el]  $R_{cl,c'l'}$  és  $q_{nl}$  (II.25) és (II.37) alakját (II.36)-ba beírva  $(R-q)_l$  következő alakját nyerjük:

$$(R-q)_l = \frac{1}{\varepsilon_\lambda - k_n^2} A_l, \quad (\text{II.39})$$

ahol

$$A_l = \begin{pmatrix} (R_{pp}^{0l} - q_{pl})(\varepsilon_\lambda - k_n^2) + \gamma_{\lambda,pl}^2 & R_{pn}^{0l}(\varepsilon_\lambda - k_n^2) + \gamma_{\lambda,pl}\gamma_{\lambda,nl} \\ R_{pn}^{0l}(\varepsilon_\lambda - k_n^2) + \gamma_{\lambda,pl}\gamma_{\lambda,nl} & (R_{nn}^{0l} - \bar{q}_{nl})(\varepsilon_\lambda - k_n^2) + \gamma_{\lambda,nl}^2 - \gamma_l k_n^L(\varepsilon_\lambda - k_n^2) \end{pmatrix} \quad (\text{II.40})$$

és

$$\varepsilon_\lambda = E_\lambda - Q. \quad (\text{II.41})$$

$$K_l \equiv (R-q)_l^{-1} = \frac{1}{D_l} \begin{pmatrix} A_{nn,l} & -A_{np,l} \\ -A_{np,l} & A_{pp,l} \end{pmatrix} \equiv \frac{B_l}{D_l}, \quad (\text{II.42})$$

ahol

$$\begin{aligned} D_l &= (\varepsilon_\lambda - k_n^2)[(R_{pp}^{0l} - q_{pl})(R_{nn}^{0l} - \bar{q}_{nl}) - (R_{pn}^{0l})^2] + \\ &+ (R_{pp}^{0l} - q_{pl})\gamma_{\lambda,nl}^2 + (R_{nn}^{0l} - \bar{q}_{nl})\gamma_{\lambda,pl}^2 - \\ &- 2R_{pn}^{0l}\gamma_{\lambda,pl}\gamma_{\lambda,nl} - \gamma_l k_n^L[(\varepsilon_\lambda - k_n^2)(R_{pp}^{0l} - q_{pl}) + \gamma_{\lambda,pl}^2] = \\ &= \bar{D}_l - \gamma_l k_n^L[(\varepsilon_\lambda - k_n^2)(R_{pp}^{0l} - q_{pl}) + \gamma_{\lambda,pl}^2], \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$



ahol  $\bar{D}_l$   $D_l$ -nek a küszöbenergiánál felvett értéke. A küszöbenergia környékén

$$K_l = \frac{B_l}{D_l} \approx \frac{B_l}{\bar{D}_l} \left( 1 + \frac{(\varepsilon_\lambda - k_n^2)(R_{pp}^{0l} - q_{pl}) + \gamma_{\lambda, pl}^2 \gamma_l k_n^L}{\bar{D}_l} \right). \quad (\text{II.44})$$

Az  $S$  mátrix (II.23)-ban szereplő tagjai közül a  $K_l$  az egyetlen, mely  $k_n$ -n kívül az  $\varepsilon_\lambda$ -tól is függ, így a küszöb környékén levő rezonancia ezen a tagon keresztül jelenik meg.

## II. a) A küszöbviselkedés

Miután az  $S$  mátrixban szereplő minden tag energiafüggését ismerjük a küszöb környékén, vizsgáljuk meg, hogy a hatáskeresztmetszet hogyan viselkedik az induló  $n$  csatornában.  $p \rightarrow n$  és  $n \rightarrow p$  reakciók esetén az  $S$  mátrix nem diagonális tagjait kell vennünk:

$$S_{pn} = -\frac{4i}{(\hbar a)^2} \frac{M_p}{O_{pl}'} (R - q)_{pn, l}^{-1} \frac{M_n}{O_{nl}}. \quad (\text{II.45})$$

(II.28) és (II.44) felhasználásával a küszöbenergia környékén

$$S_{pn} \sim k_n^{l+1/2} (1 + c_l k_n^L), \quad (\text{II.46})$$

ahol  $c_l$  csak  $\varepsilon_\lambda$ -tól függ:

$$c_l = \frac{\varepsilon_\lambda (R_{pp}^{0l} - q_{pl}) + \gamma_{\lambda, pl}^2}{\bar{D}_l} \gamma_l. \quad (\text{II.47})$$

Jelöljük  $\varepsilon_\lambda^{kr}$ -al  $\varepsilon_\lambda$  azon értéket, melynél  $\bar{D}_l = 0$ . Ha  $\varepsilon_\lambda \approx \varepsilon_\lambda^{kr}$ , akkor (II.46)-ban a második tag dominánsá válik. Ha ez nem következik be, akkor legalacsonyabb rendben

$$S_{pn}^{(l)} \sim k_n^{l+1/2} \quad (\text{II.48})$$

és (II.24) alapján

$$\sigma^{(l)}(p \rightarrow n) = \frac{\pi}{k_p^2} (2l+1) |S_{pn}^{(l)}|^2 \sim k_n^{2l+1} \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma^{(l)}(n \rightarrow p) = \frac{\pi}{k_n^2} (2l+1) |S_{pn}^{(l)}|^2 \sim k_n^{2l-1}. \quad (\text{II.50})$$

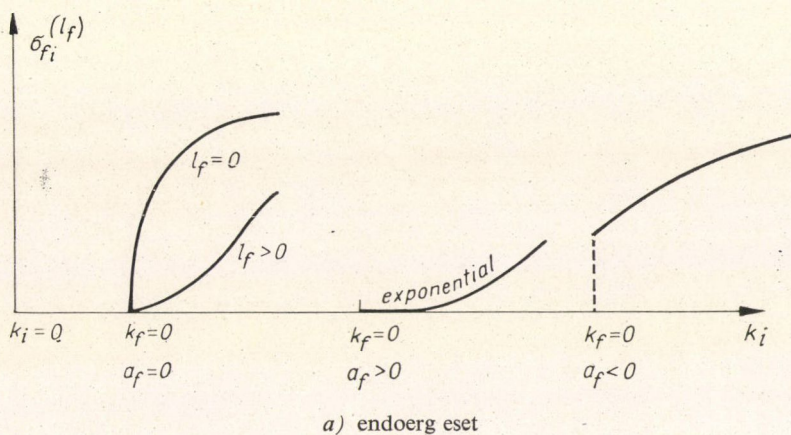
Az  $n \rightarrow p$  típusú feladatra példa a lassú neutron befogás. Ez a folyamat mindig  $l=0$ -val történik, tehát  $\sigma^{(0)}(n \rightarrow p) \sim \frac{1}{v}$ . Ez a jól ismert  $1/v$  törvény, melytől akkor várhatunk eltérést, ha a küszöbenergia véletlenül nagyon közel van egy  $E_\lambda$  rezonanciaenergiához úgy, hogy  $\varepsilon_\lambda = E_\lambda - Q \approx \varepsilon_\lambda^{kr}$ . Ez áll fenn a bevezetésben említett hat, az  $1/v$  törvénytől eltérő esetben.

Röviden vizsgáljuk meg az  $n \rightarrow n$  típusú folyamat rugalmas szórási hatáskeresztmetszetét. A (II.23)  $S$  mátrix elem erre az esetre:

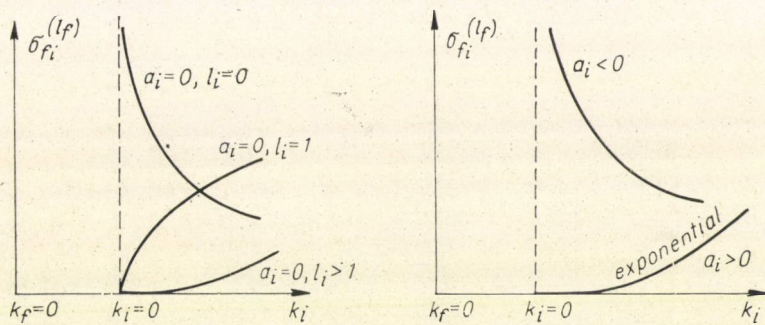
$$S_{nn}^{(l)} = \frac{O_{nl}'}{O_{nl}^{*'}} - \frac{4i}{(\hbar a)^2} M_n^2 \frac{(R - q)_{nn, l}^{-1}}{O_{nl}'^2} \quad (\text{II.51})$$

$$\sigma^{(l)}(n \rightarrow n) = \frac{\pi}{k_n^2} (2l+1) |1 - S_{nn}^{(l)}|^2 \sim \frac{K_{nn, l}}{k_n^2 O_{nl}'^4}. \quad (\text{II.52})$$

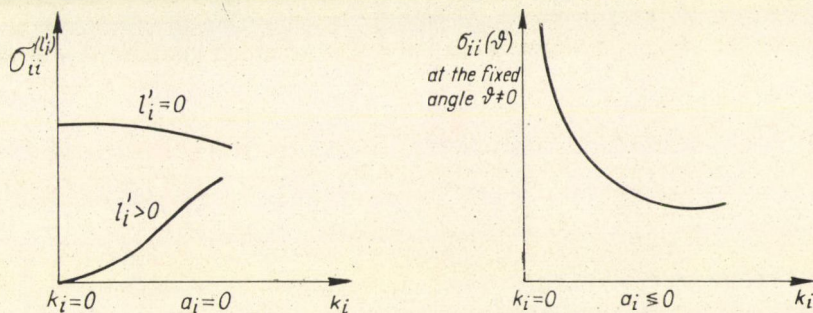




a) endoerg eset



b) exoerg eset



c) rugalmas eset

II.1. ábra. Hatáskeresztmetszetek küszöbkörnyéki viselkedése



(II.28) és (II.44) alapján a  $k_n \approx 0$  környékén

$$1 - S_{nn}^{(l)} \sim k_n^{2l+1} (1 + c_l k_n^L). \quad (\text{II.53})$$

Ha  $\varepsilon_\lambda \neq \varepsilon_\lambda^{kr}$ , akkor  $c_l$  nem szinguláris és legalacsonyabb rendben

$$\sigma^{(l)}(n \rightarrow n) \sim \frac{1}{k_n^2} (k_n^{2l+1})^2 = k_n^{4l}. \quad (\text{II.54})$$

(II.54) azt a jól ismert eredményt adja, hogy  $\sigma^{(0)}(n \rightarrow n, E=0) = 4\pi a^2$ . Valóban a lassú neutronoknak atommagon történő szórását egyetlen állandóval, az  $a$  szórási hosszal lehet jellemezni.

A II.1. ábrán felrajzoltuk a hatáskeresztmetszetek menetét az  $n$  csatornában  $k_n a \ll 1$  esetén. A teljesség kedvéért töltött esetben is feltüntettük a hatáskeresztmetszetet (lásd I.1. táblázat. A jelöléseket is onnan vesszük).

## II. b) $A$ keresztthatás

Az alábbiakban a  $\sigma^{(l)}(p \rightarrow p)$  hatáskeresztmetszet menetét vizsgáljuk azon energia környezetben, ahol az új csatorna megnyílik. A  $\sigma^{(l)}(p \rightarrow p) \sim |1 - S_{pp}^{(l)}|^2$  hatáskeresztmetszet az  $n$  csatornára jellemző  $k_n$  hullámszámot csak a  $q_{nl}$  mennyiségen keresztül tartalmazza. (II.23) alapján

$$S_{pp}^{(l)} = \frac{O'_{pl}}{O_{pl}^{*'}} - \frac{4i}{(\hbar a)^2} M_p^2 \frac{(R-q)_{pp,l}^{-1}}{O_{pl}^{'2}}, \quad (\text{II.55})$$

ahonnan (II.44) felhasználásával, legalacsonyabb rendben

$$1 - S_{pp}^{(l)} \sim K_{pp}^{(l)} = \frac{(\varepsilon_\lambda - k_n^2)(R_{nn}^{0l} - \bar{q}_{nl}) + \gamma_{\lambda, nl}^2}{\bar{D}_l} + \frac{[(\varepsilon_\lambda - k_n^2)R_{pn}^{0l} + \gamma_{\lambda, pl}\gamma_{\lambda, nl}]^2}{\bar{D}_l^2} \gamma_l k_n^L. \quad (\text{II.56})$$

A küszöbnél felvett értéket felülvonással jelölve

$$S_{pp}^{(l)} = \bar{S}_{pp}^{(l)} + \varepsilon_l k_n^L. \quad (\text{II.57})$$

A küszöb alá a  $k_n \rightarrow i|k_n|$  helyettesítéssel jutunk, így

$$S_{pp}^{(l)} = \bar{S}_{pp}^{(l)} + \begin{cases} \varepsilon_l |k_n|^L, & \text{ha } E > Q \\ \varepsilon_l (i|k_n|)^L, & \text{ha } E < Q. \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Itt

$$\varepsilon_l = -i \frac{4M_p^2 \gamma_l}{(\hbar a)^2} \frac{1}{O_{pl}^{'2}} \frac{[\varepsilon_\lambda R_{pn}^{0l} + \gamma_{\lambda, pl}\gamma_{\lambda, nl}]^2}{\bar{D}_l^2}. \quad (\text{II.59})$$

(II.58)-at (II.24)-be írva kapjuk, hogy

$$\sigma^{(l)}(p \rightarrow p) = \bar{\sigma}^{(l)}(p \rightarrow p) + \alpha_l \sqrt{|E - Q|}^L. \quad (\text{II.60})$$



A küszöb alatt és felett általában különböző  $\alpha_l$  érvényes. A (II.60)-ból látszik, hogy  $l=0$  esetén

$$\left. \frac{d\sigma^{(0)}(p \rightarrow p)}{dE} \right|_{E=Q} = \left. \frac{d\bar{\sigma}^{(0)}(p \rightarrow p)}{dE} \right|_{E=Q} \pm \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{|E-Q|}} \Big|_{E=Q}. \quad (\text{II.61})$$

Vagyis a derivált értéke végtelen, a kétoldali határértéke lehet azonos is és különböző is. Ha  $l>0$ , akkor

$$\frac{d\sigma^{(l)}(p \rightarrow p)}{dE} = \frac{d\bar{\sigma}^{(l)}(p \rightarrow p)}{dE} \neq \infty.$$

Amennyiben az  $l=0$  impulzus momentumot a paritásmegmaradás nem tiltja meg, akkor a  $\sigma = \sum_l \sigma^{(l)}$  megfigyelhető hatáskeresztmetszet  $E=Q$  helyen vett deriváltja szintén végtelen.

Vizsgáljuk meg, hogy (II.61) alapján mondhatunk-e valamit  $\frac{d\sigma^{(0)}(p \rightarrow p)}{dE}$  előjeléről. Ehhez tekintsük a (II.58)-ban felírt  $S_{pp}^{(0)}$ -t:

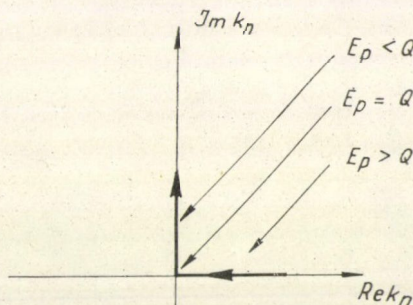
$$S_{pp}^{(0)} = \bar{S}_{pp}^{(0)} + \varepsilon_0 k_n, \quad (\text{II.62})$$

ahol  $\varepsilon_0$  komplex konstans.  $S_{pp}^{(0)}$  lineáris függvénye  $k_n$ -nek, ezért  $S_{pp}^{(0)}$  küszöbkörnyéki változása a komplex síkon, miközben  $E>Q$ -ról  $E<Q$ -ra térünk át olyan, mint a II.2. ábrán felrajzolt  $k_n$  menete.

Az  $\varepsilon_0$ -lal történő szorzás miatt a komplex síkon origó körüli elforgatást kell végeznünk, majd az  $\bar{S}_{pp}^{(0)}$  komplex szám hozzáadása miatt az origóból megfelelően el kell tolni. A megfelelő eltolás azt jelenti, hogy teljesíteni kell  $E \leq Q$ -ra az  $|S_{pp}^{(0)}|^2 = 1$  és  $E > Q$ -ra az  $|S_{pp}^{(0)}|^2 < 1$  feltételeket, amelyek az  $S$  mátrix unitaritását fejezik ki esetünkre. Így az  $\varepsilon_0$ -lal való szorzás és az  $\bar{S}_{pp}^{(0)}$ -vel való eltolás csak a II.3 ábrán látható eredményre vezethet. Mivel  $\text{Re } \bar{S}_{pp}^{(0)}$  és  $\text{Im } \bar{S}_{pp}^{(0)}$  előjeléről általában nem tudunk semmit, ezért  $\bar{S}_{pp}^{(0)}$  hozzáadása négyféle eredményre vezethet. A II.3. ábrán szaggatott vonallal rajzoltuk be az

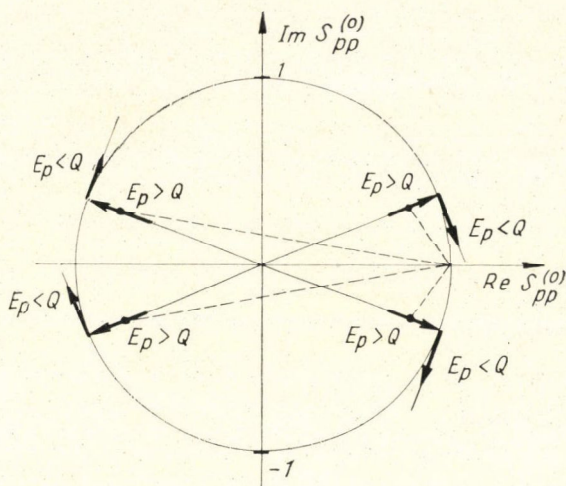
$(1 - S_{pp}^{(0)})$ -t  $E > Q$ -ra. Rugalmas szórás hatáskeresztmetszete  $|1 - S_{pp}^{(0)}|^2$ -nel arányos, a II.3. ábrából látszik, hogy ennek értéke mind a négy esetben nő, ha  $E \rightarrow Q + 0$ . A hatáskeresztmetszet nőhet is és csökkenhet is, ha  $E \rightarrow Q - 0$ . Így a hatáskeresztmetszet a szórási szögekre való integrálás után a II.4. ábrán felrajzolt kétféle anomáliát mutathatja, ha csak az  $l=0$  megengedett és csak két csatorna van nyitva.

Szeretném kihangsúlyozni, hogy a fenti levezetésben erősen kihasználtuk, hogy  $|S_{pp}^{(0)}|^2 = 1$ , ha  $E \leq Q$ , azaz az  $S$  mátrix unitaritását. Ez ilyen formában nem teljesül, ha a küszöb felett nem csak két csatorna van nyitva, vagy ha olyan kétszatornás modellt tekintünk, ahol az  $S$  mátrix nem uniter. (Pl. egy kétszatornás komplex optikai modell esetében.)



II.2. ábra

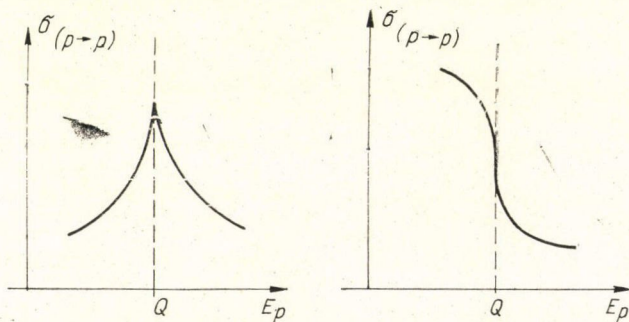




II.3. ábra

Többszörös esetben is könnyen megmutatható, hogy (II.61) továbbra is igaz [4], [6], így ilyenkor az I.1. ábrán látható anomáliák felléptét várhatjuk, ha az  $l=0$  impulzus momentum megengedett. Ha a levezetésünk során a spineket is figyelembe vesszük, akkor a következő általános kijelentést tehetjük:

Egy  $p \rightarrow p'$  reakció differenciális vagy integrális hatáskeresztmetszetében az I.1. ábrán látható anomáliák léphetnek fel azon az energián, ahol egy  $p \rightarrow n$  folyamat is



II.4. ábra. A rugalmas szórás integrális hatáskeresztmetszetében fellépő kétfajta küszöbanomália

lehetővé válik, ha az  $n$  részecske töltetlen és az  $l_n=0$  impulzusmomentum nem tiltott. Ugyanezt mondhatjuk a  $\sigma^{\text{tot}} = \sum_{p'} \sigma(p \rightarrow p')$  totális hatáskeresztmetszetről is.

Ha az új, nyíló csatornával együtt is csak két csatornánk van, akkor az integrális hatáskeresztmetszetben csak a II.4. ábrán látható kétféle anomália léphet fel.



Az előzőekben azt láttuk, hogy semleges  $s$  hullámú új részecskék esetén a keresztthatás úgy nyilvánul meg, hogy a hatáskeresztmetszetek deriváltja az  $E=Q$  küszöbenergiánál végtelenné válik. Ezzel csak kvalitatív kijelentést tettünk a keresztthatásra, nagyságáról (és ezzel kísérleti megfigyelhetőségéről) nem mondtunk semmit. A Wigner-féle csupok nagyságáról teljes általánosságban a következőket mondhatjuk:

(II.59)-ből látjuk, hogy a keresztthatásért felelős  $\varepsilon_0$  az  $\varepsilon_\lambda$ -nak, azaz a rezonancia küszöbtávolságának gyorsan változó függvénye.  $\bar{D}_0$  zérushelyénél  $\varepsilon_0$  végtelenné válik, míg ha  $\varepsilon_\lambda = -\frac{\gamma_{\lambda,p0}\gamma_{\lambda,n0}}{R_{pn}^{00}}$ , akkor a keresztthatás eltűnik. Mivel  $R_{pn}^{0l}$  és  $\gamma_{\lambda,pl}\gamma_{\lambda,nl}$  értékéről általában semmit sem tudunk, próbáljuk meg a cusp nagyságát a hatáskeresztmetszeteknek a küszöb közelében felvett értékeivel (azaz mérhető mennyiségekkel) kapcsolatosba hozni!

## II. c) $A$ csupok mértéke

Kapcsolatot kívánunk teremteni a küszöb alatt is megengedett folyamatok és az új csatornabeli hatáskeresztmetszetek között. E célból tekintsük át (II.45) és (II.57) képleteket. Ha a (II.45) képlet alapján  $l=0$ -ra felírjuk  $S_{pn}$ -t és a (II.57) alapján  $l=0$ -ra  $S_{pp}$ -t, akkor azt látjuk, hogy

$$S_{pn}^{(0)} = \varrho_p k_n^{1/2} (1 + c_0 k_n) \quad (\text{II.63})$$

és

$$S_{pp}^{(0)} = \begin{cases} \bar{S}_{pp}^{(0)} + \varepsilon_0 |k_n|, & \text{ha } E > Q \\ \bar{S}_{pp}^{(0)} + i\varepsilon_0 |k_n|, & \text{ha } E < Q, \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

ahol

$$\varepsilon_0 = \varrho_p^2. \quad (\text{II.65})$$

Ha  $c_0$  nem szinguláris

$$S_{pn}^{(0)} = \varrho_p k_n^{1/2} \quad (\text{II.66})$$

és

$$S_{pp}^{(0)} = \bar{S}_{pp}^{(0)} + \varrho_p \varrho_p k_n. \quad (\text{II.67})$$

Tegyük fel, hogy a küszöb alatt már több nyitott csatorna van. Jelöljük ezeket  $p$ -vel vagy  $p'$ -vel, míg az éppen megnyíló csatornát továbbra is  $n$ -nel. Erre az esetre is könnyen belátható (II.66) és (II.67) általánosítása [3]:

$$S_{pn}^{(0)} = \varrho_p k_n^{1/2} \quad (\text{II.68})$$

$$S_{pp'}^{(0)} = \bar{S}_{pp'}^{(0)} + \varrho_p \varrho_{p'} k_n, \quad (\text{II.69})$$

ahol  $\varrho_p$  és  $\varrho_{p'}$  energia-független komplex szám. Jelöljük  $\sigma_{pp'}$ -vel, a  $\sigma^{(0)}(p \rightarrow p')$  hatáskeresztmetszetet és legyen  $\epsilon = \left| \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M_n} \right|$ . Ekkor a küszöb fölött a  $\sigma_{pp'}$  reakció-hatáskeresztmetszet a  $\sigma_m$  maximális hatáskeresztmetszettel kifejezve:

$$\sigma_{pp'}(Q_n + \epsilon) = \sigma_m \left| \bar{S}_{pp'}^{(0)} + \varrho_p \varrho_{p'} \sqrt{\frac{2M_n \epsilon}{\hbar^2}} \right|^2. \quad (\text{II.70})$$



$\sqrt{\epsilon} \sim k_n$ -ben első tagig elmenve:

$$\sigma_{pp'}(Q_n + \epsilon) \approx \sigma_m \left[ |\bar{S}_{pp'}^{(0)}|^2 + (\bar{S}_{pp'}^{(0)*} Q_p Q_{p'} + \bar{S}_{pp'}^{(0)} Q_p^* Q_{p'}^*) \right] \sqrt{\frac{2M_n \epsilon}{\hbar^2}}. \quad (\text{II.71})$$

Hasonlóan a küszöb alatt

$$\sigma_{pp'}(Q_n - \epsilon) \approx \sigma_m \left[ |\bar{S}_{pp'}^{(0)}|^2 + (\bar{S}_{pp'}^{(0)*} Q_p Q_{p'} - \bar{S}_{pp'}^{(0)} Q_p^* Q_{p'}^*) i \right] \sqrt{\frac{2M_n \epsilon}{\hbar^2}}. \quad (\text{II.72})$$

A küszöbnél

$$\sigma_{pp'}(Q_n) = \sigma_m |\bar{S}_{pp'}^{(0)}|^2 \quad (\text{II.73})$$

és (II.68) alapján a nyíló csatornában

$$\sigma_{pn}(Q_n + \epsilon) = \sigma_m |Q_p|^2 \sqrt{\frac{2M_n \epsilon}{\hbar^2}}. \quad (\text{II.74})$$

(II.71, 72, 73 és 74)-ből egyszerűen beláthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} & [\sigma_{pp'}(Q_n + \epsilon) - \sigma_{pp'}(Q_n)]^2 + [\sigma_{pp'}(Q_n - \epsilon) - \sigma_{pp'}(Q_n)]^2 = \\ & = \sigma_{pn}(Q_n + \epsilon) \sigma_{p'n}(Q_n + \epsilon) \sigma_{pp'}(Q_n) / \sigma_{m'}, \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

ahol  $\sigma_{m'}$  a  $p'$  csatornából induló reakciók maximális hatáskeresztmetszete.

Nyilván felesleges is mondanunk, hogy  $\epsilon$  nagyon kicsi mennyiség, és ezért (II.75) bal oldala  $\sigma_{pp'}$ -nek csak a cuspól származó változását tartalmazza, azaz a  $\sqrt{|E-Q|}$ -el arányos tagot. (II.75) lehetőséget nyújt a cusp mértékének megbecsülésére, ha  $\sigma_{pn}$  és  $\sigma_{p'n}$  a küszöb közelében ismert. Ezen kívül (II.75)-ből látszik, hogy akkor várhatunk „nagy” cuspot, ha nyíló csatornáknak a hatáskeresztmetszet a küszöbnél gyorsan felugrik. Ez tulajdonképpen szemléletesen is érthető. Akkor lesz erős a küszöbhatás, ha az új csatorna „erősen megnyílik”, azaz ha a nyitott csatornából hirtelen nagy fluxus távozik más csatornába. Ez akkor következik be, ha az új csatornában a hatáskeresztmetszetek gyorsan nagy értéket vesznek fel — rezonanciaszerűen indulnak — és ha a nyíló csatornák erősen csatolódnak a vizsgált csatornához. Ezt a feltevést próbáljuk alátámasztani jelen dolgozat V. fejezetében egy szeparálható potenciálon alapuló modell segítségével, míg a harmadik fejezetben a keresztthatással foglalkozó kevés számú kísérleti munkát tekintjük át a célból, hogy vajon támogatják-e a fenti feltevést.

A küszöbjelenségek áttekintésének befejezéseként nézzük meg, hogy a keresztthatás esetleges felléptét milyen fizikai mennyiségek meghatározására, vagy jelenségek kimutatására használhatjuk:

## II. d) Alkalmazások

1. Kétcsatornás esetben a keresztthatás segítségével megkaphatjuk a  $\delta_0$  szórásifázis küszöbnél felvett értékét a következő módon:

Az  $S$  mátrix unitaritását  $E > Q$ -nál az

$$|S_{pp}^{(0)}|^2 + |S_{pn}^{(0)}|^2 = 1 \quad (\text{II.76})$$



egyenlőség fejezi ki. Ebből

$$|S_{pp}^{(0)}|^2 = 1 - |S_{pn}^{(0)}|^2 \approx \left(1 - \frac{1}{2} |S_{pn}^{(0)}|^2\right)^2. \quad (\text{II.77})$$

Négyzetgyököt vonva

$$|S_{pp}^{(0)}| = 1 - \frac{1}{2} |S_{pn}^{(0)}|^2, \quad (\text{II.78})$$

amiből

$$S_{pp}^{(0)} = \bar{S}_{pp}^{(0)} \left(1 - \frac{1}{2} |S_{pn}^{(0)}|^2\right). \quad (\text{II.79})$$

Az  $S_{pn}^{(0)}$  mátrix elem energia függését a küszöb környékén (II.46), illetve (II.48) adja. Most a rezonanciák hatásától eltekintünk, ezért  $l=0$ -ra

$$|S_{pn}^{(0)}|^2 = \beta \sqrt{E-Q}, \quad (\text{II.80})$$

ahol  $\beta$  energia független konstans. (II.80)-at (II.79)-be írva nyerjük, hogy

$$S_{pp}^{(0)} = \bar{S}_{pp}^{(0)} \left(1 - \frac{1}{2} \beta \sqrt{E-Q}\right) \quad (\text{II.81})$$

és  $E < Q$ -ra

$$S_{pp}^{(0)} = \bar{S}_{pp}^{(0)} \left(1 - \frac{i}{2} \beta \sqrt{|E-Q|}\right). \quad (\text{II.82})$$

Megjegyezzük, hogy (II.81) és (II.82)-ből kiindulva minden eddigi eredményünk megkapható.

A szórási fázisra vonatkozó képlet levezetése céljából vezessük be az  $f_{pp}(\theta, E)$  szórási amplitúdót:

$$f_{pp}(\theta, E) = \frac{1}{2ik_p} \sum_l (2l+1)(S_{pp}^{(l)} - 1)P_l(\cos \theta). \quad (\text{II.83})$$

Ha az  $l=0$  tagot tekintjük

$$f_{pp}^{(0)}(\theta, E) = |\bar{f}_{pp}^{(0)}(\theta)| e^{i\alpha(\theta)} - \frac{\beta}{4k_p} \left( \frac{1}{i} \sqrt{E-Q} \right) e^{2i\delta_0}, \quad (\text{II.84})$$

ahol

$$\bar{S}_{pp}^{(0)} = e^{2i\delta_0}, \quad f_{pp}^{(0)}(\theta) \equiv f_{pp}^{(0)}(\theta, Q) = |\bar{f}_{pp}^{(0)}| e^{i\alpha(\theta)}$$

és az  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  jel azt jelenti, hogy a küszöb felett  $a$  és a küszöb alatt  $b$  érvényes.

A differenciális hatáskeresztmetszet legalacsonyabb rendben [7]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(0)}(p \rightarrow p)}{d\Omega} &= |f_{pp}^{(0)}(\theta, E)|^2 = \\ &= |\bar{f}_{pp}^{(0)}(\theta)|^2 - \frac{\beta}{2k_p} |\bar{f}_{pp}^{(0)}(\theta)| \sqrt{|E-Q|} \begin{pmatrix} \sin(2\delta_0 - \alpha) \\ \cos(2\delta_0 - \alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$



Ezt a  $\Theta$  szögre integrálva:

$$\sigma^{(0)}(p \rightarrow p) = \bar{\sigma}^{(0)}(p \rightarrow p) - \frac{\beta}{4k_p^2} \sqrt{|E-Q|} \left( \frac{1 - \cos \delta_0}{\sin \delta_0} \right). \quad (\text{II.86})$$

(II.86)-ból látjuk, hogy mivel  $1 - \cos \delta_0 > 0$ , a hatáskeresztmetszet  $E > Q$ -nál csak csökkenő lehet, mikor  $E$  nő, és ezért az integrális hatáskeresztmetszetben két csatorna esetén valóban csak a II.4. ábrán látható két fajta cusp léphet fel.  $\sin \delta_0$  mind pozitív, mind negatív lehet, így abból, hogy a II.4. ábrán látható két eset közül melyik valósul meg, megmondhatjuk  $\delta_0$  előjelét. (II.86)-ból az is látszik, hogy

$$\frac{1 - \cos \delta_0}{\sin \delta_0} = \frac{\partial}{\partial k_n} \sigma^{(0)}(p \rightarrow p)|_{E>Q} \bigg/ \frac{\partial}{\partial |k_n|} \sigma^{(0)}(p \rightarrow p)|_{E<Q}, \quad (\text{II.87})$$

amiből  $\delta_0$  értéke meghatározható. Mivel a  $\frac{\partial}{\partial k_n}$  deriváltak mérése nehézkes, másképp is megkaphatjuk  $\delta_0$ -t:

A  $\sigma^{(0)}(p \rightarrow n)$  reakció hatáskeresztmetszet (II.80) alapján

$$\sigma^{(0)}(p \rightarrow n) = \frac{\pi}{k_p^2} |S_{pn}|^2 = \frac{\pi}{k_p^2} \beta \sqrt{E-Q}, \quad (\text{II.88})$$

amiből  $\beta$  értékét meghatározhatjuk, majd megmérve a  $\sigma^{(0)}(p \rightarrow p)$  szórási hatáskeresztmetszetet a küszöb alatt és a küszöb felett (II.86)-ból  $\delta_0$ -t nyerjük. A kereszt-hatás segítségével  $\delta_0$  értékét, és nemcsak abszolút értékét kapjuk, ellentétben a szórási fázis meghatározásának egyéb módszerével. A fenti eredmény nemcsak a spin nélküli esetben, hanem általában is fennáll [8].

2. A küszöbhatás jelensége a spinről és relatív paritásokról is ad felvilágosítást. Mivel az  $n$  csatornában csak az  $l=0$  impulzus-momentumú hullám okoz csupot, kísérletileg meghatározhatjuk — ha tudjuk, hogy a cusp milyen parciális hullámban jelentkezett — a csatorna spint és paritást a teljes impulzus-momentum- és a paritás-megmaradás segítségével. Pl. tegyük fel, hogy a  $\sigma(p \rightarrow p')$  hatáskeresztmetszetben az  $l_{p'}=0$  parciális hullámban csupot találunk. Ekkor  $P_{np'} = +1$ , ahol  $P_{np'}$  az  $n$  és  $p'$  csatornák közötti relatív paritás. Ha viszont a cusp az  $l_{p'}=1$  parciális hullámban jelentkezik, akkor  $P_{np'} = -1$ . Ilyen fajta vizsgálatokat Adair végzett eredményesen ritka részek keltésével járó folyamatokra [22].

3. A kereszt-hatás jelensége alkalmas a  $\sigma(p \rightarrow n)$  reakció hatáskeresztmetszetének meghatározására, mely nagyon gyakran nem határozható meg közvetlenül a kísérletekből. Ha három pontban megmérjük a  $p$  és  $p'$  csatornák közötti hatáskeresztmetszetet (az  $n$  csatorna küszöbénél, alatta és felette) és a  $p' \rightarrow n$  folyamat küszöbkörnyéki hatáskeresztmetszetének értékét, akkor (II.75) alapján megbecsülhetjük a másik  $p \rightarrow n$  folyamat hatáskeresztmetszetét.

4. Végül a kereszt-hatás új részecskék kimutatásában is segíthet. Tipikus példa erre a di-neutron. Egy  $\cup$  alakú (ún. „rounded step”) anomáliának a deuteron break-up küszöb alatti fellépte az  $n-d$  szórási hatáskeresztmetszetben információkat adhat a di-neutron létezéséhez. A számítások ugyanis azt mutatják, hogy ez esetben erős effektus várható [23]. Ilyen irányú kísérleti próbálkozást láthatunk pl. [24]-ben.

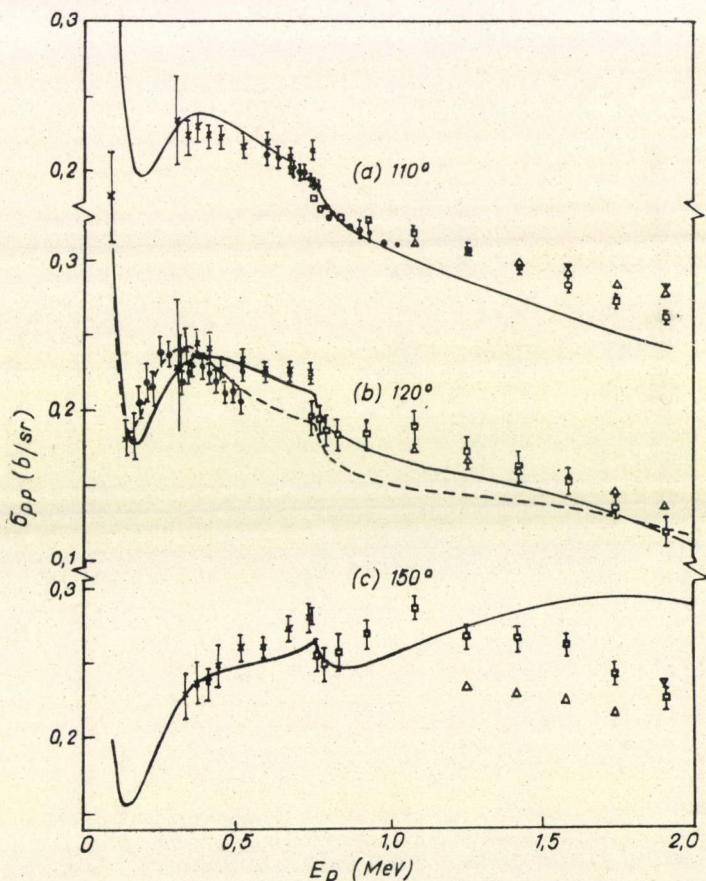


### III. Kísérleti áttekintés

A bevezetésben említettük, hogy igen kevés esetben figyeltek meg keresztthatásból származó anomáliát. Ezek közül a  ${}^7\text{Li}(p, p)$  szórás esete az, ahol legjobban szembetűnő a cusp (l. III/2. pont), de itt és az összes többi esetben is a hatáskeresztmetszet küszöbkörnyéki viselkedése csak a közbenső mag egy küszöbhez közel eső állapotával és a küszöbhatással együttesen magyarázható. Csupán a közbenső mag egy vagy több állapotával (azaz a hatáskeresztmetszet egy vagy több csucst tartalmazó Breit—Wigner-parametrizálásával) vagy csak küszöbeffektussal a hatáskeresztmetszetek menete nem írható le. Lássuk ezeket az eseteket!

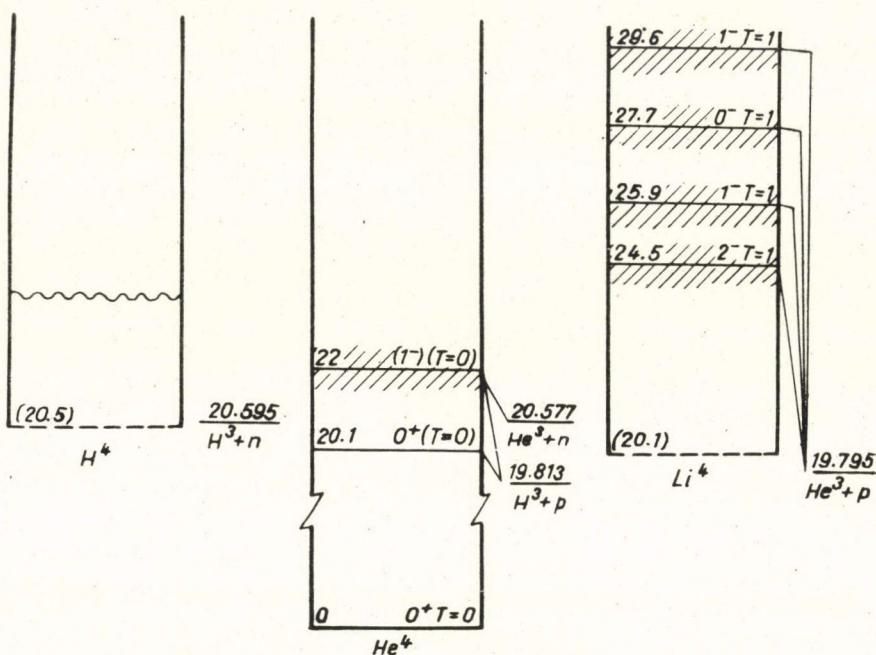
1. A  ${}^3\text{H}(p, p)$  szórásban a  ${}^3\text{H}(p, n)$  reakció küszöbenergiájánál találtak anomáliát [11] (III.1. ábra).

Ugyancsak [11]-ből vettük az  $A=4$  tömegszámú magok energiaszintjeire vonatkozó információkat, amelyek a III.2. ábrán láthatók.



III.1. ábra. A  ${}^3\text{H}(p, p)$  rugalmas szórás hatáskeresztmetszete a protonenergia függvényében



III.2. ábra. Az  $A=4$  tömegszámú magok energiaszintjei

Itt látszik, hogy a neutronküszöb közelébe a  ${}^4\text{He}$  két állapota esik. A III.1. ábrán látható cuspok alakja a hatáskeresztmetszetek Breit—Wigner-parametrizálásával és a nyíló csatorna egyidejű figyelembevételével megkapható volt.

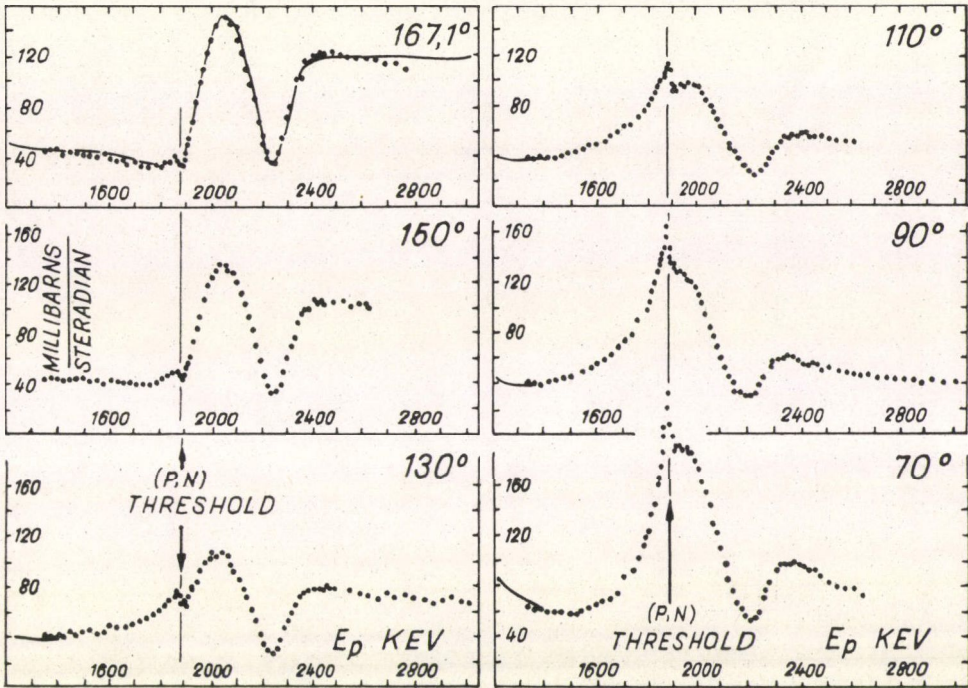
2. A  ${}^7\text{Li}(p, p)$  szórássban látható a legjobban szembetűnő cusp [12]:

A  ${}^7\text{Li}(p, n)$  méréseket jól lehet fittelni, ha feltesszük, hogy a  $(p, p)$  szóráss és a  $(p, n)$  reakció közbeni mag képződésén keresztül történik. A  ${}^7\text{Li}+p$  rendszerből képződő mag a  $\text{Be}^8$ , melynek állapotait a számunkra érdekes energiatartományban a III.1. táblázat tartalmazza.

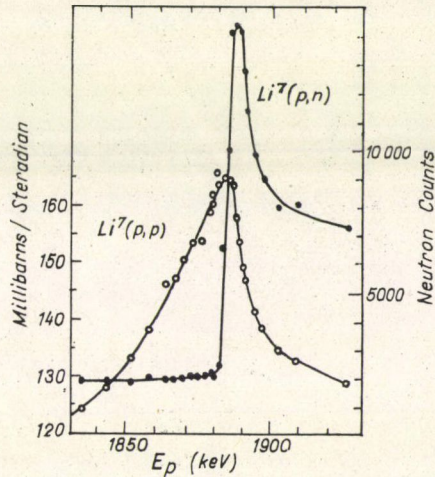
III.1. TÁBLÁZAT

$E_x(\text{Be}^8)$ MeV $\pm$ keV	$E_p$ MeV	$\Gamma_{\text{cm}}$ keV	$\Gamma$ keV	$J^\pi, T$	$I_p$	$I_n$	$\gamma_n^2/\gamma_p^2$	Ref.
$n$ küszöb	1,88							[12, 13]
18,91	1,9	3500	500	$2^-$	0	0	5,0	[13, 15, 29]
19,0	2,1		0,4	$5(3^+)$				[12, 13]
$19,05 \pm 20$	$2,05 \pm 20$	$270 \pm 20$	$310 \pm 20$	(3)				[29]
19,22	2,25	190	220	$3^+; (1)$	1	1	5,2 5,5	[29, 13] [15]





III.3. ábra.  ${}^7\text{Li}(p, p)$  rugalmas szórás hatáskeresztmetszete a protonenergia függvényében

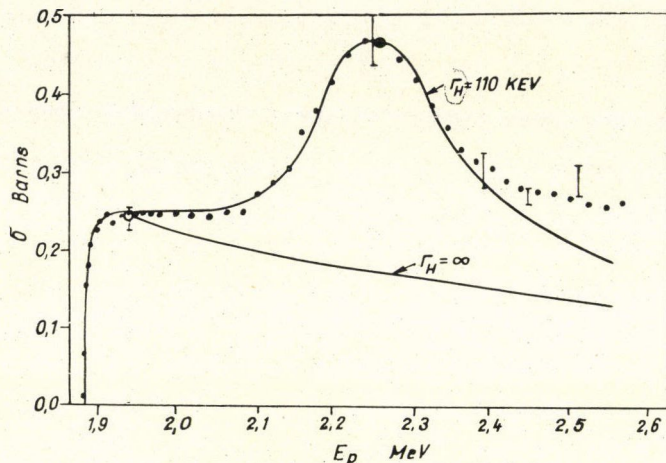


III.4. ábra. A  ${}^7\text{Li}(p, p){}^7\text{Li}$  szórásban  $90^\circ$ -nál látható anomália kinagyítása (bal oldali skála) és a  ${}^7\text{Li}(p, n){}^7\text{Be}$  reakcióból származó neutronhozam (jobb oldali skála)



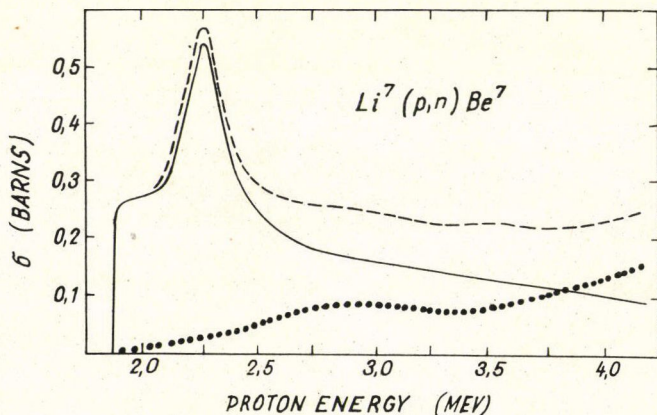
A táblázatban — ahol ismert — feltüntettük a bomló állapotok mért tömegközépponti és laboratóriumi parciális szélességét, spinjét, paritását, izospinjét a proton, illetve neutron impulzus-momentumát, relatív redukált szélességét és azokat a kísérleteket, ahol az illető állapotot megfigyelték.

A fenti állapotok közül az 1,9 MeV-es  $2^-$  és a 2,25 MeV-es  $3^+$  állapotok figyelembevételével a  $\text{Li}^7 + p$  adatok jól fittelhetők. Pl. a  $\text{Li}^7(p, n)$  reakcióra a hatáskeresztmetszet és a  $2^-$  és  $3^+$  állapotokkal számolt fit menete [13]:



III.5. ábra. A  ${}^7\text{Li}(p, n)$  reakció totális hatáskeresztmetszete. Az alsó vonal egy széles  $2^-$  rezonanciával a felső egy  $2^-$  és  $3^+$  rezonanciával számolt hatáskeresztmetszet

míg az előző kettő és egy 3,5 MeV-os  $1^+$  állapot feltételezésével [14]:

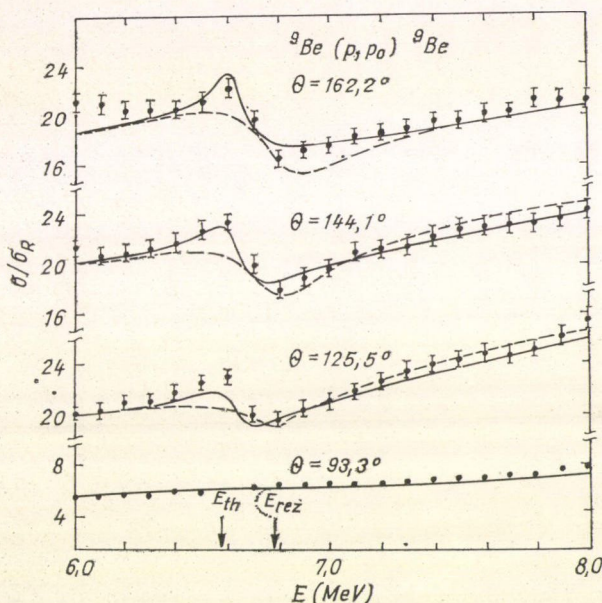


III.6. ábra.  ${}^7\text{Li}(p, n)$  reakció hatáskeresztmetszete. Szaggatott vonal a kísérleti adatokat jelöli, a folytonos vonal az 1,9, 2,25 és 3,5 MeV-es rezonanciák járuléka. A pontozott vonal a mért és számított hatáskeresztmetszet eltérése



A  $\text{Li}^7(p, n)$  reakció polarizációs méréseiben is a domináns hatás a  $3^+$  és  $2^-$  nivó interferenciájából származik [15]. Összefoglalva a  $\text{Li}^7(p, n)$  reakció hatáskeresztmetszetének a neutron küszöbkörnyéki viselkedéséért a  $\text{Be } 2^-, 3^+$  és  $1^+$ -os állapota a felelős.

3. A  ${}^9\text{Be}(p, p')$  folyamat hatáskeresztmetszetében a  ${}^9\text{Be}(p, n_4){}^9\text{B}^*$  reakció küszöbenergiájánál találtak anomáliát (a 4 index arra utal, hogy a negyedik neutron csatorna megnyílásáról van szó [16]).



III.7. ábra. A  ${}^9\text{Be}(p, p')$  rugalmatlan szórás hatáskeresztmetszete és a Rutherford-hatáskeresztmetszet viszonya

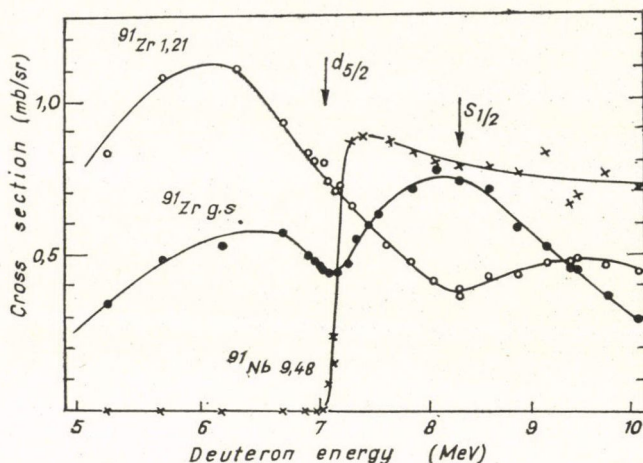
A III.7. ábrán látható, hogy a hatáskeresztmetszet csupán Breit—Wigner-parametrizálása (szaggatott vonal) rosszabb egyezést ad a kísérleti adatokkal, mint a Breit—Wigner-parametrizálás + a küszöb figyelembevétele (folytonos vonal).

4. Az  $A=90$  tömegszám környékén a  $(d, p)$  reakciók gerjesztési függvényében a  $(d, n)$  reakciók küszöbénél kb. 1 MeV széles dip-eket figyeltek meg. Mindegyik esetben a  $(d, p)$  és a  $(d, n)$  reakciókból visszamaradt mag ugyanahhoz az izobár multipletthez tartozott. Először Moore talált a  ${}^{90}\text{Zr}(d, p){}^{91}\text{Zr}(d_{5/2}, GS)$  gerjesztési függvényben dipet a  ${}^{90}\text{Zr}(d, n){}^{91}\text{Nb}(d_{5/2}, AS)$  folyamat küszöbenergiájának környékén [19].

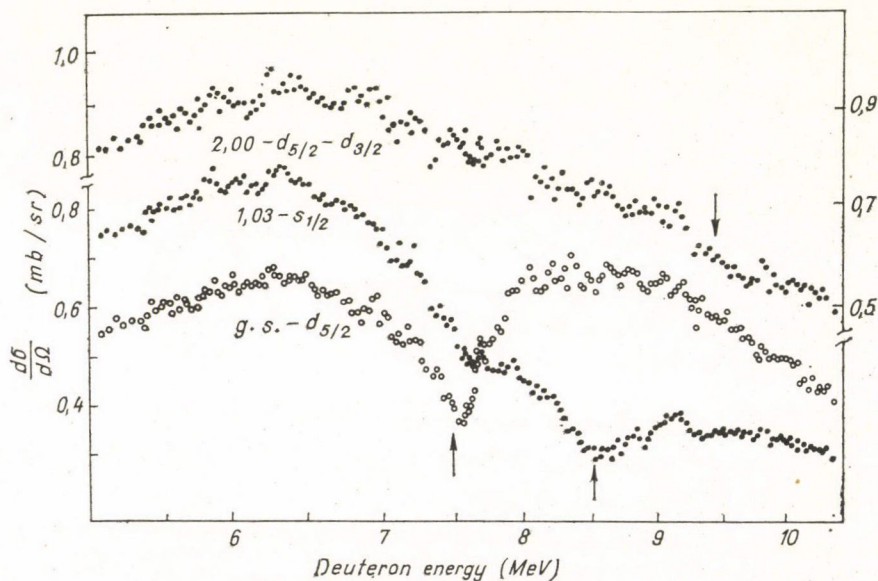
Zimányi és Bondorf-nak sikerült ezt küszöbjelenséggént leírni [9], míg egyrészeske rezonancia és a küszöb hatásaként Graw és Hategan tárgyalta [20].

A legszebb példa a  $(d, p)$  reakcióban talált küszöbanomáliára a  ${}^{88}\text{Sr}(d, p){}^{89}\text{Sr}(d_{5/2}, GS)$  reakcióban látható 7,4 MeV környékén előforduló dip [18]:



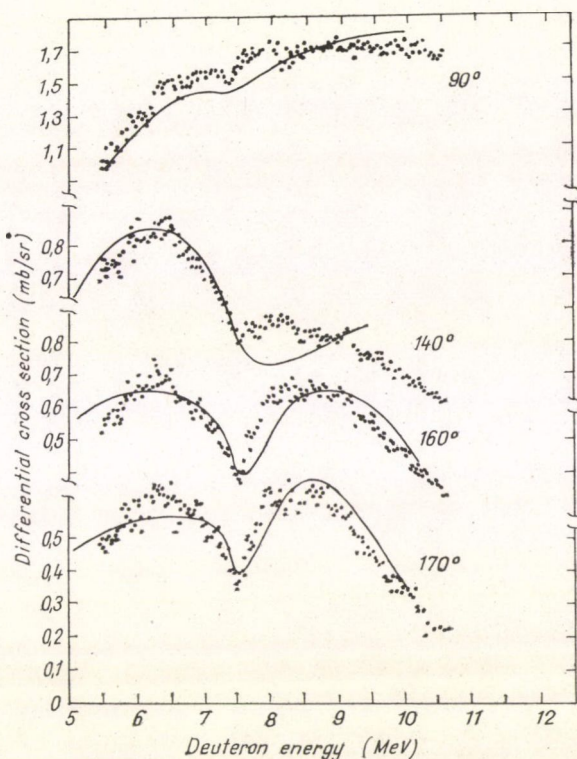


III.8. ábra. A  $^{90}\text{Zr}(d, p)^{91}\text{Zr}(d_{5/2})$ , a  $^{90}\text{Zr}(d, p)^{91}\text{Zr}(s_{1/2})$  és  $^{90}\text{Zr}(d, p)^{91}\text{Nb}(d_{5/2})$  reakciók  $170^\circ$ -nál felvett gerjesztési függvényei. A nyilak a  $^{90}\text{Zr}(d, np)^{91}\text{Nb}(d_{5/2})$  és  $^{90}\text{Zr}(d, np)^{92}\text{Nb}(s_{1/2})$  reakciók küszöbenergiáját jelzik



III.9. ábra. A  $^{88}\text{Sr}(d, p)^{89}\text{Sr}(d_{5/2}, s_{1/2}, d_{5/2} - d_{3/2})$  reakciók  $160^\circ$ -nál felvett gerjesztési függvényei. A függőleges nyilak a megfelelő  $^{88}\text{Sr}(d, n)^{89}\text{Y(A.S.)}$  reakciók küszöbenergiáját jelölik





III. 10. ábra. A  $^{88}\text{Sr}(d, p)^{89}\text{Sr}(d_{5/2})$  reakció  $160^\circ$ ,  $170^\circ$ ,  $140^\circ$  és  $90^\circ$ -nál felvett gerjesztési függvényei. A folytonos vonalak csatolt csatornás Born-közelítéssel (CCBA) számolt gerjesztési függvények

Gyengébben jelentkezik a küszöbanómia a  $^{80}\text{Se}$ ,  $^{86}\text{Kr}$ ,  $^{88}\text{Sr}$ ,  $^{89}\text{Y}$ ,  $^{91, 92, 94, 95, 96}\text{Zr}$ ,  $^{92, 94}\text{Mo}$ ,  $^{93}\text{Nb}$  esetében [17].

Mindezek a küszöbanomáliák az  $A=90$  tömegszám környékén lépnek fel, ahol a  $p$  hullámú neutron erősség függvénynek maximuma van, azaz ott ahol a nyíló csatornában a küszöb környékén egyrészcseke rezonancia található.

Az  $s$  hullámú erősség függvény első maximuma  $A=50$  környékén van. Ezen tömegszám környezetében a  $^{40}\text{Ar}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  és  $^{52}\text{Cr}$  esetében figyeltek meg gyenge küszöbanomáliát [17].

5. Wells, Tucker és Meyerhof [21] rugalmas neutron szórában keresték a küszöbanomáliát.  $^7\text{Li}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ ,  $^{140}\text{Ce}$ ,  $^{138}\text{Ba}$  és  $^{90}\text{Zr}$ -n rugalmas szórt neutronok hatáskeresztmetszetét vizsgálták az első rugalmatlan küszöb környékén. A hatáskeresztmetszetben nem közvetlenül a cusp, hanem energiára átlagolt küszöb-anómia felléptét keresték. Az energiára átlagolt Wigner-cusp mértékét a hatáskeresztmetszet Legendre-polinomok szerinti sorfejtési együtthatóinak függvényében adják meg, mely megkönnyíti az elmélet és a kísérlet összehasonlítását. A  $^7\text{Li}$  és a  $^{56}\text{Fe}$  esetében méréseik eredményéből nem lehet egyértelműen cusp felléptére következtetni. ( $\text{Li}^7$  esetében a várható cusp túl kicsi és nem figyelhető meg, míg  $^{56}\text{Fe}$ -nél a rugalmas



hatáskeresztmetszetben fellépő sok rezonancia mossa el a küszöbjelenséget.) A  $^{140}\text{Ce}$ ,  $^{138}\text{Ba}$  és  $^{90}\text{Zr}$  esetében viszont az energiára átlagolt Wigner-cusp elmélet alapján végzett analízis jó egyezést ad az elmélet és a kísérlet között.

A  $^{138}\text{Ba}$  és  $^{140}\text{Ce}$  azon tömegszám tartományba esnek, ahova az  $s$  hullámú erősség függvény második, széles maximuma esik. Tehát itt is egyrészcseke neutron rezonancia fellépte valószínű a küszöb környékén.

A fenti öt pontban felsorolt eseteken kívül — tudomásom szerint — nem figyeltek meg küszöbanomáliát. A fenti esetek közös jellemzőit a következőképpen foglалhatjuk össze:

Az összes esetben a küszöb környékére kevés szabadsági fokú rezonancia esik. Könnyű magok esetében ( $^3\text{H}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ) a kevés nukleonszám az, ami a rezonancia egyszerű szerkezetét eredményezi. Kevés csatorna van nyitva, így a fluxus az új csatorna nyílásakor nagyrészt az új csatornába távozik. Az  $A=50$  és  $90$ , valamint  $140$ -es tömegszámú magok esetében, a küszöbnél egyrészcseke neutron rezonancia van, így a fluxus a rezonánsan nyíló csatornába távozik. A kísérletek eredményéből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy akkor várható keresztthatás fellépte, ha a nyíló csatornában egy minél egyszerűbb szerkezetű rezonancia a küszöb környékére esik és a nyíló csatorna erősen csatolódik a vizsgált csatornához — azaz az új csatorna a küszöbnél hirtelen nagy fluxust visz el a többi csatornából.

A következő két fejezetben ezt a feltevést próbáljuk numerikus számításokkal alátámasztani egy olyan modell keretében, amelyben a különböző típusú rezonanciák könnyen kezelhetők, és helyük (a küszöbhöz viszonyítva) könnyen változtatható.

#### IV. Egy egzaktul megoldható modell a küszöbjelenségek tárgyalására

A többszörös csatornás problémák leírására szolgáló csatolt optikai egyenletek olyan differenciál-egyenletrendszer alkotnak, melyek megoldása még „tisztességesen” viselkedő potenciál esetében is csak numerikusan lehetséges. Most egy olyan modellt mutatunk be, ahol a fenti egyenletek analitikusan is megoldhatók. Ez teszi a modellt a rezonanciák és küszöbviselkedések kölcsönhatásának vizsgálatára különösen alkalmassá. A modell keretei között lehetőség van arra, hogy az egyes csatornában a kötött és kvázistacionárius állapotok energiáját és élettartamát — tág határok között — változtassuk és előre megtervezzük.

Az egyenletek analitikus megoldhatóságát nem lokális, szeparálható potenciálok alkalmazásával értük el. A Hamilton-operátort a következő alakban írjuk fel [5]:

$$H = H_0 + T + V$$

$$\langle \vec{k}_c c | V | \vec{k}'_c c' \rangle = - \sum_{lm} \left\{ \sum_{s=1}^N A_{cc',l}^{s*} g_{cl}^{s*}(k_c) g_{c'l}^s(k'_c) \right\} \cdot Y_{lm}^*(\hat{k}_c) Y_{lm}(\hat{k}'_c). \quad (\text{IV.1})$$

Itt  $c, c'$  az egyes csatornákat,  $k_c$  a  $c$  csatornában a relatív impulzust jelöli. Esetünkben  $c=p$  vagy  $n$  lehet. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon fizikailag reális-e szeparálható potenciálok használata. Ezzel kapcsolatban [27]-re utalunk, mely szerint tetszőleges véges hatótávolságú lokális potenciálhoz található vele ekvivalens nem lokális szeparálható potenciál. Az ekvivalens szó azt jelenti, hogy a két potenciálból



származtatható  $S$  mátrix energiahéjon vett mátrixeleme azonos. A hangsúly itt az energiahéjon van: mindkét potenciál azonos értékeket szolgáltat a rendszer mérhető fizikai mennyiségeire.

A potenciál alakjára kevés megkötésünk van:

1.  $V$  akkor és csak akkor Hermite-féle, ha  $A_{cc',l}^s$  mátrixok a  $cc'$  indexekben szintén Hermite-félék.

2. A Schrödinger-egyenletnek a fenti potenciállal felírt esetben akkor lesz  $r=0$ -ban reguláris és négyzetesen integrálható megoldása, ha  $g_{cl}^s(k_c)$  koordináta-reprezentációban vett alakjára fennáll, hogy

$$g_{cl}^s(r_c) \sim r_c^{l-2+k} \quad \text{ha} \quad r_c \ll 1 \quad \text{ahol} \quad k \geq 1 \quad (\text{IV.2})$$

valós szám és

$$g_{cl}^s(r_c) \propto \frac{1}{r_c k} \xrightarrow{r_c \rightarrow \infty} \frac{1}{r_c^k} \quad \text{ahol} \quad k \geq 2$$

valós szám.

A fenti feltételek teljesülnek pl. az úgynevezett Yamagouchi-féle formafaktor esetében, melynek impulzusreprezentációban vett alakja:

$$g_{cl}^{s \text{ Yam.}}(k_c) = \left( \frac{\delta_c^s}{\beta_c^2 + k_c^2} \right)^{l+1} k_c^l. \quad (\text{IV.3})$$

A későbbiekben használt formafaktorok ilyen kifejezések kombinációi lesznek.

A következőkben kiszámítjuk a (IV.1) alatti potenciál esetére a szórási és reakció hatáskeresztmetszeteket.

Tekintsük a szórásmátrixra felírt Lippmann—Schwinger-egyenlet:

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z), \quad (\text{IV.4})$$

ahol

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1}, \quad (\text{IV.5})$$

$z$  komplex szám. Impulzusreprezentációban:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_c | T(z) | \vec{k}'_c c' \rangle &= \langle \vec{k}_c | V | \vec{k}'_c c' \rangle + \\ &+ \sum_{c'' c'''} \int \langle \vec{k}_c | V | \vec{k}''_c c'' \rangle \langle \vec{k}''_c c'' | G_0(z) | \vec{k}'''_c c''' \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{k}'''_c c''' | T(z) | \vec{k}'_c c' \rangle d\vec{k}''_c d\vec{k}'''_c. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_c | T(z) | \vec{k}'_c c' \rangle &= \\ &= - \sum_{lm} \left\{ \sum_{ss'=1}^N g_{cl}^{s*}(k_c) \tau_{cc',l}^{ss'}(z) g_{c'l}^{s'}(k'_c) \right\} \cdot Y_{lm}^*(\hat{k}_c) Y_{lm}(\hat{k}'_c), \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$



ahol

$$[\tau^{-1}(z)]_{cc'l}^{ss'} = [A_i^s]_{cc'}^{-1} \delta_{ss'} + \delta_{cc'} \int \frac{g_{cl}^s(k) g_{cl}^{s'*}(k)}{z - E_c - k^2} k^2 dk, \quad (\text{IV.8})$$

ahol  $E_c$  a  $H_0$  operátor azon sajátértéke, amely a  $c$  csatornát definiálja.

A  $T$  mátrix ismeretében meghatározhatjuk a hatáskeresztmetszeteket:

$$\frac{d\sigma_{c \rightarrow c'}^l}{d\Omega} = \frac{M_c M_{c'} k_{c'}}{k_c} 4\pi^4 |\langle \vec{k}_c c | T(z) | \vec{k}_{c'} c' \rangle|^2, \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{\hbar^2 k_c^2}{2M_c} + E_c = \frac{\hbar^2 k_{c'}^2}{2M_{c'}} + E_{c'} = E$$

és

$$z = E + i\varepsilon \text{ mellett.}$$

Az egyes csatornáknál a kötött és kvázistacionárius állapotokat a  $T$  mátrix pólusai határozzák meg. Ezeket viszont a

$$\det |[\tau^{-1}(E + i\varepsilon)]_{cc,l}| = 0 \quad (\text{IV.10})$$

egyenlet megoldásával kaphatjuk meg.

Számításainkhoz a következő alakú formafaktorokat választottuk:

$$N \leq 3$$

$$A_{cc'}^s = \text{valós}$$

$$g_{cl}^s(k) = \left[ \left( \frac{\delta_c^{s,1}}{(\beta_c^{s,1})^2 + k^2} \right)^{l+1} + \left( \frac{\delta_c^{s,2}}{(\beta_c^{s,2})^2 + k^2} \right)^{l+1} \right] \cdot k^l \quad (\text{IV.11})$$

$$E_p = 0$$

$$E_n = \Delta E.$$

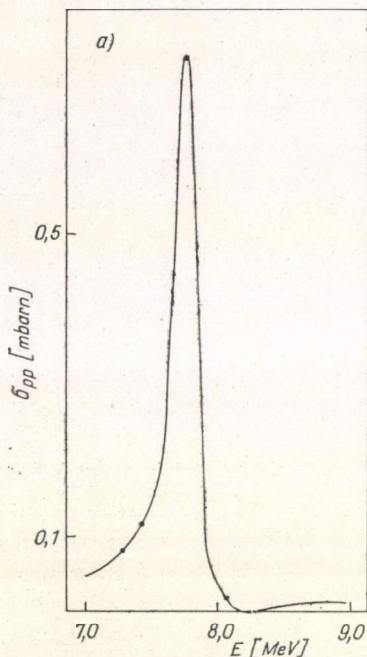
Látható, hogy a potenciál formfaktora két Yamagouchi-féle formfaktor összege.  $\delta_c^{s,2}$  megfelelő választásával ez előjelváltóvá tehető, így könnyen előállíthatjuk a  $T$  mátrix kötött és kvázistacionárius állapotnak megfelelő pólusait és ezeket gyakorlatilag függetlenül tologathatjuk a komplex energiasíkon.

Nézzünk ezekre példát:

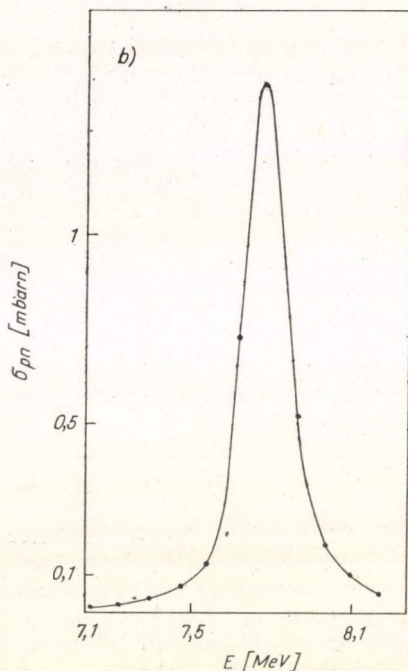
a) Egyrészesecske rezonanciát kaphatunk, ha potenciál paramétereit úgy állítjuk be, hogy az egyik csatornában a  $T$  mátrixnak az impulzussíkon olyan  $z$  pólus-



helyei legyenek, melyre  $\text{Im}z < 0$  és  $|\text{Im}z| < |\text{Re}z|$ . Ez esetben a hatáskeresztmetszet a következő alakú lesz:



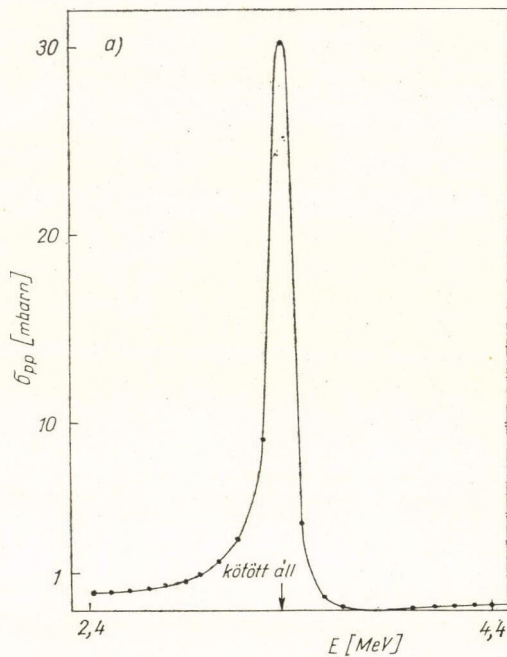
IV.1a) ábra. A  $\sigma_{pp}$  hatáskeresztmetszetben fellépő egyrészecske rezonancia



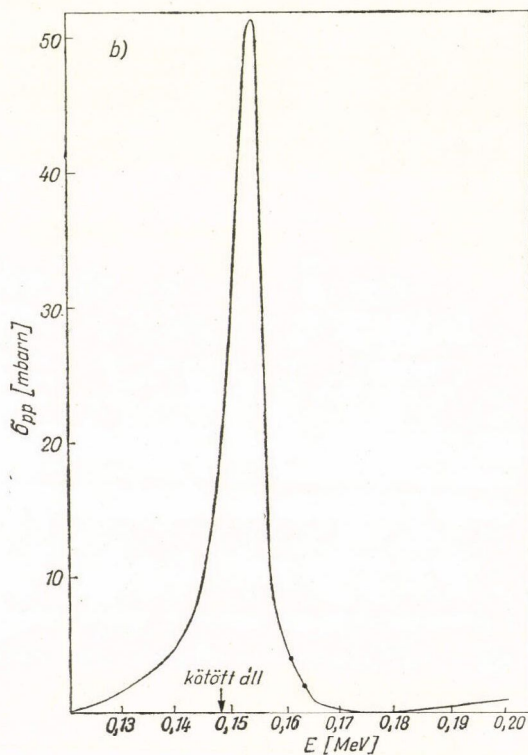
IV.1b) ábra. A  $\sigma_{pn}$  hatáskeresztmetszetben fellépő egyrészecske rezonancia. A potenciál paraméterei a fenti hatáskeresztmetszetek számítása során ugyanazok voltak, mint az V.1. ábra paraméterei,  $\delta = 11.0$  mellett

b) Doorway-rezonanciát kaphatunk, ha a neutroncsatornában kötött állapotot idézünk elő, azaz úgy állítjuk be a potenciál paramétereit, hogy a  $T$  mátrixnak az impulzus síkon olyan  $z$  pólushelye legyen, melyre  $\text{Re}z = 0$  és  $\text{Im}z > 0$ . Ez a kötött állapot a rugalmas szórásban rezonanciaként jelentkezik az  $E_{\text{rez}} = \Delta E - k_0$  (ahol  $z = ik_0$ ) energián. Ezen az energián ugyanis a bejövő proton energiája éppen elég ahhoz, hogy a targetet  $p$  állapotból  $n$  állapotba billentse, miközben ő maga protonból neutronná alakul, majd a neutron kötött állapotba kerüljön. Ez az állapot azonban ugyanilyen módon el is bomolhat, ezért jelentkezik rezonanciaként a hatáskeresztmetszetben. Ha a target  $p$  és  $n$  állapotának kvantumszámai csak az izospin harmadik komponensében (azaz elektromos töltésben) különböznek, akkor ez az eset az izobár analóg rezonanciának felel meg. Ilyeneket láthatunk a következő ábrákon:





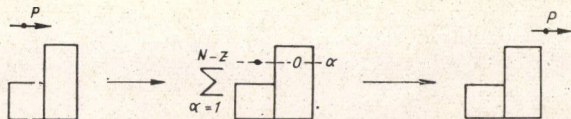
IV. 2a) ábra. Izobár analóg rezonancia  $s$  hullámú rugalmas szórásban. A potenciál paraméterei megegyeznek a IV.1. ábra paramétereivel




IV. 2b) ábra. Izobár analóg rezonancia  $p$  hullámú rugalmas szórásban. A potenciál paraméterei:  $l=1, N=1, A^1 = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,1 \\ 0,1 & 5,0 \end{pmatrix}$   
 $\beta=1,0 \text{ MeV}^{1/2}, \delta=1,0, \Delta E=1,0 \text{ MeV}$



Az ilyen rezonancia létrejöttének mechanizmusát a következőképpen szemléltethetjük:



A  szimbólum a targetmagot jelképezi. A bal oldali oszlop a betöltött proton-, a jobb oldali a betöltött neutronállapotokat képviseli, míg az üres kör lyukállapotot, a teli kör részecskeállapotot jelöl.

Látjuk, hogy a fenti folyamatoknál a közbenső állapot kétrészecske—egylyuk konfigurációk összege. A target + proton rendszer bonyolult sokrészecske—soklyuk gerjesztését tartalmazó (ún. compound) állapotai csak az ilyen egyszerűbb állapotokon keresztül jöhetnek létre. Ezért hívjuk az ilyen állapotokat doorway állapotoknak és az ezek gerjesztésével járó rezonanciákat doorway rezonanciának.

c) A compound rezonanciák fellépte során a közbenső állapot a proton + +target rendszer bonyolult sokrészecske—soklyuk konfigurációkat tartalmazó (compound) állapota. Ezek figyelembevételével az általunk használt kétszatosnás optikai modellben a következőképpen lehetséges [26].

Osszuk fel a szórásproblémánk teljes Hilbert-terét két ortogonális altérre a continuum és compound altérre. Jelöljük az ezen altérre vetítő operátorokat  $P$ , illetve  $Q$ -val. A teljes állapotvektort így a következő alakban írhatjuk:

$$|\psi\rangle = P|\psi\rangle + Q|\psi\rangle. \quad (\text{IV.12})$$

Jelöljük  $|rc\rangle$ -vel az ortonormált csatornaállapotokat, melyek a  $c$  csatornában a targettől  $r$  távolságra keltett részecskét írják le. Ezekkel a  $P$  és  $Q$  vetítő operátorok definíciója:

$$P = \sum_c \int |rc\rangle r^2 dr \langle rc| \quad (\text{IV.13})$$

$$Q = 1 - P.$$

A (IV.12) alatt definiált  $|\psi\rangle$ -re vonatkozó  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  Schrödinger-egyenlet a következő alakot ölti:

$$(E - H_{PP})P|\psi\rangle = H_{PQ}Q|\psi\rangle \quad (\text{IV.14})$$

$$(E - H_{QQ})Q|\psi\rangle = H_{QP}P|\psi\rangle,$$

ahol

$$H_{PP} = PHP, \quad H_{PQ} = PHQ, \quad H_{QP} = QHP \quad \text{és} \quad H_{QQ} = QHQ. \quad (\text{IV.15})$$

A második egyenlet formális megoldása:

$$Q|\psi\rangle = (E^{(+)} - H_{QQ})^{-1} H_{QP}P|\psi\rangle, \quad (\text{IV.16})$$

ahol  $E^{(+)} = E + i\epsilon$ . Ezt beírva az első egyenletbe, kapjuk a  $P$  altérre vonatkozó egyenletet:

$$(E - H_{PP} - H_{PQ}[E^{(+)} - H_{QQ}]^{-1} H_{QP})P|\psi\rangle = 0. \quad (\text{IV.17})$$

Ez egy bonyolult sokrészecske egyenlet. Vezessük be a

$$P|\psi_c^{(+)}\rangle = \sum_{c'} \int_0^\infty |rc'\rangle \psi_{cc'}^{(+)}(r) r^2 dr \quad (\text{IV.18})$$



állapotot, melyre az jellemző, hogy csak a  $c$  csatornában tartalmaz befutó hullámot és a

$$h_{cc'}(r, r') = \langle rc | (H_{PP} + H_{PQ}[E^{(+)} - H_{QQ}]^{-1} H_{QP}) | r' c' \rangle \quad (\text{IV.19})$$

egyrészesre Hamilton-operátort.

Ezekkel

$$E\psi_{cc'}^{(+)}(r) = \sum_{c'} \int_0^{\infty} h_{cc'}(r, r') \psi_{cc'}^{(+)}(r') r'^2 dr', \quad (\text{IV.20})$$

ahol  $\psi_{cc'}^{(+)}(r)$  minden információt tartalmaz, ami a reakció leírásához szükséges. A (IV.19) Hamilton-operátor a compound mag minden bonyolultságát tartalmazza az  $[E^{(+)} - H_{QQ}]^{-1}$  propagátoron keresztül, ezért a (IV.20) egyenlet megoldása nagyon sok compound rezonanciát ír le. Az energiára átlagolt hatáskeresztmetszetet közvetlenül szolgáltatja a következő effektív optikai Hamilton-operátor:

$$h_{cc'}^{\text{opt}}(r, r') = \langle rc | \left( H_{PP} + H_{PQ} \left[ E - H_{QQ} + \frac{i}{2} I \right]^{-1} H_{QP} \right) | r' c' \rangle. \quad (\text{IV.21})$$

Jelöljük  $H_{QQ}$  sajátértékeit (a compound állapotok energiáját)  $E_q$ -val. Ekkor

$$h_{cc'}^{\text{opt}}(r, r') = \langle rc | \left( H_{PP} + H_{PQ} \sum_q \frac{1}{E - E_q + \frac{i}{2} I} H_{QP} \right) | r' c' \rangle \quad (\text{IV.22})$$

és a megoldandó egyenlet:

$$E\psi_{cc'}^{(+)}(r) = \sum_{c'} \int_0^{\infty} h_{cc'}^{\text{opt}}(r, r') \psi_{cc'}^{(+)}(r') r'^2 dr'. \quad (\text{IV.23})$$

Ha a vizsgálni kívánt rezonanciában a közbenső mag kevés állapota szerepel (mint ahogy ezt a  $\text{Li}^7$  esetében láttuk), akkor (IV.22)-ben a  $q$  szerinti összegzés is csak kevés tagot tartalmaz.

Tekintsük ismét az eredeti kétcsatornás esetünket, a (IV.22)-ben a potenciált vegyük fel szeparálható alakban és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a compound rezonancia létrejöttéért csak egy compound állapot felelős. Ekkor (IV.22)-ből a potenciál:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_c c | V | \vec{k}'_c c' \rangle = & - \sum_{lm} \left\{ \sum_{s=1}^2 A_{cc',l}^s g_{cl}^{s*}(k_c) g_{c'l}^s(k'_c) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{cc',l}^3}{E - E_q + \frac{i}{2} I} g_{cl}^3(k_c) g_{c'l}^3(k'_c) \right\} Y_{lm}^*(\hat{k}_c) Y_{lm}(\hat{k}'_c). \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Bevezetve a

$$A_{cc',l}^3 = \frac{\lambda_{cc',l}^3}{E - E_q + \frac{i}{2} I} \quad (\text{IV.25})$$

jelölést ez a potenciál a régiektől csupán  $A_{cc',l}^3$  energia függésében (és komplex



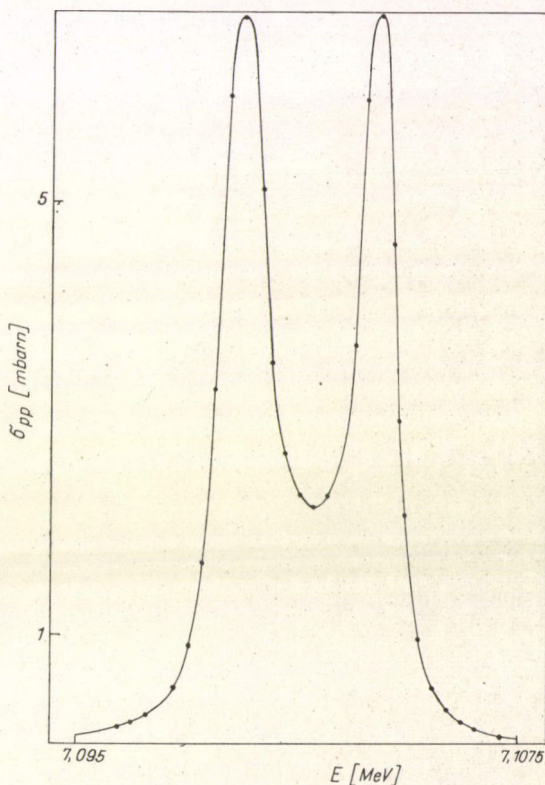
voltában) különbözik, így a  $T$  mátrixra és a hatáskeresztmetszetre vonatkozó (IV.7), (IV.8), (IV.9) és (IV.10) képletek továbbra is érvényesek.

Mivel a compound állapotok csak doorway állapoton keresztül jöhetnek létre, a compound állapotot a neutron csatornához csatoljuk legerősebben, azaz a  $\lambda_l^3$  mátrixot a következő alakban vesszük fel:

$$\lambda_l^3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{pn,l}^3 \\ \lambda_{pn,l}^3 & \lambda_{nn,l}^3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{nn,l}^3 \gg \lambda_{pn,l}^3. \quad (\text{IV.26})$$

$E_q$  értékének megváltoztatásával a rezonancia helyét könnyen változtathatjuk, így ennek a küszöbre való tolása nem okoz nehézséget.  $I$  értékének módosításával a rezonancia szélességét is szabályozhatjuk.

Compound rezonanciára láthatunk példát a következő esetben:



IV.3. ábra. Compound rezonancia a  $\sigma_{pp}$  rugalmas szórás hatáskeresztmetszetében. A potenciál paraméterei ugyanazok, mint az V.4a) ábra paraméterei

A csatolások miatt a rezonancia helye az egyes csatornáknak eltér az  $E=E_q$  értéktől. Az energiaeltolódás más a proton és más a neutron csatornában [25]. A neutron csatornában a proton csatornától eltérő helyen fellépő rezonancia a rugalmas szó-



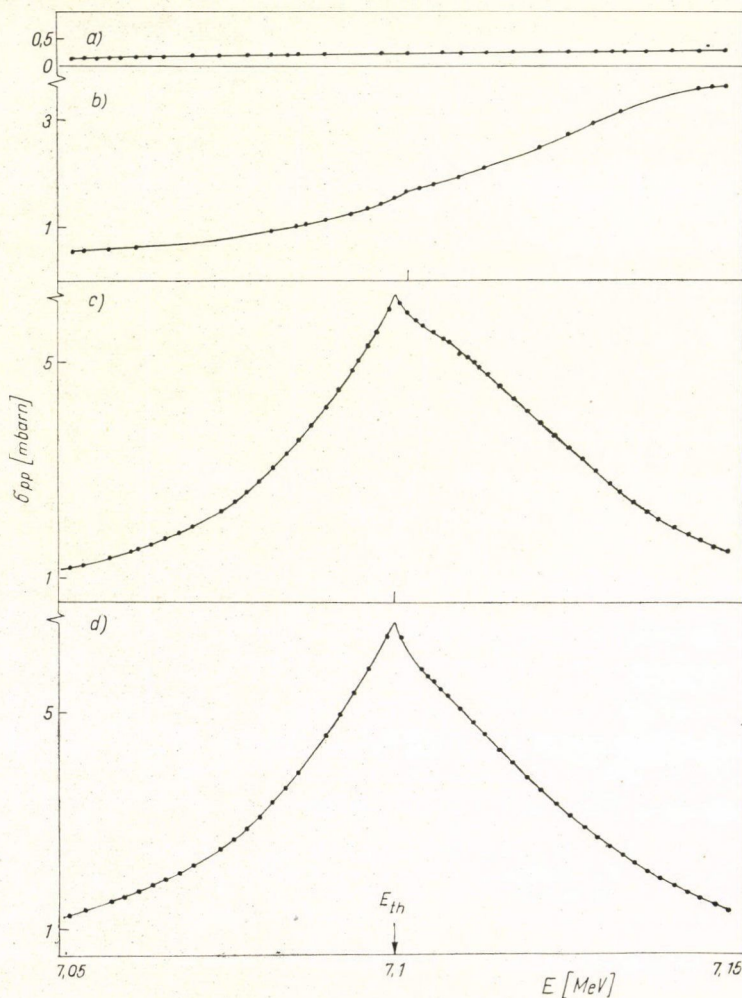
rási hatáskeresztmetszetben is látszik. Ha a rezonancia szélessége kisebb, mint az eltolódások nagysága — ami a hosszú élettartamú compound rezonanciáknál fennáll —, akkor a két csatornából származó csúcs külön látszik. Ez okozza a fenti IV.3. ábrán a két darab csúcs felléptét.

### V. Eredmények

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy az előzőekben leírt modell keretein belül, a rezonanciák és küszöbök milyen egymásra hatását tapasztaltuk (lásd még [5]).

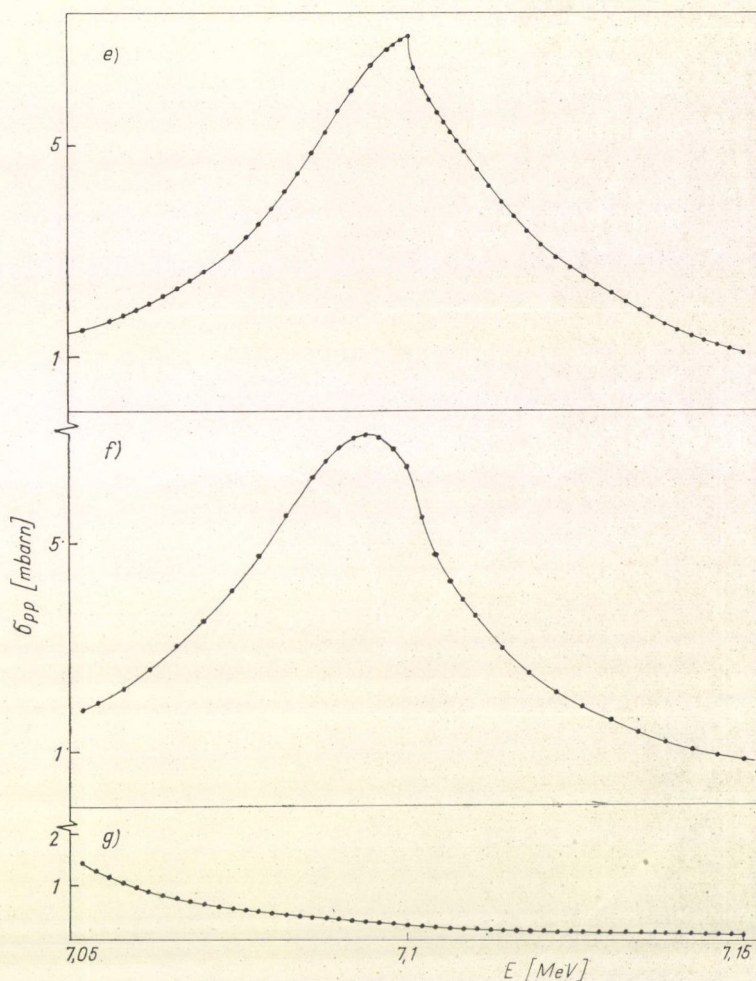
a) Potenciál rezonanciák és a küszöb kölcsönhatása:

Az V.1. ábrán láthatjuk a rugalmas szórási hatáskeresztmetszet viselkedését a neutron küszöb környékén, miközben egy neutroncsatornabeli rezonanciát



V.1. ábra. A  $\sigma_{pp}$  hatáskeresztmetszetek viselkedése a neutron küszöb környékén





V.1. ábra

a küszöb környékén mozgatunk. A potenciál paramétereit ezen hatáskeresztmetszetek számítása során a következők voltak:

$$l = 0, \quad N = 2, \quad A^1 = A^2 = \begin{pmatrix} 0,0425 & 0,06 \\ 0,06 & 1,0025 \end{pmatrix},$$

$$\beta_p^{11} = \beta_n^{11} = 3,8 \text{ MeV}^{1/2}, \quad \beta_p^{21} = \beta_n^{21} = 3,16 \text{ MeV}^{1/2}$$

$$\beta_p^{12} = \beta_n^{12} = 50,0 \text{ MeV}^{1/2}, \quad \beta_p^{22} = \beta_n^{22} = 9,48 \text{ MeV}^{1/2}$$

$$\delta_p^{11} = \delta_n^{11} = \delta, \quad \delta_p^{21} = \delta_n^{21} = 18,25$$

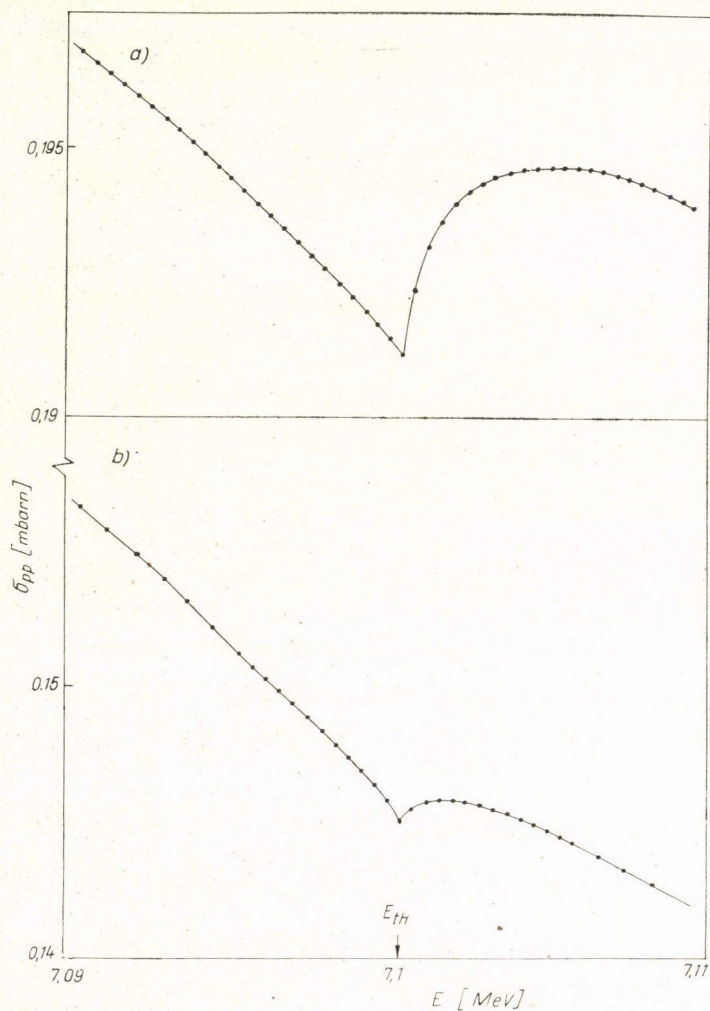
$$\delta_p^{12} = \delta_n^{12} = 0,0, \quad \delta_p^{22} = \delta_n^{22} = -79,0$$

$$\Delta E = 7,1 \text{ MeV}.$$



A potenciál rezonancia helyét a  $\delta$  paraméter változtatásával módosíthattuk:

- a)  $\delta = 11,15$  ( $E_{\text{rez}} = 7,26$  MeV)
- b)  $\delta = 11,2$  ( $E_{\text{rez}} = 7,148$  MeV)
- c)  $\delta = 11,214$  ( $E_{\text{rez}} = 7,099$  MeV)
- d)  $\delta = 11,215$  ( $E_{\text{rez}} = 7,099$  MeV)
- e)  $\delta = 11,217$  ( $E_{\text{rez}} = 7,099$  MeV)
- f)  $\delta = 11,22$  ( $E_{\text{rez}} = 7,094$  MeV)
- g)  $\delta = 11,25$  ( $E_{\text{rez}} = 7,006$  MeV).



V.2. ábra. A  $\sigma_{pp}$  hatáskeresztmetszetek viselkedése a neutron küszöb környékén, ha a potenciál képzetes résszel is rendelkezik



Az V.1. ábrából látjuk, hogy amikor a rezonancia maximuma a küszöb alá kerül, ismét eltűnik a cusp. Ennek oka, hogy a rezonancia leszálló ágán ez esetben szívesebben alakul „downward” cusp, ami kétsatornás esetben nem valósulhat meg. Próbaképpen a potenciálhoz kis képzetes részt is adunk. Ez lehetővé teszi, hogy mind a négy fajta cusp kialakuljon, így a downward is. Ilyet láthatunk az V.2. ábrán, ahol a potenciál paraméterei:

$$l = 0, \quad N = 3, \quad A^1 = A^2 = \begin{pmatrix} 0,0425 & 0,06 \\ 0,06 & 1,0025 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0,02 & 0,005 \\ 0,005 & 0,01 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} I = 0,05 \text{ MeV}$$

$$\beta_p^{11} = \beta_n^{11} = \beta_p^{31} = \beta_n^{31} = 3,8 \text{ MeV}^{1/2}, \quad \beta_p^{21} = \beta_n^{21} = 3,16 \text{ MeV}^{1/2}$$

$$\beta_p^{12} = \beta_n^{12} = \beta_p^{32} = \beta_n^{32} = 50,0 \text{ MeV}^{1/2}, \quad \beta_p^{22} = \beta_n^{22} = 9,48 \text{ MeV}^{1/2}$$

$$\delta_p^{11} = \delta_n^{11} = \delta_p^{31} = \delta_n^{31} = \delta, \quad \delta_p^{21} = \delta_n^{21} = 18,25$$

$$\delta_p^{12} = \delta_n^{12} = \delta_p^{32} = \delta_n^{32} = 0,0, \quad \delta_p^{22} = \delta_n^{22} = -79,0$$

$$\Delta E = 7.1 \text{ MeV.}$$

A  $\delta$  paraméter értéke:

a)  $\delta = 11,215$  (vesd össze az V.1d) ábrával),

b)  $\delta = 11,23$  (vesd össze az V.1g) ábrával).

b) Doorway (izobár analóg) rezonanciák esetében a küszöb és a rezonancia kölcsönhatását az V.3. ábrán láthatjuk.

A potenciál paraméterei:

$$l = 0, \quad N = 2, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,5 & A_{nn}^1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,5 & A_{nn}^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_c^{sj} = 1,0 \text{ MeV} \quad (s = 1, 2; j = 1, 2; c = p, n)$$

$$\delta_c^{sj} = 1,0 \quad (s = 1, 2; j = 1, 2; c = p, n)$$

$$\Delta E = 7,1 \text{ MeV.}$$

A  $A_{nn}^1$  és  $A_{nn}^2$  paraméterek értékei:

a)  $A_{nn}^1 = A_{nn}^2 = 1,25$

b)  $A_{nn}^1 = A_{nn}^2 = 1,28$

c)  $A_{nn}^1 = A_{nn}^2 = 1,3$

d)  $A_{nn}^1 = 1,3, \quad A_{nn}^2 = 3,0$

e)  $A_{nn}^1 = 1,31, \quad A_{nn}^2 = 3,0$

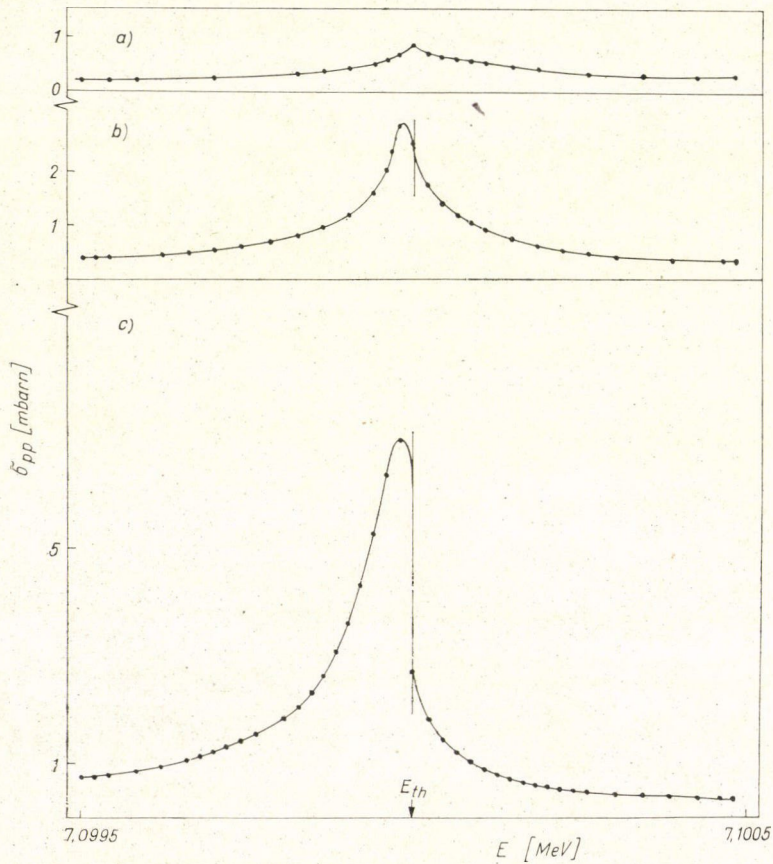


c) Tekintsük a compound rezonanciák és a küszöb kölcsönhatását. Itt két esetet kell megkülönböztetnünk: az  $I=0$  és az  $I \neq 0$  esetét. Numerikus számításaink során az első esetben, ha az  $E_q - \Delta E \approx 0$  feltétel fennállt, nem kaptunk csupot. Hogy eldöntsük, hogy mi ennek az oka, vegyük a legegyszerűbb esetet, az egytagú Yamagouchi-potenciált:  $l=0$  esetében.

$$N = 1, \quad g_c(k_c) = \frac{\delta_c}{\beta_c^2 + k_c^2}, \quad A_{cc'} = \lambda_{cc'}^{(1)} + \frac{\lambda_{cc'}^{(2)}}{E - E_q + \frac{i}{2}I}. \quad (\text{V.1})$$

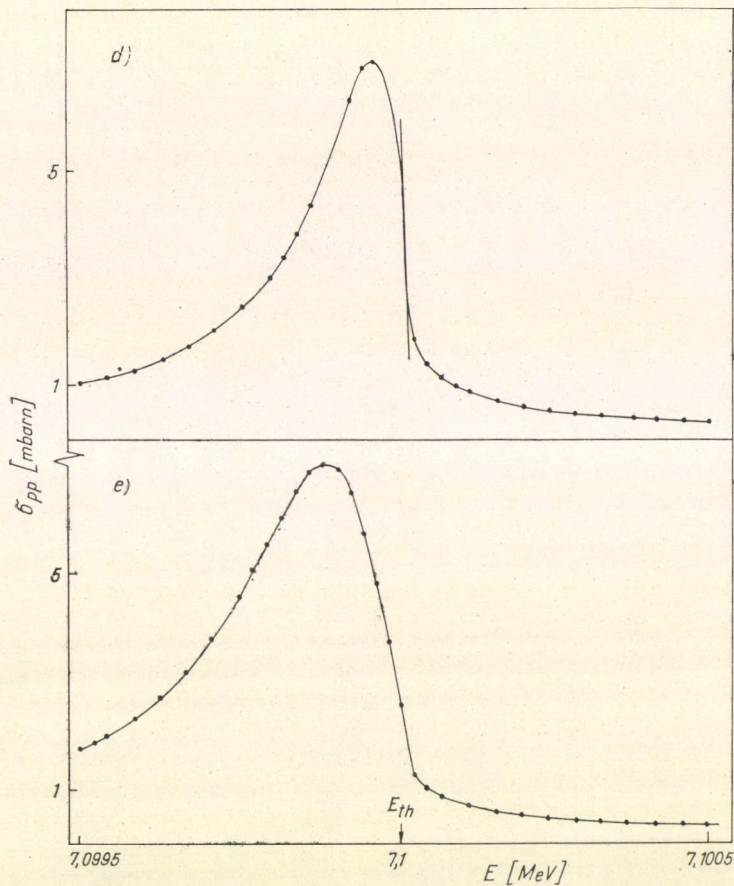
Ezzel a potenciállal a rugalmas szórás hatáskeresztmetszete:

$$\frac{d\sigma_{pp}}{d\Omega} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\delta_p}{\beta_p^2 + E}\right)^4 \left| \frac{\left(E - E_q + \frac{i}{2}I\right) \lambda_{nn}^{-1} - I_n}{\det(\tau^{-1}(E))} \right|^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\delta_p}{\beta_p^2 + E}\right)^4 |\tau_{pp}|^2, \quad (\text{V.2})$$



V.3. ábra. A  $\sigma_{pp}$  hatáskeresztmetszet a neutron küszöb környékén, ha a közelben doorway rezonancia van





V.3. ábra

ahol

$$\lambda_{cc'} = \left( E - E_q + \frac{i}{2} I \right) \lambda_{cc'}^{(1)} + \lambda_{cc'}^{(2)}, \quad (\text{V.3})$$

$$\det(\tau^{-1}(E)) = \left( E - E_q + \frac{i}{2} I \right)^2 / \det(\lambda) - \quad (\text{V.4})$$

$$- \left( E - E_q + \frac{i}{2} I \right) (\lambda_{pp}^{-1} I_n + \lambda_{nn}^{-1} I_p) + I_p I_n,$$

$$I_p = \frac{\pi \delta_p^2}{4\beta_p(\beta_p + \sqrt{-E})^2}, \quad (\text{V.5})$$

$$I_n = \frac{\pi \delta_n^2}{4\beta_n(\beta_n + \sqrt{\Delta E - E})^2},$$



$$\begin{aligned}
 \det(\lambda) &= \left(E - E_q + \frac{i}{2} I\right)^2 \det(\lambda^{(1)}) + \\
 &+ \det(\lambda^{(2)}) + \left(E - E_q + \frac{i}{2} I\right) \det(\lambda^{1,2}), \\
 \det(\lambda^{(i)}) &= \lambda_{pp}^{(i)} \lambda_{nn}^{(i)} - \lambda_{pn}^{(i)} \lambda_{np}^{(i)}; \quad i = 1, 2 \\
 \det(\lambda^{1,2}) &= \lambda_{pp}^{(1)} \lambda_{nn}^{(2)} + \lambda_{pp}^{(2)} \lambda_{nn}^{(1)} - 2 \lambda_{pn}^{(1)} \lambda_{np}^{(2)}, \\
 \frac{\hbar^2}{2m} &= 1, \quad M_p = M_n = m.
 \end{aligned}
 \tag{V.6}$$

Ezt az egyszerű kifejezést az energia függvényében könnyen lederiválhatjuk:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \sigma_{pp}}{dE d\Omega} &= \frac{\partial}{\partial E} \frac{d\sigma_{pp}}{d\Omega} + \frac{\partial}{\partial \sqrt{-E}} \frac{d\sigma_{pp}}{d\Omega} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-E}} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial \sqrt{\Delta E - E}} \frac{d\sigma_{pp}}{d\Omega} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{\Delta E - E}} = \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\delta_p}{\beta_p^2 + E}\right)^4 \left[A(E) + \frac{B(E)}{\sqrt{-E}} + \frac{C(E)}{\sqrt{\Delta E - E}}\right],
 \end{aligned}
 \tag{V.7}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 A(E) &= -\frac{4}{\beta_p^2 + E} |\tau_{pp}^2| + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \tau_{nn}^{-1}}{\partial E} \frac{\tau_{pp}^*}{\det(\tau^{-1})} - \frac{\partial \det(\tau^{-1})}{\partial E} \frac{|\tau_{pp}|^2}{\det(\tau^{-1})} \right\}, \\
 B(E) &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial \det(\tau^{-1})}{\partial \sqrt{-E}} \frac{|\tau_{pp}|^2}{\det(\tau^{-1})} \right\}, \\
 C(E) &= -\frac{\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial \tau_{nn}^{-1}}{\partial \sqrt{\Delta E - E}} \frac{\tau_{pp}^*}{\det(\tau^{-1})} - \frac{\partial \det(\tau^{-1})}{\partial \sqrt{\Delta E - E}} \frac{|\tau_{pp}|^2}{\det(\tau^{-1})} \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \tau_{nn}^{-1}}{\partial \sqrt{\Delta E - E}} \frac{\tau_{pp}^*}{\det(\tau^{-1})} - \frac{\partial \det(\tau^{-1})}{\partial \sqrt{\Delta E - E}} \frac{|\tau_{pp}|^2}{\det(\tau^{-1})} \right\}}.
 \end{aligned}
 \tag{V.8}$$

Az utolsó sorban az  $\operatorname{Im}$  érvényes, ha  $E > \Delta E$

és  $\operatorname{Re}$  érvényes, ha  $E < \Delta E$ .

Látható, hogy (V.7)-ben az utolsó tag az, ami a cuspért felelős, hiszen  $1/\sqrt{\Delta E - E}$  az  $E = \Delta E$  helyen végtelenné válik. A cusp jellemzésére így a

$$\frac{C(E)}{A(E) + \frac{B(E)}{\sqrt{-E}}}
 \tag{V.9}$$

mennyiséget használhatjuk.

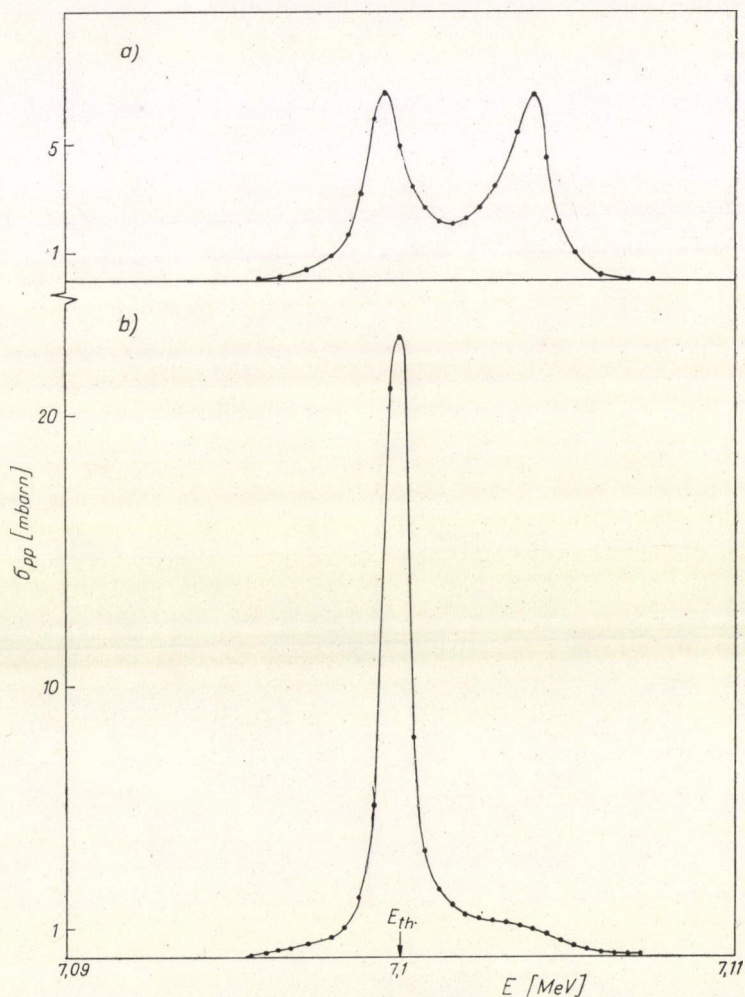


(V.8) harmadik sorában a kijelölt műveleteket elvégezve  $C(E)$ -re a következő adódik:

$$C(E) = -\frac{\text{Im} \int \frac{\tau_{pp}^*}{\text{Re} \left\{ \frac{\tau_{pp}^*}{\det(\lambda^2)} I_n'(\lambda_{pn}^{-1})^2 \left( E - E_q + \frac{i}{2} I \right)^2 \right\}} dE, \quad (\text{V.10})$$

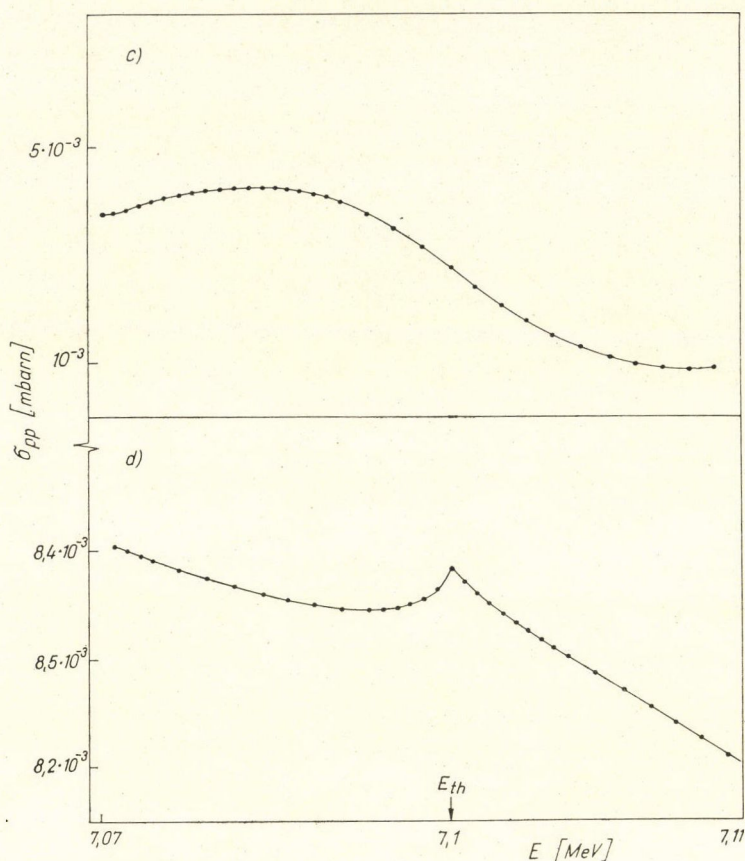
ahol

$$I_n' = \frac{\partial}{\partial \sqrt{\Delta E - E}} I_n = \frac{\pi \delta_n^2}{2\beta_n (\beta_n + \sqrt{\Delta E - E})^3}. \quad (\text{V.11})$$



V.4. ábra. A  $\sigma_{pp}$  hatáskeresztmetszet menete, a neutron küszöb környékén, ha a közelben compound rezonancia van és a potenciál képzetes résszel is rendelkezik





V.4. ábra

Az (V.10)-ben szereplő kifejezések  $E \rightarrow E_q$  mellett konstans értékeket vesznek fel az  $(E - E_q + \frac{i}{2}I)^2$  tag kivételével. Tehát ha  $I=0$  és  $E \rightarrow E_q$

$$C(E) \sim (E - E_q)^2 \rightarrow 0. \quad (\text{V.12})$$

Vagyis ilyen esetben — a modellünkön belül — tényleg nem kaphatunk cuspot.

Ha  $I$  értékét nullától kezdve növelni kezdjük, megjelenhet mind a négy fajta cusp, mert a potenciál képzetessé vált. Ugyanakkor  $I$  növelése azt jelenti, hogy a (IV.22) effektív optikai potenciálban egyre nagyobb energiatartományra átlagolunk, ami a rezonancia szélesedésével, elmosódásával jár. Ezért a rugalmas szórás hatás-keresztmetszetben ugyan megjelenik a cusp, de nagysága egyre jobban lecsökken.



Ezt láthatjuk az V.4. ábrán, melyen szereplő hatáskeresztmetszetek számítása során a potenciál paraméterei a következők voltak:

$$l = 0, \quad N = 3, \quad A^1 = A^2 = \begin{pmatrix} 0,0425 & 0,06 \\ 0,06 & 1,0025 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \frac{1}{E - E_q + \frac{i}{2} I} \begin{pmatrix} 0,0 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad E_q = 7,1 \text{ MeV}$$

$$\beta_p^{11} = \beta_n^{11} = \beta_p^{31} = \beta_n^{31} = 3,8 \text{ MeV}^{1/2}, \quad \beta_p^{21} = \beta_n^{21} = 3,16 \text{ MeV}^{1/2}$$

$$\beta_p^{12} = \beta_n^{12} = \beta_p^{32} = \beta_n^{32} = 50,0 \text{ MeV}^{1/2}, \quad \beta_p^{22} = \beta_n^{22} = 9,48 \text{ MeV}^{1/2}$$

$$\delta_p^{11} = \delta_n^{11} = \delta_p^{31} = \delta_n^{31} = 2,0, \quad \delta_p^{21} = \delta_n^{21} = 18,25$$

$$\delta_p^{12} = \delta_n^{12} = \delta_p^{32} = \delta_n^{32} = 0,0, \quad \delta_p^{22} = \delta_n^{22} = -79,0$$

$$\Delta E = 7,1 \text{ MeV}.$$

Az  $\frac{1}{2} I$  paraméter értéke:

$$a) \quad 1/2 \ I = 0,0 \text{ MeV}, \quad b) \quad 1/2 \ I = 0,001 \text{ MeV}$$

$$c) \quad 1/2 \ I = 0,01 \text{ MeV} \quad d) \quad 1/2 \ I = 0,1 \text{ MeV}.$$

## VI. Következtetések

A magerők rövid hatótávú voltának ismeretében elvben meghatározhatjuk a szórási hatáskeresztmetszetek küszöbkörnyéki viselkedését. Ezen küszöbjelenségek közül a keresztthatás az, mely felvilágosítást adhat sok olyan fizikai mennyiségre, melyeket igen nehezen tudunk más módon meghatározni: A keresztthatás ismeretében megkaphatjuk az  $s$  hullámú semleges részek szórási fázisát, információt nyerhetünk a spin és paritás viszonyokról, új részecskék létrehozhatók, vagy megbecsülhetjük a hatáskeresztmetszetek nyíló csatornabeli menetét. Ugyanakkor csak kevés küszöbnél figyelték meg a keresztthatás jelenségét. A megfigyelt cuspok — vagy esetleg cusppal azonosítható anomáliák — alapján azt mondhatjuk, hogy akkor várható erős küszöbeffektus, amikor a nyíló csatorna nagy részecskefluxust visz el a többi csatornából. Ez akkor következik be, mikor a megnyíló csatornában egy egyszerű szerkezetű, lehetőleg egyrészecske rezonancia van a küszöb környékén — és ez a csatorna erősen csatolódik a többi vizsgált csatornához.

Jelen dolgozatban ezt a feltevést próbáltuk numerikus számításokkal alátámasztani.

Először az  $R$  mátrix elmélet alapján megvizsgáltuk, hogy a Wigner által megjósolt küszöbjelenségek léteznek-e, ha a küszöb környékére rezonancia (ill. az  $R$  mátrix pólushelye) esik. Azt kaptuk, hogy a küszöbjelenségek továbbra is léteznek, de a hatáskeresztmetszet gyors változása — a magerők tulajdonságaitól függően — elnyomhatja vagy kiemelheti őket.



Egy nem lokális, szeparálható potenciálra épülő modell keretében numerikusan megvizsgáltuk, hogy a két eset közül melyik valósul meg. Azért választottunk ilyen potenciált, mert ekkor a rezonanciáknak a küszöbenergiához viszonyított helye könnyen változtatható. A számítások eredményéből azt láthatjuk (V.1—4. ábrák), hogy a modellben megvalósuló egyrészcseke rezonanciák kiemelik a küszöbhatást. A keskenyebb doorway rezonanciák kevésbé emelik ki, míg a compound rezonanciák teljesen elnyomják a csupokat. A nemlokális szeparálható modellen alapuló számítások tehát megerősítik azt a feltevést, hogy az egyszerű szerkezetű rezonanciák kiemelhetik a keresztthatást és hogy csupok felléptét csak akkor várhatjuk, ha a nyíló csatornában egy ilyen egyszerű szerkezetű rezonancia a küszöb közelébe esik. Ennek alapján ha kísérletek során keresztthatás jelenségével találkozunk, rezonanciák létrejavanakodhatunk a küszöb környékén.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A doktori disszertáció elkészítéséhez nyújtott állandó szakmai és emberi segítségért és támogatásért köszönetet mondok témavezetőmnek, *Lovas István*nak. Ugyancsak köszönetemet fejezem ki *Mraskó Péter*nek az értékes diszkuszióért és tanácsokért, *Beregi Péter*nek a kézirat figyelmes és kritikus átnézéséért és *Zimányi József*nek a hasznos konzultációért.

### IRODALOM

#### A küszöbjelenségek elméletével foglalkozó munkák

1. *Wigner*, Phys. Rev. 73, 1002, 1948.
2. *Базь*, ЖЭТФ, 6, 709, 1958.
3. *Wigner*: Facets of Physics, ed. Bromley and Hughes, Academic Press. 43, 1970.
4. *Fonda*: Fundamentals in Nuclear Theory, Triest. 333, 1966.
5. *Fonda*: Scattering Theory, ed. Barut, Gordon and Breach. 129, 1969.
6. *Lovas I. és Dénes E.*, Phys. Rev. C 7, 937, 1973.
7. *Базь, Зельдович, Переломов*: Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Наука. 380, 1971.
8. *Kövesy*, Magyar Fizikai Folyóirat, 14, 529, 1966.
9. *Newton*, Phys. Rev. 114, 1611, 1959.
10. *Zimányi, Bondorf*, Nucl. Phys. A146, 81, 1970.
11. *Baz*, Adv. in Phys. 8, 349, 1959.

#### Küszöbanomáliákkal foglalkozó kísérleti munkák

12. *Meyerhof és McElearney*, Nucl. Phys. 74, 533, 1965.
13. *Malmberg*, Phys. Rev. 101, 114, 1956.
14. *Newton et al.* Phys. Rev. 108, 1294, 1957.
15. *Bewington et al.* Phys. Rev. 121, 871, 1961.
16. *Austin et al.* Nucl. Phys. 22, 451, 1961.
17. *Votava és Thompson*, Phys. Lett. 41B, 405, 1972.
18. *Coker et al.* Phys. Rev. C 4, 836, 1971.
19. *Zaidi et al.* Phys. Rev. C 2, 1384, 1970.
20. *Moore et al.* Phys. Rev. Lett. 17, 926, 1966.
21. *Graw és Hatagan*, Phys. Lett. 35B, 541, 1971.
22. *Wells, Tucker és Meyerhof*, Phys. Rev. 131, 1644, 1963.



### Küszöbjelenségek alkalmazása

22. *Adair*, Phys. Rev. *111*, 632, 1958.
23. *Alzetta et al.* Phys. Rev. *131*, 1740, 1963.
24. *Willard et al.* Phys. Lett. *9*, 339, 1964.

### Magreakciók, elmélet

25. *Lane, Thomas*, Rev. Mod. Phys. *30*, 257, 1958.
26. *Auerbach et al.* Rev. Mod. Phys. *44*, 48, 1972.
27. *Sprung*, Off Shell Behaviour of the N-N Interaction, Herceg Novi Summer School 1970.

### Magreakciók, kísérlet

28. *Huges*, Pile Neutron Research, New York, 1953.

### Könnyű magok energiaszintjei

29. *Lauritsen és Ajzenberg-Selove*, Nucl. Phys. *78*, 1, 1966.

### Speciális függvények

30. *Градиштейн, Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гос. Изд. Физ. Мат., Москва. 1963.







# A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

## A FOLYTONOS CSOPORTOK UNITÉR SUGÁR-ÁBRÁZOLÁSAIRÓL

V. BARGMANN

### Bevezetés

1. Bár e munka tartalmát illetően matematikai, kvantummechanikai megfontolások késztek megírására. Egy kvantummechanikai rendszer állapotait általában egységnyi normájú  $f$  vektorok írják le valamilyen  $\mathfrak{H}$  Hilbert-térben és explicite fel tesszük, hogy minden  $f$  egységvektor megfelel a rendszer egy állapotának. Ez a megfeleltetés azonban nem egy-egyértelmű. A vektorok, amelyek ugyanazt az állapotot írják le, valójában egy  $f$  sugarat alkotnak (Weyl terminológiája szerint, 1. [13], 4. és 20. oldalakat),<sup>1</sup> vagyis egy vektorsereget, amely az összes  $f = \tau f_0$  vektort tartalmazza, ahol  $f_0$  egy rögzített egységvektor  $\mathfrak{H}$ -ban és  $\tau$  tetszőleges unimoduláris komplex szám. ( $f$  mindegyik  $f$  vektorát az  $f$  sugár egy ábrázoló vektorának fogjuk nevezni.) Ennél fogva egy-egyértelmű megfeleltetés áll fenn a kvantumállapotok és a sugarak között, és minden lényeges kvantumelméleti megállapítás egyben sugarakra vonatkozó megállapítás.

Egy  $f$  állapotból valamely  $g$  állapotba való átmenet valószínűsége  $|(f, g)|^2$ , ahol  $f$  és  $g$  az  $f$ , illetőleg  $g$  sugarak ábrázoló vektorai. Ez két sugár belső szorzatának bevezetésére a következő definíciót sugallja:

$$f \cdot g = |(f, g)| \quad (f \in f, g \in g),$$

ami nyilvánvalóan független az  $f$  és  $g$  ábrázoló vektorok megválasztásától.

Egy kvantummechanikai rendszer két leírása akkor izomorf, ha létezik a sugarak közt az  $f \leftrightarrow f'$  egy-egyértelmű megfeleltetés, amely az átmeneti valószínűséget nem változtatja meg, úgyhogy  $f \cdot g = f' \cdot g'$ . (Fontos példa ugyanazon rendszernek két Lorentz-vonatkoztatási rendszerben való leírása.) Amint azt Wigner ([14], 251—253. old.) kimutatta, minden izomorf sugár-megfeleltetés kiterjeszthető egy  $f' = Uf$  egy-egyértelmű vektor-megfeleltetéssé  $\mathfrak{H}$ -n, úgyhogy  $U(\alpha f + \beta g) = \alpha Uf + \beta Ug$  tetszőleges  $\alpha, \beta$  valós számokra és  $f, g$  vektorokra. ( $U$ -t a sugár-megfeleltetés kiterjesztésének nevezzük, ha az  $f$  sugár minden ábrázoló vektorát a megfelelő  $f'$  sugár ábrázoló vektoraiba képezi le.) A sugár-megfeleltetés  $U$ -t egyértelműen meghatározza egy  $\tau$  tényező erejéig, melynek abszolút értéke 1. Két eset különböztethető meg: 1.  $U$  lineáris és unitér, úgyhogy  $(Uf, Ug) = (f, g)$ . 2.  $U$  antiunitér, azaz van inverze, izometrikus ( $\|Uf\| = \|f\|$ ) és anti-lineáris ( $U(\lambda f + \mu g) = \bar{\lambda} Uf + \bar{\mu} Ug$  tetszőleges  $\lambda$  és  $\mu$  komplex számokra), amiből következik, hogy  $(Uf, Ug) = (g, f)$ . Megfordítva, minden unitér vagy antiunitér  $U$  egyértelműen meghatároz egy sugár-megfeleltetést.

A vektorsugarakkal analóg módon definiálhatunk egy  $U$  operátorsugarat

<sup>1</sup> A szögletes zárójelben levő számok a dolgozat végén levő bibliográfiára utalnak. Megjelent Annals of Mathematics 59, 1, 1954.



mint az összes  $\tau U_0$  ( $|\tau|=1$ ) operátorok halmazát adott  $U_0$  esetén és bármely operátort, amelyet  $U$  tartalmaz,  $U$  egy ábrázoló operátorának tekinthetjük. Wigner tétele szerint egy izomorf sugár-megfeleltetés egy (unitér vagy antiunitér) operátorsugarat definiál és vice versa. Két  $U$  és  $V$  operátorsugár  $UV$  szorzataként definiáljuk azt a sugarat, amely az összes  $UV$  ( $U \in \mathcal{U}$ ,  $V \in \mathcal{V}$ ) szorzatokból áll.

Tegyük fel, hogy a kérdéses rendszernek van egy invarianciája vagy szimmetria-tulajdonsága, amely egy  $G$  csoporttal jellemezhető (pl. a Lorentz-csoport relativisztikus invariancia vagy az ortogonális csoport centrális szimmetria esetében). Ez esetben biztosan létezik egy  $U_r$  izomorf sugár-megfeleltetés  $G$  minden  $r$  elemére és jól ismert módon származtatható az

$$U_r U_s = U_{rs} \quad (r, s \in G) \quad (A)$$

ábrázolási tulajdonság.

A következőkben folytonos (topologikus) csoportokkal, pontosabban Lie-csoportokkal fogunk foglalkozni. Legyen  $G'$  a  $G$  csoport identitás-komponense (vagyis a csoportsokaságon értelmezett legnagyobb összefüggő halmaz, amely tartalmazza  $G$  e egységelemét. A Lorentz-csoport esetén  $G'$  az összes valódi Lorentz-transzformációt tartalmazza). Anélkül, hogy  $U_r$ -re bármiféle folytonossági feltételt kötnénk ki, a következőkben beláthatjuk, hogy  $U_r$  unitér minden  $r \in G'$  elemre. 1.  $e$  megfelelően kiválasztott  $\mathfrak{N}$  környezetében minden  $r$  csoportelem valamilyen  $s$  elem négyzete  $r=s^2$ . 2. Mind az unitér, mint az antiunitér operátorok négyzete unitér, ennél fogva  $U_r$  unitér, ha  $r \in \mathfrak{N}$ . 3.  $G'$  minden  $r$  eleme egyenlő egy  $r_1 r_2 \dots r_n$  ( $r_i \in \mathfrak{N}$ ) véges szorzattal, ennél fogva  $U_r = U_{r_1} U_{r_2} \dots U_{r_n}$  is unitér, q. e. d.

Az előző érvelés nem érvényes  $G$ -nek olyan  $r$  elemeire, amelyek nem függnek össze az  $e$  egységelemmel (pl. tükrözések vagy időinverzió a Lorentz-csoport esetében), és Wigner valóban kimutatta [17], hogy az időinverzió művelete a kvantummechanikában antiunitér  $U$ -ra vezet.

Jelen munkában figyelmünket egy adott csoport azonosság-komponensére összpontosítjuk, és ennél fogva kizárólag unitér sugár ábrázolásokkal foglalkozunk. (Minden kvantummechanikai alkalmazásnál a fő feladat  $G'$  sugár ábrázolásainak meghatározása. A teljes  $G$  csoportra való kiterjesztéshez  $U$ -t csak véges számú csoportelemre — pl. tükrözés vagy időinverzió — szükséges meghatározni, ez más módszerekkel hajtható végre és általában nem jelent nehézséget.)

Ha minden  $U_r$  sugárból kiválasztunk egy  $U_r$  ábrázoló operátort, akkor (A)-ból következik

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs} \quad (r, s \in G) \quad (B)$$

ahol  $\omega(r, s)$  egy  $r$ -től és  $s$ -től függő komplex szám, amelynek abszolút értéke 1. Így az  $U_r$  unitér operátorok  $G$ -nek egy ábrázolását csak egy tényező erejéig határozzák meg. Ez a tényező az  $U_r$  ábrázoló operátorok megválasztásától függ. Ha mást választunk ki, mondjuk  $U'_r = \Phi(r) U_r$ -t ( $|\Phi(r)|=1$ ), egy másik  $\omega'(r, s) = \Phi(r) \Phi(s) \omega(r, s) / \Phi(rs)$  tényező jelenik meg. Két  $\omega$  és  $\omega'$  tényezőt, amelyek között ez az összefüggés áll fenn, ekvivalensnak nevezünk és az (A) sugár-ábrázolás csak ekvivalens tényezőknek egy osztályát határozza meg egyértelműen.

Sok kvantummechanikai problémánál az ember a  $\mathfrak{H}$  Hilbert-tér konkrét realizációjából indul ki, és képes közvetlen módon olyan operátorokat (nem operátorsugarakat) definiálni, amelyek maguk rendelkeznek az ábrázolási tulajdonsággal:

$$U_r U_s = U_{rs} \quad (r, s \in G). \quad (C)$$



Más szavakkal ki lehet választani olyan ábrázoló operátorokat, amelyekre az  $\omega$  tényező értéke 1. Ennek ellenére a forgás- és a Lorentz-csoport kétértékű ábrázolásait például helyesebb sugár-ábrázolásokként értelmezni. Ezenkívül még a leg-egyszerűbb kvantummechanikai problémánál (nem-relativisztikus Schrödinger-egyenlet egy szabad részecskére) sem mindig küszöbölhető ki az  $\omega$  tényező, mint pl. a Galilei-csoport esetében (nem-relativisztikus transzformációk csoportja egyik inercia rendszerből egy másikba). Vö. alább a 6f. és g §-okkal.

Ha azonban a  $G$  csoportból indulunk ki azzal a céllal, hogy megkeressük az összes olyan kvantummechanikai rendszereket, amelyek megengedik a  $G$  által definiált izomorfizmusokat, csak (A)-t posztulálhatjuk, és meg kell keresni, milyen tényezők léphetnek fel, és különösen azt kell megnézni, hogy (C) mindig teljesíthető-e az ábrázoló operátorok megfelelő kiválasztásával. Ezt az általánosabb és szisztematikus megközelítést Wigner kezdeményezte, és az inhomogén Lorentz-csoportról írott munkájában [15] mély és messzevivő eredményeket ért el, többek között a szabad relativisztikus rendszerek tökéletes osztályozását. Ennyit a kvantummechanikai háttérrel.

2. Most rátérünk a dolgozat rövid összefoglalására. Célunk Lie-csoportok unitér sugár-ábrázolásainak vizsgálata, amelyek bizonyos folytonossági feltételeknek tesznek eleget. (Véges csoportok sugár- vagy projekciós ábrázolásait behatóan vizsgálta Schur [10]. Egyes módszereink Schur módszereinek megfelelő adaptációi Lie-csoportokra.) Amint azt Wigner kimutatta [15], a sugár-ábrázolás azt implicálja, hogy minden  $r$ -re kiválasztható az  $U_r$  ábrázoló operátorok egy erősen folytonos csoportja a  $G$  csoport  $e$  egységelemének valamilyen  $\mathfrak{N}$  környezetében. Ekkor ha a (B)-ben szereplő  $\omega$  tényezőt  $e$ -hez elég közeli  $r$ ,  $s$ -re definiáljuk, az folytonos lesz és lokális tényezőnek nevezzük. Az asszociatív törvény szerint  $\omega$  eleget tesz egy függvényegyenletnek (l. alább a (2.3) egyenletet). Megfordítva, minden  $e \in \mathfrak{N}$  környezetén definiált folytonos  $\omega(r, s)$  függvényt, amely egységnyi abszolút értékű komplex értékeket vesz fel és eleget tesz a (2.3) függvény-egyenletnek, a  $G$  csoport lokális tényezőjének nevezzük. Módszerünk lényegében ezen lokális tényezők vagy inkább az  $\omega(r, s) = e^{i\xi(r, s)}$  összefüggés által definiált lokális exponensek tanulmányozásában áll. (Lokális exponensek elemzése könnyebb, mert azok lineáris függvény-egyenletnek tesznek eleget.)

Mivel egy  $G$  Lie-csoport lokális tulajdonságait annak  $\mathfrak{g}$  Lie-algebrája határozza meg (vagy struktúra-állandói),  $\mathfrak{g}$ -ból jelentős információ nyerhető  $G$  lokális exponenseire.  $m$  számú ( $m \leq \frac{1}{2}n(n-1)$ ) megfelelően választott  $\xi_k(r, s)$  lokális exponens

$\sum_{k=1}^m \gamma_k \xi_k$  ( $\gamma_k$  állandó) lineáris kombinációi egy  $n$ -dimenziós  $G$  Lie-csoportnál a nem-ekvivalens lokális exponensek teljes rendszerét adják. Amint a szükséges általános eredményeket megkaptuk, a minimális  $m$  meghatározása adott csoport esetén egy lineáris algebrai probléma, és nem jelent nehézséget a tárgyalandó példákban. Olyan differenciálegyenleteket is kapunk, amelyekből a  $\xi_k$  lokális exponensek elvileg meghatározhatók.

Míg általánosságban nem lehet egy lokális exponenst kiterjeszteni egy az egész  $G'$  csoporton definiált exponenssé ( $G$  identitás-komponense), ez mindig megtehető, ha  $G'$  egyszeresen összefüggő. Ennélfogva helyénvaló  $G'$ -t annak univerzális  $G^*$  fedőcsoportjával helyettesíteni. ( $G'$  minden sugár-ábrázolása egyben  $G^*$ -nak is



sugár-ábrázolása és csak annyit kell tennünk, hogy kiválasztjuk  $G^*$ -nak azon sugár-ábrázolásait, amelyek egyidejűleg  $G'$ -nek is sugár-ábrázolásai.) Mivel  $G^*$  és  $G'$  lokálisan izomorfak,  $G'$  és  $G^*$  lokális exponensei megegyeznek.  $G^*$  minden sugár-ábrázolásához ki lehet választani az erősen folytonos  $U$ , ábrázoló operátoroknak egy sorozatát minden  $G^*$ -beli  $r$ -re, amelyekre (B) fenntartás nélkül érvényes folytonos  $\omega$  tényező mellett. Ha  $G$  összes lokális exponensei egyenlőek 0-val (ilyen esetben a fent említett minimális  $m$  érték zérus), kiválasztható  $G^*$  minden sugár-ábrázolásához egy erősen folytonos  $U_r$  reprezentáló operátor sorozat, amely eleget tesz (C)-nek, vagyis  $G^*$  közönséges ábrázolását adja. (Ez már nem szükségképpen igaz a  $G'$  csoportra magára, amint az jól ismert a forgáscsoport kétértékű ábrázolásai-ból.) Az a tény, hogy — amint azt Wigner bebizonyította [15] — ez érvényes a Lorentz-csoportra, a posteriori igazolását adja annak, hogy a relativisztikus kvantumelméletben figyelmen kívül hagyják a (B) általánosabb lehetőséget. Wigner eredménye most könnyebben levezethető (l. alább a 6. §-t), és kimutatjuk, hogy érvényes általánosabb csoportokra is, ahol a Minkowski-féle metrikát egy tetszőleges véges számú változós kvadratikussal helyettesítjük.

Amint  $G^*$  összes exponenseit (vagy tényezőit) meghatároztuk, a problémát lényegében közönséges reprezentációelméleti problémára redukáltuk. Valóban, az  $e^{i\theta}U_r$  operátorok ( $\theta$  tetszőleges valós szám), vagyis  $G^*$  egy adott sugár-ábrázolásának összes  $U_r$  sugaraiban szereplő operátorok csoportot alkotnak a szorzásra és egy  $H$  csoportnak  $G^*$  és a  $\zeta$  exponens által meghatározott definícióját szolgáltatják. ( $H$   $G^*$ -nak egy kiterjesztése, vagyis  $G^* = H/T$ , ahol  $T$  egy centrális egyparaméteres alcsoportja  $H$ -nak. (L. a 2d. §-t.) Míg  $G'$ -nek (vagy  $G^*$ -nak) minden lokális exponense előfordul  $G^*$  valamilyen sugár-ábrázolásában, létezhetnek olyan lokális exponensek, amelyek nem fordulnak elő  $G'$ -nek magának semmilyen sugár-ábrázolásában sem.

Azt a feltételt, hogy  $G$  Lie-csoport, nem vezetjük be egészen a 4. §-ig, mivel nem játszik szerepet a sugár-ábrázolások, azok tényezői és exponensei általános tárgyalásában (1—3. §-ok). A 4. § a Lie-csoportok lokális exponenseivel foglalkozik: a Lie-csoportok elméletének csak az elemibb részeit használjuk fel. Az 5. §-ban bebizonyítjuk, hogy egy összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport bármilyen lokális exponense kiterjeszthető egy a teljes csoporton definiált exponensre. (Erre az általános eredményre a későbbiekben nem lesz szükség, mivel az exponenseket explicite megalkotjuk az összes tárgyalandó csoportok esetében.) A 6. §-ban a 4. §-ban kifejlesztett módszereket alkalmazzuk néhány a kvantumelméletben szerepet játszó példára, mint pl. a Lorentz-, a de Sitter- és a Galilei-csoport. A 7. § egyes általános eredményeket tartalmaz a félig-egyszerű és kompakt Lie-csoportok sugár-ábrázolásaival kapcsolatban.

*Köszönetnyilvánítás.* E munka részben a Higgins Alapítvány ösztöndíjának segítségével készült, amelyért a szerző hálás köszönetet mond.



### 1. §. Vektorsugarak és operátorsugarak

1a) *Előzetes megjegyzések.* A következőkben egy  $\mathfrak{H}$  komplex Hilbert-tér  $f, g, \dots$  vektoraival foglalkozunk. (Pontosabban  $\mathfrak{H}$  egy véges dimenziós vektortér lehet.) Feltesszük, hogy az  $(f, g)$  belső szorzat lineáris a második tényezőben [vagyis  $(f, \lambda g) = \lambda(f, g)$  bármely  $\lambda$  komplex szám mellett] és az  $f$  vektor normája

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

Fel fogjuk használni azt az egyszerű tényt, hogy bármilyen két egységvektorra  $(\|f\| = \|g\| = 1)$

$$\|f - g\|^2 = 2(1 - \operatorname{Re}(f, g)) \leq 2|1 - (f, g)| \quad (1.1)$$

ahol  $\operatorname{Re}$  a valós részt jelenti.

1b) *Vektorsugarak.* Egy  $\mathbf{f}$  vektorsugár az összes  $\tau f_0$  alakú vektorok halmaza, ahol  $f_0$  rögzített egységnyi normájú vektor és  $\tau$  tetszőleges unimoduláris komplex szám. (Minden  $f$  vektort, amelyet  $\mathbf{f}$  tartalmaz, az  $\mathbf{f}$  sugár ábrázoló vektorának fogunk nevezni.)

Két sugár  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$  belső szorzatát az  $\mathbf{f}$  és  $\mathbf{g}$  sugarak két ábrázoló vektora belső szorzatának abszolút értékével definiáljuk.

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = |(f, g)| \quad (f \in \mathbf{f}, g \in \mathbf{g}). \quad (1.2)$$

A Schwarz-féle egyenlőtlenség szerint  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \leq 1$  és  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 1$  akkor, és csak akkor, ha  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ .

Két sugár közötti  $d(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  távolságot az  $\|f - g\|$  ábrázoló vektorok közötti minimális távolsággal definiálunk. Legyen  $f = \sigma f_0 \in \mathbf{f}$ ,  $g = \tau g_0 \in \mathbf{g}$ , és  $(f_0, g_0) = e^{i\lambda} |(f_0, g_0)| = e^{i\lambda} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ . (1.1) szerint  $\|f - g\|^2 = 2(1 - \operatorname{Re}(\sigma \tau e^{i\lambda} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}))$ . A  $\sigma = e^{i\lambda}$  értéknél  $e$  kifejezés a minimális  $2(1 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{g})$  értékét veszi fel. Ennélfogva

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = [2(1 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{g})]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

Későbbi alkalmazás kedvéért jegyezzük meg, hogy

$$1 - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})^2 = d^2 \left( 1 - \frac{1}{4} d^2 \right) \leq d^2 \quad (d = d(\mathbf{f}, \mathbf{g})). \quad (1.4)$$

Világos, hogy  $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0$  akkor és csak akkor, ha  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ , és nem nehéz kimutatni, hogy evvel a távolság-függvénnyel az  $\mathbf{f}$  sugarak egy teljes metrikus teret alkotnak. Ezt a tényt azonban nem fogjuk felhasználni.

1.1. LEMMA. Az  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$  skalár szorzat folytonos mindkét tényezőben a  $d(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  metrikára vonatkoztatva.

*Bizonyítás.* Tekintsünk három  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  sugarat és válasszunk három  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  reprezentáló vektort úgy, hogy  $\mathbf{g}_1$  és  $\mathbf{g}_2$  távolsága minimális legyen. Ekkor

$$\begin{aligned} |\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_1 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_2| &= |(f, g_1) - (f, g_2)| \leq |(f, g_1) - (f, g_2)| = \\ &= |(f, g_1 - g_2)| \leq \|g_1 - g_2\| = d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2). \end{aligned}$$

Ugyanezt az érvelést megismételve kimutatható, hogy

$$|\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{g}_2| \leq d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) + d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2).$$



1c) *Operátorsugarak.* Egy  $U$  unitér operátorsugár az összes  $\tau U_0$  alakú operátorok serege ( $\mathfrak{S}$ -n), ahol  $U_0$  egy rögzített unitér operátor és  $\tau$  tetszőleges egységnyi abszolút értékű komplex szám. (Minden  $U$  vektort, amely bennfoglaltatik  $U$ -ban, az  $U$  sugár ábrázoló operátorának fogunk nevezni.) A későbbiekben csak *unitér* operátorsugarakat fogunk tárgyalni.

Két sugár  $UV$  szorzata az az operátorsugár, amely az összes  $UV$  szorzatokat tartalmazza ( $U \in U, V \in V$ ). Az  $I$  sugár az egységoperátort tartalmazza, és egy  $U$  sugár  $U^{-1}$  inverzét az összes  $U^{-1}$  operátorok alkotják ( $U \in U$ ). Világos, hogy  $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ .

Az  $Uf$  vektorsugár tartalmazza az összes  $Uf$  vektorokat ( $U \in U, f \in f$ ). Mivel  $Uf \cdot Ug = f \cdot g$ , ennél fogva  $d(Uf, Ug) = d(f, g)$ .

1d) *Sugár-ábrázolások.* Egy  $G$  csoport (melynek elemei  $r, s, \dots$  és egységeleme  $e$ ) sugár-ábrázolása annak egy olyan  $r \rightarrow U_r$  leképezése unitér operátorsugarakra, hogy

$$U_r U_s = U_{rs} \quad (r, s \in G). \quad (1.5)$$

Az is következik, hogy  $U_e = I$  és  $U_{r^{-1}} = (U_r)^{-1}$ .

Kizárólag *topologikus* (folytonos) csoportokkal fogunk foglalkozni anélkül, hogy ezt explicite kimondanánk. Ennek megfelelően egy csoportnak másakra való homomorf (vagy izomorf) leképezését folytonosnak fogjuk tekinteni.

Egy  $G$  csoport sugár-ábrázolását *folytonosnak* nevezzük, ha az (erős folytonosság) következő feltételének eleget tesz:

*$G$ -nek bármilyen  $r$  elemére, bármilyen  $f$  sugárra és pozitív  $\varepsilon$ -ra létezik  $G$ -n  $r$ -nek olyan  $\mathfrak{N}$  környezete, hogy  $d(U_s f, U_r f) < \varepsilon$ , ha  $s \in \mathfrak{N}$ .* (1.6)

Mint az szokásos, elegendő (1.6)-ot  $r=e$ -re posztulálni, mivel az ábrázolási tulajdonság folytan

$$d(U_s f, U_r f) = d(f, U_{s^{-1}r} f).$$

*Megjegyzés.* (1.6) azonos Wigner folytonossági definíciójával (Wigner [15], 169. old.). Megfelel annak a kvantumelméleti alkalmazások által sugallt feltételnek, hogy minden átmeneti valószínűség folytonosan változik az  $s$  csoportelemmel. Az a követelmény, hogy tetszőleges két adott  $f$ -re és  $g$ -re az  $U_s f \cdot g$  belső szorzat  $s$ -ben folytonos legyen, ekvivalens (1.6)-tal: annak következménye (l. az 1.1. Lemmát), és megfordítva belőle következik (1.6) ( $g = U_r f$  helyettesítéssel).

1e) *Az ábrázoló operátorok kiválasztása.* Most bebizonyítjuk a következő Wignertől származó tételt ([15], 169—170. old.).

1.1. TÉTEL. Legyen  $U$ , egy  $G$  csoport folytonos sugár-ábrázolása.  $G$  e egységelemének egy megfelelő  $\mathfrak{N}_0$  környezetében levő minden  $r$  esetén kiválasztható az  $U_r \in U$ , ábrázoló operátoroknak egy erősen folytonos serege (vagyis bármilyen  $f$  vektor,  $r \in \mathfrak{N}_0$  és bármilyen pozitív  $\varepsilon$  esetén létezik  $r$ -nek egy olyan  $\mathfrak{N}$  környezete, hogy  $\|U_s f - U_r f\| < \varepsilon$  ha  $s \in \mathfrak{N}$ ).

*Megjegyzés.* Az  $U_r$  ábrázoló operátoroknak egy olyan halmazát, amely eleget tesz az 1.1. Tételben szereplő feltételnek, az ábrázoló operátorok megengedett halmazának fogjuk nevezni.



*Bizonyítás.* Szorosan követjük Wigner gondolatmenetét. 1.  $U_r$  definíciója. Legyen  $h$  egy adott sugár,  $h$  egy ábrázoló vektora és  $q_r = h \cdot U_r h$ . Figyelembe véve az 1.1. Lemmát és az (1.6) folytonossági kritériumot,  $q_r$  folytonos függvénye lesz  $r$ -nek és  $q_e = 1$ . Következésképpen kiválasztható adott pozitív  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) esetén  $e$ -nek olyan  $\mathfrak{N}_0$  környezete, hogy  $1 \geq q_r > \alpha$  teljesüljön minden  $r \in \mathfrak{N}_0$ -ra. Ennélfogva kiválaszthatunk egy  $U_r \in U_r (r \in \mathfrak{N}_0)$  egyértelműen meghatározott ábrázoló operátort, amelyre

$$(h, U_r h) = q_r = h \cdot U_r h \quad (q_r > \alpha). \quad (1.7)$$

Világos, hogy  $U_e = 1$ .

2. *Segéd összefüggés.* Legyen  $f \in \mathfrak{f}$ , és

$$d_{r,s}(f) = d(U_r f, U_s f); \quad \sigma_{r,s}(f) = (U_r f, U_s f) \quad (1.8)$$

$$z_{rs}(f) = U_s f - \sigma_{r,s}(f) U_r f. \quad (1.8a)$$

$z_{r,s}(f)$  nyilvánvalóan ortogonális  $U_r f$ -re, és ennél fogva (1.4) alapján

$$\|z_{r,s}(f)\|^2 = 1 - |\sigma_{r,s}(f)|^2 \leq d_{r,s}(f)^2. \quad (1.9)$$

3.  $U_r$  folytonossága. Két lépésben haladunk. Legyen először  $f = h$ . (1.8a) és (1.7) alapján

$$((h, z_{r,s}(h)) = (h, U_s h) - \sigma_{r,s}(h)(h, U_r h) = q_s - \sigma_{r,s}(h) q_r,$$

úgy, hogy

$$1 - \sigma_{r,s}(h) = (1/q_r) \{q_r - q_s + (h, z_{r,s}(h))\}.$$

Az 1.1. Lemmából  $|q_r - q_s| \leq d_{r,s}(h)$ . Így (1.1), (1.7) és (1.9) alapján a Schwarz-féle egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk:

$$\|U_s h - U_r h\|^2 \leq 2|1 - \sigma_{r,s}(h)| \leq (4/\alpha) d_{r,s}(h).$$

Ez igazolja  $U_r h$  folytonosságát, mivel minden pozitív  $\varepsilon$ -ra létezik  $r$ -nek  $\mathfrak{N}$  környezete [1. (1.6)], amelyen teljesül, hogy  $(4/\alpha) d_{r,s}(h) < \varepsilon^2$ , ha  $s \in \mathfrak{N}$ .

Tekintsünk most egy  $h$ -ra ortogonális  $g$  egységvektort, és legyen  $k = 2^{-\frac{1}{2}}(h + g)$ , úgy hogy  $\|k\| = 1$ . (1.8a) szerint

$$(U_r h, z_{r,s}(k)) = (U_r h - U_s h, U_s k) + (U_s h, U_s k) - \sigma_{r,s}(k)(U_r h, U_r k).$$

Mivel  $(U_h, U_k) = (h, k) = 2^{-\frac{1}{2}}$  minden unitér  $U$ -ra, azt kapjuk, hogy

$$1 - \sigma_{r,s}(k) = 2^{\frac{1}{2}} \{(U_r h, z_{r,s}(k)) + (U_s h - U_r h, U_s k)\}$$

és ennél fogva (1.9)-ből

$$\|U_s k - U_r k\|^2 \leq 2|1 - \sigma_{r,s}(k)| \leq 2^{\frac{3}{2}} \{d_{r,s}(k) + \|U_s h - U_r h\|\}.$$

$U_r h$  (fentebb bizonyított) folytonosságából következik  $U_r k$ -é és ennél fogva  $U_r g = 2^{\frac{1}{2}} U_r k - U_r h$ -é is.



Legyen  $f$  egy tetszőleges vektor és  $f = \lambda_1 h + \lambda_2 g$  (ahol  $g$   $h$ -ra ortogonális egységvektor). Ekkor  $U_r f = \lambda_1 U_r h + \lambda_2 U_r g$ , és így  $U_r f$  folytonossága is következik. Ez teljessé teszi a bizonyítást.

*Megjegyzés.* Figyeljük meg, hogy sem  $G$  csoporttulajdonságát, sem  $U_r$  ábrázolási tulajdonságát nem használtuk fel a bizonyítás során. Ennélfogva valahányszor operátorsugarak egy  $U_r$  halmaza folytonosan függ [l. (1.6)] egy topologikus tér  $r$  elemeitől, egy tetszőlegesen választott rögzített  $r_0$  alkalmas környezetében kiválasztható az ábrázoló operátoroknak egy megengedett halmaza. (A fenti bizonyításban  $r_0 = e$ .)

1f) *Az ábrázoló operátorok különböző kiválasztásai.* Az (1.7) összefüggés által definiált kiválasztást kizárólag egy egzisztencia bizonyításához használtuk fel, de önmagában nem bír különösebb jelentőséggel. Legyen  $U_r$  az ábrázoló operátorok tetszőleges megengedett halmaza, amely  $e$  bizonyos  $\mathfrak{N}_0$  környezetében kielégíti az 1.1. Tétel feltételeit. Ha  $\Phi(r)$   $r$ -nek folytonos komplex függvénye  $\mathfrak{N}_0$ -on és  $|\Phi(r)| = 1$ , akkor nyilvánvalóan

$$U'_r = \Phi(r) U_r \quad (|\Phi(r)| = 1) \quad (1.10)$$

szintén egy megengedett ábrázoló operátor halmazt definiál  $\mathfrak{N}_0$ -on. Megfordítva, legyen  $U'_r$  az ábrázoló operátoroknak  $e\mathfrak{N}'_0$  környezetén definiált halmaza és legyen  $\mathfrak{N}_1$   $e$ -nek az  $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}'_0$  metszetében levő környezete. Mivel  $U'_r$  és  $U_r$  ugyanahhoz a sugárhoz tartoznak, egy (1.10) alakú egyenletnek kell érvényesnek lennie  $\mathfrak{N}_1$ -en, és könnyen belátható, hogy  $\Phi(r)$  folytonos, mivel mind  $U'_r$ , mind  $U_r$  erősen folytonos.

## 2. §. Lokális tényezők és exponensek

Ennek a dolgozatnak a hátralevő részében az összes előforduló környezetekről fel fogjuk tenni, hogy azok a kérdéses csoport egységelemének környezetei.

2a) *Az  $\omega(r, s)$  lokális tényező.* Legyen  $U_r$  az ábrázoló operátoroknak megengedett halmaza, az  $\mathfrak{N}_0$  környezetén, amelyet a  $G$  csoport egy folytonos sugár-ábrázolására definiáltunk, és legyen  $U_e = 1$ . (A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy  $U_e = 1$ .) Ha  $r, s$  és  $rs$   $\mathfrak{N}_0$ -ban vannak, akkor  $U_{rs}$  definiált, és  $U_r U_s$  és  $U_{rs}$  ugyanahhoz a sugárhoz tartoznak. Így

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}, \quad (2.1)$$

ahol  $\omega(r, s)$  egységnyi abszolút értékű komplex szám. Mivel  $U_e = 1$ ,

$$\omega(e, e) = 1. \quad (2.2)$$

Három  $r, s, t$   $\mathfrak{N}_0$ -beli elemre, melyeket úgy választottunk, hogy  $rs, st$  és  $rst$  szintén  $\mathfrak{N}_0$ -ban vannak, az  $(U_r U_s) U_t = U_r (U_s U_t)$  asszociatív törvényből következik, hogy

$$\omega(r, s) \omega(rs, t) = \omega(s, t) \omega(r, st). \quad (2.3)$$

Az  $\omega(r, s)$  függvényt az adott sugár-ábrázolás *lokális tényezőjének* fogjuk nevezni.

Mivel az  $U_r$  operátorok erősen folytonosak, az  $\omega(r, s)$  függvény folytonos  $r$ -ben és  $s$ -ben. Legyen  $f$  egy egységvektor, és tekintsünk két  $r, s$  és  $r's'$  párt, amelyekre  $\omega$ -t definiáltuk. Ekkor (2.1)-ből kapjuk:

$$\omega(r, s) (U_{rs} - U_{r's'}) f + U_{r'} (U_{s'} - U_s) f + (U_{r'} - U_r) U_s f = (\omega(r', s') - \omega(r, s)) U_{r's'} f.$$



A normákat képezve azt kapjuk, hogy

$$|\omega(r', s') - \omega(r, s)| \leq \|(U_{r's'} - U_{rs})f\| + \|(U_{s'} - U_s)f\| + \|(U_{r'} - U_r)U_s f\|.$$

Következésképpen egy  $r, s$  párra és egy pozitív  $\varepsilon$ -ra létezik egy olyan  $\mathfrak{N}_1$  környezet, amelyen  $|\omega(r', s') - \omega(r, s)| < \varepsilon$  valahányszor  $r^{-1}r' \in \mathfrak{N}_1, s^{-1}s' \in \mathfrak{N}_1$ .

Ha úgy választunk ki egy  $\mathfrak{N}$  környezetet, hogy  $\mathfrak{N}^2$  [amely az összes  $rs$  ( $r \in \mathfrak{N}, s \in \mathfrak{N}$ ) szorzatokból áll] benne legyen  $\mathfrak{N}_0$ -ban, akkor  $\omega(r, s)$   $\mathfrak{N}$  bármilyen  $r, s$  elemeire definiált és (2.3) érvényes, ha  $rs$  és  $st$   $\mathfrak{N}$ -ben vannak.

Általánosabban bármilyen, az  $\mathfrak{N}$  környezet  $r, s$  elemeire definiált  $\omega(r, s) \cdot (|\omega(r, s)| = 1)$  komplex értékű folytonos függvényt  $G$ -nek  $\mathfrak{N}$ -n definiált *lokális tényezőjének* fogunk nevezni, ha  $\omega(e, e) = 1$  és ha (2.3) fennáll  $\mathfrak{N}$ -be tartozó minden  $rs$  és  $st$ -re.

Ha  $\mathfrak{N}$  egybeesik  $G$ -vel, úgyhogy (2.3) érvényes az egész  $G$  csoporton,  $\omega$ -t  $G$  *tényezőjének* fogjuk nevezni (a „lokális” jelző nélkül).

*Ekvivalens lokális tényezők.* A megengedett ábrázoló operátorok másik  $U'_r = \Phi(r)U_r$  ( $r \in \mathfrak{N}_0$ ) halmazára [vö. (1.10)] (2.1)-ből kapjuk, hogy  $U'_r U'_s = \omega'(r, s)U'_{rs}$ , ahol

$$\omega'(r, s) = \omega(r, s)\Phi(r)\Phi(s)/\Phi(rs) \quad (|\Phi(r)| = 1). \quad (2.4)$$

Általánosságban két  $\omega$  és  $\omega'$   $\mathfrak{N}$ -n, illetve  $\mathfrak{N}'$ -n definiált lokális tényezőt akkor fogunk *ekvivalensnek* nevezni, ha egy (2.4) alakú összefüggés teljesül valamilyen  $\mathfrak{N}_1$  ( $\subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ ) környezeten, ahol  $\Phi(r)$   $r$ -nek egy  $\mathfrak{N}_1^2$ -en definiált komplex értékű függvénye. (Jegyezzük meg, hogy  $\Phi(e) = 1$ , mert  $\omega(e, e) = \omega'(e, e) = 1$ ).

Ha  $\omega$  egy  $\mathfrak{N}$ -n definiált lokális tényező és  $\Phi(r)$  ( $|\Phi(r)| = 1, \Phi(e) = 1$ ) egy komplex értékű folytonos függvény  $\mathfrak{N}$ -en, akkor a (2.4)-ből kapott  $\omega'$  függvény szintén egy  $\mathfrak{N}$ -en definiált lokális tényező, mivel kielégíti (2.2)-t és (2.3)-t.

2b) *Lokális exponensek.* A lokális tényezőket célszerűbb lokális exponensekkel helyettesíteni az  $\omega(r, s) = e^{i\xi(r, s)}$  összefüggés szerint.

*Definíció.* Egy  $G$  csoportnak  $\mathfrak{N}$  környezeten definiált lokális exponense egy valós értékű  $\xi(r, s)$  folytonos függvény, amely  $\mathfrak{N}$  összes  $r, s$  elemére definiált, és eleget tesz a következő összefüggéseknek:

$$\xi(e, e) = 0, \quad (2.5)$$

$$\xi(r, s) + \xi(rs, t) = \xi(s, t) + \xi(r, st) \quad (rs \in \mathfrak{N}, st \in \mathfrak{N}). \quad (2.6)$$

Ha  $\mathfrak{N}$  egybeesik  $G$ -vel,  $\xi$ -t  $G$  *exponensének* fogjuk nevezni.

Tetszőleges  $\xi$  lokális exponensre

$$\xi(r, e) = 0 \quad \xi(e, t) = 0 \quad (2.7)$$

$$\xi(r, r^{-1}) = \xi(r^{-1}, r) \quad \text{ha } r \in \mathfrak{N}, r^{-1} \in \mathfrak{N}. \quad (2.7a)$$

[(2.7) úgy kapható meg, ha (2.6)-ba  $s = t = e$ -t és  $r = s = e$ -t helyettesítünk. (2.7a)-t pedig úgy kapjuk, hogy (2.6)-ba  $s = r^{-1}$ -t és  $t = r$ -t helyettesítünk és (2.7)-t alkalmazzuk rá.]

Két  $\xi$  és  $\xi'$   $\mathfrak{N}$ -n, illetve  $\mathfrak{N}'$ -n definiált lokális exponenst *ekvivalenseknek* nevezzük, ha egy

$$\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \Delta_{r,s}[\xi]; \quad \Delta_{r,s}[\xi] = \xi(r) + \xi(s) - \xi(rs) \quad (2.8)$$



alakú összefüggés áll fenn közöttük valamilyen  $\mathfrak{N}_1$  környezeten, amely  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ -ben van, ahol  $\zeta(r)$  egy valós értékű  $\mathfrak{N}_1$ -n definiált folytonos függvény. (2.5) szerint  $\zeta(e)=0$ .

Ha  $\xi$  egy  $\mathfrak{N}$ -n definiált lokális exponens és  $\zeta(r)$  egy valós értékű folytonos függvény  $\mathfrak{N}^2$ -en, amely eltűnik az  $r=e$  helyen, akkor a (2.8) által definiált  $\xi'$  függvény szintén lokális exponens  $\mathfrak{N}$ -n, mivel eleget tesz a (2.5) és (2.6) definíciós relációknak.

A következőkben a (2.8) összefüggést gyakran a

$$\xi' = \xi + \Delta[\zeta] \quad (2.8a)$$

rövidített alakban fogjuk írni.

Minden lokális exponens egyértelműen meghatároz egy  $\omega=e^{i\xi}$  lokális tényezőt és két ekvivalens exponens meghatároz két ekvivalens tényezőt,  $\Phi(r)=e^{i\xi(r)}$  mellett [v. ö.] (2.4) és (2.8)]. Megfordítva, ha egy adott  $\omega$  lokális tényezőhöz az  $\mathfrak{N}$  környezetet úgy választottuk, hogy  $|\omega-1|$  elég kicsi, akkor  $\xi=-i \log \omega$  [a logaritmust  $(\omega-1)$  szerinti hatványsorával definiálva] egy  $\mathfrak{N}$ -n definiált lokális exponens. Továbbá két ekvivalens lokális tényezőtől két ekvivalens lokális exponens származtatható; a (2.8) ekvivalencia reláció  $\zeta(r)=-i \log \Phi(r)$  mellett teljesül olyan környezeten, ahol  $|\Phi(r)-1|$  elég kicsi.

Egy  $G$  csoport  $U_r$  véges dimenziós folytonos sugár-ábrázolásánál minden lokális tényező egyenlő 1-gyel. [Vö. Weyl 13, 183—184. old.]

**Bizonyítás.** Jelöljük  $U_r$  determinánsát  $D(r)$ -rel. [ $D(r)$  folytonos,  $|D(r)|=1$  és  $D(e)=1$ .] Az  $U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs} = e^{i\xi(r, s)} U_{rs}$  ( $r$  és  $s$   $\mathfrak{N}$ -ben vannak) összefüggésből következik, hogy  $D(r)D(s) = e^{in\xi(r, s)} D(rs)$ , ahol  $n$  a  $\xi$  reprezentációs tér dimenziója. Ha  $\mathfrak{N}$ -t megfelelően választottuk (úgy, hogy  $|\omega-1|$  és  $|D-1|$  elég kicsik), azt kapjuk, hogy  $\delta(r) + \delta(s) = n\xi(r, s) + \delta(rs)$ , ahol  $\delta(r) = -i \log D(r)$ . Így  $\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \Delta_{r,s}[\xi] = 0$  ( $\xi(r) = -\delta(r)/n$ ), q. e. d. A megfelelő  $U'_r = e^{i\xi(r)} U_r$  operátorok determinánsa 1.

2c) **Lokális exponensek ekvivalencia osztályai.** A  $\mathfrak{B}$  lineáris tér. Az exponensek használata a tényezők helyett avval az előnnyel jár, hogy a (2.5) és (2.6) összefüggések lineárisak. Így ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$   $\mathfrak{N}_1$ -en, illetve  $\mathfrak{N}_2$ -n definiált lokális exponensek, bármilyen  $\xi = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2$  lineárkombináció  $\gamma_1, \gamma_2$  valós konstans koefficienssekkel egy lokális exponens  $\mathfrak{N}_1$ -n  $\mathfrak{N}_2$ -ben levő tetszőleges  $\mathfrak{N}'$  környezeten.

Két  $\xi'$  és  $\xi$  lokális exponens ekvivalenciáját

$$\xi' \equiv \xi \quad (2.9)$$

fejezi ki. Ez az ekvivalencia reláció szimmetrikus, reflexív (azaz  $\xi \equiv \xi$ ) és tranzitív. A tranzitív jellegével kapcsolatban: tegyük fel, hogy  $\xi' = \xi + \Delta[\zeta]$   $\mathfrak{N}$ -n, és  $\xi'' = \xi' + \Delta[\zeta']$   $\mathfrak{N}'$ -n. Akkor  $\xi'' = \xi + \Delta[\zeta + \zeta']$  bármilyen  $\mathfrak{N}'' \subset (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')$ -n.

Az 1f) és 2a) §-okból világos, hogy egy  $G$  csoport folytonos sugár-ábrázolása egyértelműen meghatározza a lokális tényezőknek vagy exponenseknek egy ekvivalencia osztályát, míg az ekvivalencia osztály (2.1) által definiált konkrét eleme az ábrázoló operátorok kiválasztásától függ.

Egy  $\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2$  lineárkombináció ekvivalencia osztálya csak a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  lokális exponensek ekvivalencia osztályától függ. Legyen  $\xi'_i = \xi_i + \Delta[\zeta_i]$   $\mathfrak{N}_i$ -n ( $i=1, 2$ ). Akkor  $\gamma_1 \xi'_1 + \gamma_2 \xi'_2 = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \Delta[\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2]$  bármilyen  $\mathfrak{N}' \subset (\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2)$ -n.

Következésképpen egy  $G$  csoport lokális exponenseinek ekvivalencia osztályai egy  $\mathfrak{B}$  lineáris teret alkotnak (a  $\gamma$  valós konstansok terén).



A 4. §-ban ki fogjuk mutatni, hogy egy  $G$   $n$ -dimenziós Lie-csoport esetén a  $\mathfrak{B}$  tér véges  $h^* \cong \frac{1}{2}n(n-1)$  dimenziós. A maximális  $\frac{1}{2}n(n-1)$  dimenzió csak Abel-csoportoknál lép fel, míg  $h^*$  zérus sok fontos esetben.

2d)  $A$   $H$  lokális csoport. Nyilvánvaló, hogy  $G$  egy folytonos sugár-ábrázolásának  $U_r$  összes operátorsugarait alkotó  $U$  operátorok csoportot alkotnak a szorzásra. Legyen  $U_r$  az ábrázoló operátoroknak  $\mathfrak{N}_0$ -n definiált megengedett halmaza, és legyen  $\mathfrak{N}^2 \subset \mathfrak{N}_0$ . Akkor az  $U_r (r \in \mathfrak{N}_0)$ -beli operátorok  $e^{i\theta} U(r)$  alakúak ( $\theta$  balos). Ha  $r$  és  $s$   $\mathfrak{N}$ -ben vannak,

$$(e^{i\theta} U_r)(e^{i\theta'} U_s) = e^{i(\theta+\theta')} \omega(r, s) U_{rs} = e^{i(\theta+\theta'+\xi(r, s))} U_{rs}. \quad (2.10)$$

Ez felveti egy  $H$  lokális csoport következő definícióját. (A lokális csoport fogalmáról l. Pontrjagin [9], 83. old.) Legyen  $\xi$   $G$ -nek egy  $\mathfrak{N}$ -n definiált lokális exponense.  $H$  a  $\{\theta, r\}$  párokból áll, ahol  $\theta$  valós szám és  $r$   $\mathfrak{N}^2$  eleme. ( $H$  mint topologikus tér  $\mathfrak{N}^2$  és a valós vonal szorzata.) A csoportszorzás definíciója  $H$ -ban két  $\{\theta_1, r_1\}$  és  $\{\theta_2, r_2\}$  elemre, ha  $r_1$  és  $r_2$   $\mathfrak{N}$ -ben vannak:

$$\{\theta_1, r_1\} \cdot \{\theta_2, r_2\} = \{\theta_1 + \theta_2 + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2\}. \quad (2.11)$$

Amint az könnyen igazolható, a (2.6) definíciós reláció ekvivalens erre a szorzásra az asszociatív törvénnyel.  $H$   $\bar{e}$  egységeleme  $\{0, e\}$  [l. (2.7)], és  $\{\theta, r\}$  inverze  $\{-(\theta + \xi(r, r^{-1})), r^{-1}\}$ , ha  $r$  és  $r^{-1}$   $\mathfrak{N}$ -be tartoznak [l. (2.7a)].

A  $\bar{i}(\theta) = \{\theta, e\}$  elemek egy lokális egy-paraméteres  $T$  alcsoportot alkotnak, amely  $H$  centrumához tartozik, és  $H$  minden  $\{\theta, r\}$  eleme egyértelműen kifejezhető a  $\bar{i}(\theta) \cdot \{0, r\} = \{0, r\} \cdot \bar{i}(\theta)$  alakban. (2.11)-ből következik, hogy a  $H/T$  faktor csoport lokálisan izomorf  $G$ -vel.

$G$  (2.11) alakú lokális csoport kiterjesztései hasznos eszközt fognak szolgáltatni  $G$  lokális exponenseinek vizsgálatában. Figyelmünket a  $H$  lokális csoportra összpontosítva Schurt követjük [10].

*Izomorf csoport-kiterjesztések.* Legyen  $\xi$  és  $\xi'$  két ekvivalens lokális exponens, és legyen  $\xi' = \xi + \Delta[\xi]$   $\mathfrak{N}_1$ -en. Ekkor a megfelelő [(2.11) által definiált]  $H$  és  $H'$  lokális csoportok lokálisan izomorfak. Jelölje  $\bar{r} = \{\theta, r\}$ ,  $\bar{r}' = \{\theta', r'\}$   $H$ , illetve  $H'$  elemeit. Egy  $\bar{r}' = f(\bar{r}) (r \in \mathfrak{N}_1^2)$  izomorf leképezést a

$$\theta' = \theta - \xi(r), \quad r' = r \quad (2.12)$$

összefüggés ad, úgyhogy  $f(\bar{r}_1)f(\bar{r}_2) = f(\bar{r}_1 \bar{r}_2)$ , ha  $r_1, r_2 \in \mathfrak{N}_1$ . Azt is mondhatjuk, hogy (2.12) a  $H$  lokális csoportnak egy másik parametrizációját adja.

Jegyezzük meg azt is, hogy a  $\xi$ -re megalkotott  $H$  lokális csoport lokálisan izomorf tetszőleges  $H'$   $\xi' = \gamma\xi$ -re alkotott csoporttal, ahol  $\gamma$  egy nullától különböző konstans. Izomorf leképezést ad  $\bar{r}' = \{\theta', r'\} = h(\bar{r})$ , ahol

$$\theta' = \gamma\theta, \quad r' = r, \quad (2.13)$$

ha  $\xi$ -t  $\mathfrak{N}$ -n definiáltuk.



### 3. §. A teljes csoporton definiált tényezők és exponensek

Ebben a részben a *teljes*  $G$  csoporton. ( $\mathfrak{R}=G$  mellett) definiált tényezőkkel és exponensekkel foglalkozunk, és megtárgyaljuk ezeknek a lokális tényezőkkel és exponensekkel való kapcsolatát egy egyszeresen összefüggő  $G$  csoport esetén.

3a) *Adott  $\omega$  tényezővel kompatibilis sugár-ábrázolások léte.* Ha  $G$  egy folytonos sugár-ábrázolásához kiválasztható az ábrázoló operátorok megengedett halmaza az egész csoporton (és nem csak egységeleméhez közel), egy  $\omega$  tényező definiált mindenütt  $G$ -n. Megfordítva, egy adott, a teljes  $G$  csoporton definiált  $\omega$  tényezőhöz konstruálható egy avval kompatibilis, folytonos sugár-ábrázolás, azaz az  $U_r$  operátorok erősen folytonos családja, amely eleget tesz (2.1)-nek. [Az  $U_r$  sugár az összes  $\tau U_r(|\tau|=1)$  operátorokból áll, (2.1) egyenlet implikálja, hogy  $U_r U_s = U_{rs}$  és  $U_r$  folytonosságából következik  $U_r$ -é.]

Mivel az ábrázolás megalkotása csoportintegrálást kíván, fel kell azonban tennünk, hogy létezik  $G$ -n egy invariáns mérték, ami bizonyosan igaz egy Lie-csoportnál, sőt általánosabban bármilyen lokálisan kompakt csoportnál. (Vö. Weyl [12].)

Az eljárás a következő. Jelöljük  $dt$ -vel a bal-invariáns integrálást  $G$ -n, és válasszuk  $\mathfrak{H}$ -t az összes  $\overline{f(t)}$   $G$ -n négyzetesen integrálható függvények rendszereként, úgyhogy  $(f, g) = \int_G \overline{f(t)} g(t) dt$ . Defináljuk most egy adott  $\omega(r, s)$  tényezőhöz  $g = U_r f$ -t a következő egyenlettel:

$$g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t) \quad \text{vagy} \quad g(rt) = \omega(r, t) f(t). \quad (3.1)$$

Az  $U_r$  operátorokra ezt kapjuk:

1.  $U_r$  unitér, mivel létezik inverze [amelyet  $f(t) = \overline{\omega(r, t)} g(rt)$  definiál], izometrikus, mivel  $|g(t)| = |f(r^{-1}t)|$  és ennél fogva

$$\int_G |g(t)|^2 dt = \int_G |f(r^{-1}t)|^2 dt = \int_G |f(t)|^2 dt.$$

2.  $U_e = 1$ , mivel  $\omega(e, t) = 1$ . [A bizonyítás ugyanaz, mint (2.7)-nél.]

3.  $U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}$ . Legyen  $g = U_s f$  és  $h = U_r g = U_r U_s f$ . Akkor (3.1)-ből  $h(r(st)) = \omega(r, st) g(st) = \omega(r, st) \omega(s, t) f(t)$ . (2.3)-ból  $h((rs)t) = \omega(r, s) \omega(rs, t) f(t)$ , vagyis  $h = \omega(r, s) U_{rs} f$ , q.e.d.

4. Az  $U_r$  operátorok erősen folytonosak  $r$ -ben. Helyettesítsük (3.1)-be  $g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f_1(t)$ -t,  $f_1 = V_r f$ . Amint azt jól tudjuk, a  $G$  reguláris ábrázolását definiáló  $V_r$  operátorok erősen folytonosak  $r$ -ben, és az  $\omega(r, r^{-1}t)$ -vel való szorzás nem érinti ezt a tulajdonságot. Ez bizonyítja a

3.1. TÉTEL-t. *A lokálisan kompakt  $G$  csoportnak minden  $\omega$  tényezőjéhez létezik  $G$ -nek egy  $\omega$ -val kompatibilis folytonos sugár-ábrázolása.*

3b) *Egyszeresen összefüggő csoportok ábrázolásairól.* A § hátralevő részében mindig feltesszük, hogy  $G$  lokálisan összefüggő anélkül, hogy említenénk ezt a minden Lie-csoportra természetesen fennálló feltételt.

Pillanatnyilag *közönséges* és nem sugár-ábrázolásokkal foglalkozunk. Hogy a lokális tulajdonságokat ( $G$  egységelemének közelében) az egész csoporton érvényes



tulajdonságokkal összefüggésbe hozzuk,  $G$ -ről feltesszük, hogy összefüggő. (Az ortogonális csoport esetén ez valódi ortogonális transzformációkra korlátoz (melyeknek determinánsa 1), a Lorentz-csoport esetén 1 determinánsú Lorentz-transzformációkra, amelyek megőrzik az idő irányát.)

Amint azt jól tudjuk, egy  $G$  összefüggő csoport minden  $r$  eleme kifejezhető egy rögzített (tetszőlegesen kiválasztott)  $\mathfrak{M}$  környezet  $r_i$  elemeinek véges szorzataként:

$$r = r_1 r_2 \dots r_n \quad (r_i \in \mathfrak{M}). \quad (3.2)$$

*Definíció.* Egy  $G$  csoport  $\mathfrak{N}$  környezetén definiált lokális unitér ábrázolása  $\mathfrak{N}^2$  leképezése  $V_r (r \in \mathfrak{N}^2)$  unitér operátorokra, úgy hogy  $V_r V_s = V_{rs}$ , ha  $r$  és  $s$   $\mathfrak{N}$ -ben vannak. ( $V_r$ -re nem kötünk ki folytonossági feltételt.)

Ha  $G$  azon túlmenően, hogy összefüggő, még *egyszeresen összefüggő* is, egy lokális ábrázolás mindig kiterjeszthető a teljes csoport ábrázolásává. A döntő tény a következő: Egy egyszeresen összefüggő  $G$  csoport minden lokális ábrázolásához létezik egy  $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N}$  környezet, amelyen

$$V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_n} = V_{r'_1} V_{r'_2} V_{r'_m} \quad (r_i \in \mathfrak{N}^*, r'_i \in \mathfrak{N}^*), \quad (3.3)$$

ha  $r_1 r_2 \dots r_n = r'_1 r'_2 \dots r'_m$ . (Vö. Pontrjagin, [63. tétel. A leképezés folytonossága, amit Pontrjagin feltételez, nem lényeges.)

**3.1. LEMMA.** *Egy összefüggő és egyszeresen összefüggő  $G$  csoport  $\mathfrak{N}$ -n definiált  $V_r$  lokális unitér ábrázolásához létezik a teljes  $G$  csoport  $W_r$  egyértelműen meghatározott unitér ábrázolása, amely megegyezik a lokális ábrázolással egy  $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N}$  környezeten.  $W_r$  erősen folytonos, ha a lokális ábrázolás erősen folytonos.*

(Ez lényegében véve Pontrjagin [9] 63. tételének speciális esete. Mivel  $W$  megalkotását a 3c §-ban fel fogjuk használni, felidézük a bizonyítást.)

1. Legyen  $W_r$   $G$ -nek egy ábrázolása, amely megegyezik  $V_r$ -rel egy  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$  környezeten. Ha  $r$ -t (3.2) alakban fejezzük ki, akkor  $W_r = W_{r_1} W_{r_2} \dots W_{r_n}$ , és mivel  $\mathfrak{M}$ -en  $W_{r_i} = V_{r_i}$ ,

$$W_r = V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_n} \quad (r = r_1 \dots; r_i \in \mathfrak{M}) \quad (3.4)$$

2.  $W_r$  *unicitása*. Legyen  $W'_r$  egy második ábrázolás, amely megegyezik  $V_r$ -rel  $\mathfrak{M}'$ -n és válasszuk  $\mathfrak{M}_1$ -et úgy, hogy  $\mathfrak{M}_1 \subset (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')$ . (3.4)-t  $\mathfrak{M}$  helyett  $\mathfrak{M}_1$ -re alkalmazva ugyanazt az összefüggést kapjuk  $W_r$ -re és  $W'_r$ -re.

3.  $W_r$  *egzisztenciája*. (3.4) felhasználható  $W_r$  definiálására ( $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{M}$  mellett), mivel (3.3) szerint a (3.4)-ben szereplő szorzat csak  $r$ -től függ, de független annak  $r_i$  tényezőkre bontásától. Konkrétan,  $V_r = W_r$ , ha  $r \in \mathfrak{N}^*$ . Az ábrázolási tulajdonság egy közvetlen következmény. Legyen  $r = r_1 \dots r_n$ ,  $s = s_1 \dots s_m$ . Akkor  $rs = r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m$  és így  $W_{rs} = V_{r_1} \dots V_{r_n} V_{s_1} \dots V_{s_m} = W_r W_s$ .

4.  $V_r$  erős folytonossága  $W_r$  erős folytonosságát vonja maga után, mert ha  $r$  és  $s$  eléggé közel vannak, úgy hogy  $r^{-1}s \in \mathfrak{N}^*$ , minden  $f$  vektorra azt kapjuk:

$$\|(W_s - W_r)f\| = \|W_r(W_{r^{-1}s} - 1)f\| = \|(W_{r^{-1}s} - 1)f\| = \|V_{r^{-1}s} - 1\| \|f\|,$$

ami bizonyítja az állítást.



$G$  közönséges ábrázolások által indukált sugár-ábrázolásai.  $G$  tetszőleges erősen folytonos unitér ábrázolásából származtatható egy egyértelműen meghatározott folytonos sugár-ábrázolása ( $U_r$  az operátorsugár, amely tartalmazza  $U_r$ -t), amelyről azt mondjuk, hogy az  $U_r$  ábrázolás indukálta. Az  $U_r$  ábrázoló operátorokra az  $\omega$  tényező egységnyi és ennél fogva a sugárábrázolás bármely lokális tényezője egyenlő 1-gyel.

A 3.1. Lemma következményeként kapjuk a

**3.2 TÉTEL-t.** Egy összefüggő és egyszeresen összefüggő  $G$  csoport bármely folytonos  $U_r$  sugár-ábrázolását, melynek lokális tényezője 1,  $G$ -nek egy  $U_r$  erősen folytonos unitér ábrázolása indukál.

*Bizonyítás.* Feltevésünk szerint létezik az ábrázoló operátorok  $U_r \in U_r (r \in \mathfrak{R}^2)$  megengedett halmaza, úgyhogy  $U_r U_s = U_{rs} (r, s \in \mathfrak{R})$  vagyis  $U_r$  lokális ábrázolása  $G$ -nek. Legyen  $U'_r (r \in G)$   $G$ -nek (3.4) szerint konstruált ábrázolása ( $U_r = V_r, U'_r = W_r$  helyettesítéssel). Már csak azt kell megmutatni, hogy  $U'_r \in U_r$  minden  $r$ -re (3.4) alapján  $U'_r \in U_{r_1} \dots U_{r_n} = U_r$ , q. e. d.

[E tételnek fontos alkalmazásai vannak, mivel sok csoportnál minden (2.2) és (2.3) által definiált lokális tényező egységnyi.] (L. a 6., 7. §-t.)

*Korollárium.* Egy  $G$  összefüggő és egyszeresen összefüggő csoport bármely véges dimenziós ábrázolását  $G$  egy folytonos unitér ábrázolása indukálja.

*Bizonyítás.* Ebben az esetben minden lokális tényező értéke 1. (L. 2b. §)  
(Ez egy jól ismert eredmény. Vö. Weyl [13], 183—184. old.)

3c) *A lokálisan választott ábrázoló operátorok kiterjesztése.* Egy  $G$  csoport folytonos sugár-ábrázolásához nem mindig lehetséges folytonosan kiterjeszteni az ábrázoló operátoroknak egy  $\mathfrak{R}$  környezetben definiált megengedett halmazát a teljes  $G$  csoporton definiált halmazára. Azonban összefüggő és egyszeresen összefüggő halmazokra fennáll a következő tétel.

**3.3. TÉTEL.** Legyen  $G$  egy összefüggő és egyszeresen összefüggő csoport,  $\omega$  a teljes csoporton definiált tényező és  $U_r$  egy olyan folytonos sugár-ábrázolás, hogy az alkalmasan választott  $U_r$  megengedett ábrázoló operátor halmaza által definiált lokális tényező megegyezik  $\omega$ -val valamilyen  $\mathfrak{R}$  környezetben. Ez esetben létezik az ábrázoló operátoroknak egy olyan egyértelműen definiált  $U'_r$  halmaza az egész csoportra, amelyre  $U'_r U'_s = \omega(r, s) U'_{rs}$  minden  $r$ -re és  $s$ -re és  $U'_r = U_r$  valamilyen  $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}$  környezetben.

*Bizonyítás.* 1. Mivel  $G$  összefüggő és egyszeresen összefüggő, az  $e^{i\xi(r,s)} = \omega(r, s)$  egyenletnek egyetlen  $\xi(r, s)$  folytonos megoldása van (az összes  $G$ -beli  $r, s$ -ekre), amely eleget tesz a (2.5) és (2.6) feltételeknek, és ennél fogva  $G$ -nek egy exponense. Ez esetben  $H$  (vö. 2d §) szintén egy összefüggő és egyszeresen összefüggő csoport. Alkalmazzuk most a 3.1. Lemmát  $H$ -ra. Legyen  $\bar{r} = \{\theta, r\}$ ,  $V_{\bar{r}} = V(\theta, r) = e^{i\theta} U_r (r \in \mathfrak{R}^2)$ . (2.10) és (2.11) szerint  $V_{\bar{r}}$  egy lokális unitér ábrázolása  $H$ -nak az  $\mathfrak{M}(-\infty < \theta < \infty, r \in \mathfrak{R})$  környezetén definiált. A (3.4) definíció alapján  $H$ -nak egy  $W_r = W(\theta, r)$  erősen folytonos unitér ábrázolását kapjuk, amely megegyezik  $V_{\bar{r}}$ -rel valamilyen  $\mathfrak{M}^*$ -on.  $\mathfrak{M}^*$  bizonyosan tartalmaz egy  $\mathfrak{M}'(-c < \theta < c, r \in \mathfrak{R}^*)$  környezetet  $c$  és  $\mathfrak{R}^*$  megfelelő választása ( $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}$ ) esetén. Minden  $\theta$ -ra  $\{\theta, e\} = \{\theta_1, e\}^n$ , ahol



$\theta_1 = \theta/n$ ,  $|\theta_1| < c$ . Így (3.4) alapján  $W(\theta, e) = (V(\theta_1, e))^n = e^{i\theta}$ .<sup>1</sup> 1. Legyen most  $U'_r = W(0, r)$  minden  $r$ -re. Mivel  $\{\theta, r\} = \{\theta, e\} \cdot \{0, r\}$ ,

$$W(\theta, r) = e^{i\theta} U'_r \quad (3.5a)$$

minden  $r$ -re, és  $U'_r = U_r$ , ha  $r \in \mathfrak{N}^*$ . Továbbá  $\{0, r\} \cdot \{0, s\} = \{\xi(r, s), rs\}$ , úgyhogy

$$U'_r U'_s = e^{i\xi(r, s)} U'_{rs} = \omega(r, s) U'_{rs} \quad (r, s \in G). \quad (3.5b)$$

4. Annak kimutatására, hogy  $U'_r \in U_r$ , legyen  $r = r_1 \dots r_n$  ( $r_k \in \mathfrak{N}^*$ ). Világos, hogy  $U'_{r_k} \in U_{r_k}$ . (3.5b) szerint  $U'_{rs} \in U_{rs}$ , ha  $U'_r \in U_r$ ,  $U'_s \in U_s$ . Ebből indukcióval következik:  $U'_r \in U_{r_1} \dots U_{r_n} = U_r$ .

5. Bármely a kívánt tulajdonságokkal rendelkező  $U'_r$  (3.5) és (2.10) alapján  $H$ -nak egy  $W(r)r = e' U'_r$  ábrázolását definiálja és így tekintetbe véve a 3.1. Lemmát, egyértelműen meghatározott.<sup>2</sup>

### 3d) A lokális exponensek kiterjesztése.

**Definíció.**  $G$  egy  $\xi_1$  exponense  $G$   $\xi$  lokális exponensének kiterjesztése, ha  $\xi_1(r, s) = \xi(r, s)$  valamilyen környezetén.

**3.4. TÉTEL.** Legyen  $\xi$  és  $\xi'$  két ekvivalens lokális exponense egy  $G$  összefüggő és egyszeresen összefüggő csoportnak, úgy hogy  $\xi' = \xi + \Delta[\xi]$  valamilyen környezetén, és tegyük fel, hogy  $G$   $\xi_1$  és  $\xi'_1$  exponensei,  $\xi$  illetve  $\xi'$  kiterjesztései. Akkor minden  $r, s \in G$ -re  $\xi'_1(r, s) = \xi_1(r, s) + \Delta_{r, s}[\xi_1]$ , ahol  $\xi_1(r)$  folytonos  $r$ -ben és  $\xi_1 = \xi$  egy  $\mathfrak{N}^*$  környezetén.

**Bizonyítás.** A két  $\xi_1$  és  $\xi'_1$  exponens két teljes összefüggő és egyszeresen összefüggő  $H_1$  és  $H'_1$  csoportot definiál ( $\bar{r}$ , ill.  $\bar{r}'$  elemekkel), amelyekre a csoport szorzást (2.11) adja. A (2.12) egyenlet  $H_1$ -nek az  $\bar{r}' = f(\bar{r})$  lokális izomorf leképezését definiálja  $H'_1$ -re:

$$f(\bar{r}) = f(\theta, r) = \{\theta - \xi(r), r\}, \quad (r \in \mathfrak{N}_1^2), \quad (3.6)$$

ha úgy választottuk  $\mathfrak{N}_1$ -t, hogy a  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi'_1 = \xi'$  és  $\xi' = \xi + \Delta[\xi]$  teljesülnek rajta. (3.6) egyértelműen kiterjeszthető az  $f_1(\bar{r}) = f_1(\theta, r) = \bar{r}'$  izomorfizmussá, az egész  $H_1$  és  $H'_1$  csoporton úgy, hogy  $f_1(\bar{r}) = f(\bar{r})$   $H_1$ -en valamilyen  $\mathfrak{N}^*(-c < \theta < c, r \in \mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N})$  környezetén (Pontrjagin, 63. tétel). Mint a 3.3. Tétel bizonyításában, (3.6)-ból azonnal adódik, hogy  $f_1(\theta, e) = \{\theta, e\}$  minden  $\theta$ -ra. Legyen  $f_1(0, r) = \{-\xi_1(r), g(r)\}$ , ahol  $\xi_1(r)$  folytonos függvénye  $r$ -nek és  $g(r)$   $G$ -nek egy meghatározandó eleme. A  $\{\theta, r\} = \{\theta, e\} \cdot \{0, r\}$  egyenletből következik, hogy  $f_1(\theta, r) = \{\theta - \xi_1(r), g(r)\}$ .

$f_1(0, r)f_1(0, s)$  számolásakor azt találjuk, hogy  $g(rs) = g(r)g(s)$ , és mivel  $g(r) = r$ , ha  $r \in \mathfrak{N}^*$  [l. (3.6)], ebből látható, hogy  $g(r) = r$  minden  $r$ -re. Így

$$f_1(\bar{r}) = f_1(\theta, r) = \{\theta - \xi_1(r), r\}$$

minden  $r \in H_1$ -re. Végül

$$f_1(0, r)f_1(0, s) = f_1(\xi_1(r, s), rs).$$

<sup>2</sup> Ha  $G$  nem egyszeresen összefüggő, a tétel két dologban mondhat csődöt. 1. Előfordulhat, hogy (3.5b) ellenére sem lehetséges az ábrázoló operátoroknak bármiféle folytonos halmazát kiválasztani a teljes csoporton. 2. Előfordulhat, hogy (3.5b) nem teljesül még akkor sem, ha nem is kötjük ki  $U_r$  folytonosságát. Mindkét eset fennáll a forgáscsoport „kétértékű” ábrázolásainál.



Így

$$\{\xi'_1(r, s) - \xi_1(r) - \xi_1(s), rs\} = \{\xi_1(r, s) - \xi_1(rs), rs\}$$

úgyhogy  $\xi'_1 = \xi_{,1} + \Delta[\xi_1]$  az egész csoporton, és (3.6)-ból  $\xi_1(r) = \xi(r)$  minden  $r \in \mathfrak{R}^*$ -ra q. e. d.

3e) *G-nek a fedőcsoportja sugár-ábrázolásaiból leszármaztatott sugár-ábrázolásai.* Tegyük fel, hogy  $G$  összefüggő és eleget tesz a feltételeknek, amelyek a  $G^*$  fedőcsoportjának klasszikus megalkotásához szükségesek (ez biztosan igaz minden Lie-csoportra; vö. Pontrjagin, 47. §).  $G^*$  egyszeresen összefüggő;  $G$  lokálisan izomorf  $G^*$ -gal, és izomorf a  $G^*/N$  faktorcsoporthal, ahol  $NG^*$ -nak egy diszkrét centrális invariáns alcsoportja.  $G^* = G$  akkor és csak akkor igaz, ha  $G$  maga egyszeresen összefüggő.

$G$  és  $G^*$  lokális izomorfizmusa azt implikálja, hogy az egységelem alkalmas környezetén  $G$  és  $G^*$  lokális tényezői (vagy exponensei) megegyeznek, ha  $G$  és  $G^*$  csoportelemeit azonosítjuk.

$G$  és  $G^*/N$  izomorfizmusából következik, hogy  $G$  minden ábrázolása (sugár-ábrázolása) egyidejűleg ábrázolása (sugár-ábrázolása) a  $G^*$  fedőcsoportnak. Ennélfogva  $G$  sugár-ábrázolásainak keresésekor elegendő  $G^*$  azon sugár-ábrázolásait kiválasztani, amelyek  $N$  minden elemét az egységsugárra képezik le.

Annak, hogy inkább  $G^*$ -gal dolgozunk, mint  $G$ -vel, az a fő előnye, hogy a 3b, c, d) §-ok eredményei érvényesek az egyszeresen összefüggő  $G^*$  csoportra, de általában nem érvényesek a  $G$  csoportra magára.

Az 5. §-ban ki fogjuk mutatni, hogy egy összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport minden lokális exponense kiterjeszthető az egész csoporton definiált exponensre. Ezen eredményre számítva jellemezni tudjuk egy adott  $G$  Lie-csoport összes sugár-ábrázolásainak felkutatásához szükséges lépéseket a következőkben.

1. Határozzuk meg  $G$  (vagy a  $G^*$  fedőcsoportja) összes  $\xi$  lokális exponenseit. Elegendő a nem-ekvivalens  $\xi$ -k teljes rendszerét meghatározni, vagyis mindegyik ekvivalencia osztályból egyet.

2. Határozzuk meg a lokális exponensek  $\xi_1$  kiterjesztéseit  $G^*$ -on. A 3.4. Tétel szerint  $G$  vagy  $G^*$  lokális exponenseinek minden ekvivalencia osztályának megfelel  $G^*$  exponenseinek egy ekvivalencia osztálya, és ezzel a  $H_1^*$  csoportok osztálya, amelyek egymásközi kapcsolatát (3.6) alakú izomorf leképezés fejezi ki. Megint elegendő ezen izomorf csoportok közül egyet meghatározni.

3. Határozzuk meg  $H_1^*$  összes (3.5a) alakú folytonos unitér ábrázolásait. Mind-egyikből származtatható  $G^*$  egy sugár-ábrázolása. (L. 3.3. Tételt.) (A 3.1. Tétel szerint a lokális exponensek minden ekvivalencia osztálya ténylegesen elő fog fordulni.)

4. Keressük meg  $G^*$  azon sugár-ábrázolásait, amelyek  $N$ -t az egységsugárra képezik le. (Az  $N$  invariáns alcsoport a  $G^* \rightarrow G$  homomorf leképezés magja.)

A sugár-ábrázolások speciális problémáit 1., 2. tartalmazza és még 4. is annyiban, hogy a  $\xi$  lokális exponenseknek  $G$  egy sugár-ábrázolásával kompatibilis rendszere jelentősen kisebb lehet, mint a  $G^*$  sugár-ábrázolásaiban szereplő  $\xi$  halmaz (l. 7. §). 3. viszont inkább valódi csoportábrázolás-elméleti probléma.

A következőkben főleg 1.-gyel foglalkozunk, vagyis Lie-csoportok lokális exponenseinek általános analízisével. Azoknál a csoportoknál, amelyekkel részletesen foglalkozunk, sem 2. sem 4. nem fog nehézséget okozni.



*Megjegyzés.* Egy  $H$  csoport minden  $W(\bar{r})$  irreducibilis folytonos unitér ábrázolása (amelyet  $G$  egy exponenséből alkottunk)  $G$ -nek egy sugár-ábrázolását definiálja. Az ábrázoló operátorok legyenek  $W(\bar{r})=W(\theta, r)$ . Mivel a  $\{\theta, e\}$  elemek  $H$  centrumában vannak, a  $W(\theta, e)$  operátorok minden  $W(\bar{r})$ -rel kommutálnak, és amint az egyszerűen látható,  $W(\theta, e)=e^{i\gamma\theta} \cdot 1$  alakúak. ( $\gamma$  egy valós konstans). Mint a 3.3.Tétel bizonyításánál, azt találjuk, hogy  $W(\theta, r)=e^{i\gamma\theta} U'_r$ , és  $U'_r U'_s = e^{i\gamma\zeta(r,s)} U'_{rs}$ . Így csak azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a sugár-ábrázolás bármelyik exponense  $\gamma\zeta$  ekvivalencia osztályába tartozik (ahol  $\gamma$  egy állandó). Ez a (2.13) izomorfizmus következménye.

#### 4. §. Lie-csoportok lokális exponensei

Ha  $G$  egy Lie-csoport, a lokális exponensei nehézség nélkül analizálhatók meglehetősen részletesen. Mivel  $G$  lokális struktúráját egyértelműen meghatározza annak  $\mathfrak{g}$  Lie-algebrája (vagy a struktúra-állandói), ugyanez érvényes a lokális exponenseire. A következőképpen járunk el. K. Iwasawa elegáns felépítését alkalmazva először megmutatjuk, hogy minden  $\xi(r, s)$  lokális exponens ekvivalens egy olyan  $\xi'(r, s)$  lokális exponenssel, amely valamilyen  $\mathfrak{N}$  környezetben  $r$  és  $s$  szerint folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik minden rendben. Egy ilyen exponensre a 2d) §-ban definiált  $H$  lokális csoport egy lokális Lie-csoport és a jól ismert technikával kezelhető. A lokális exponensek klasszifikációja ilyenkor nagyrészt algebrai (lineáris) probléma.

4a) *Előzetes megjegyzések a Lie-csoportokról.* (Vö. Pontrjagin, VI. és IX. fejezetek.) Egy  $G'$   $n$ -dimenziós lokális Lie-csoport az  $r$  elemek olyan rendszere, amely egy-egyértelmű megfeleltetésbe hozható egy  $n$ -dimenziós valós euklideszi tér origója körüli nyitott gömb pontjaival. Így  $G'$  minden  $r$  eleme azonosítható egy  $q^1, \dots, q^n$  koordinátákkal jellemzett ponttal, feltéve, hogy mondjuk  $|r| = \left( \sum_{i=1}^n (q^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < c$ , és  $G'$  topológiája az euklideszi tér szokásos topológiája,  $G'$  egységeleme,  $e$  az origó ( $q^1 = q^2 = \dots = q^n = 0$ ), és fogjuk 0-val is jelölni. Az összes előforduló környezetekről fel fogjuk tételezni, hogy azok az origó körüli nyitott gömbök. A  $t=rs$  csoport-szorozást az  $r, s$  elemekre valamilyen  $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{N}_0: |r|, |s| < c)$  környezetben a következő nyílt halmazt definiálja:

$$\tau^i = f^i(q^1, \dots, q^n; \sigma^1, \dots, \sigma^n) = f^i(r, s) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4.1)$$

(ahol  $q^i, \sigma^i, \tau^i$   $r, s, t$  koordinátái), úgyhogy  $t \in \mathfrak{S}$ . Feltesszük, hogy az  $f^i$  függvények folytonos parciális deriváltakkal rendelkeznek egészen a harmadik rendig (kevésbé szigorú feltétel is elég lenne), és hogy az  $(rs)t=r(st)$  asszociatív törvény érvényes, ha  $rs$  és  $st$   $\mathfrak{N}_0$ -ban vannak, és hogy  $er=re=r(r \in \mathfrak{N}_0)$ , minélfogva

$$\partial f^i(e, e)/\partial q^j = \partial f^i(e, e)/\partial \sigma^j = \delta_j^i. \quad (4.1a)$$

Bármilyen  $r$  elem  $r^{-1}$  inverzének létezése egy elegendően kis környezetben a fenti feltevésekből következik. (Minden Lie-csoportnál az egységelem körül megfelelően választott nyílt halmaz természetesen egy lokális Lie-csoport.)



$G'$  lokális egy-paraméteres alcsoportjai.  $G'$  lokális egy-paraméteres alcsoportja egy  $r(\tau)$  ( $|\tau| < \gamma$ ) folytonos görbe  $\mathfrak{N}_0$ -ban úgy, hogy  $r(\tau_1)r(\tau_2) = r(\tau_1 + \tau_2)$ , ha  $-\gamma < \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2 < \gamma$ .

*Kanonikus környezetek.* Kezdetből fogva feltesszük, hogy a  $q^k$ -k kanonikus koordináták  $\mathfrak{N}_0$ -ban (vö. Pontrjagin, 39. §), és így  $\mathfrak{N}_0$  egy kanonikus környezet. A kanonikus koordinátákat avval a tulajdonságukkal definiáljuk, hogy minden  $r(\tau) = \tau a$   $\mathfrak{N}_0$ -beli görbe (ahol  $a$  egy konstans vektor), vagyis  $q^k(\tau) = \tau \alpha^k$  ( $\alpha^k$  állandó) egy lokális egy-paraméteres alcsoport. (A  $\gamma$  konstans úgy kell választani, hogy  $\gamma|a| \leq \kappa_0$  legyen.) Egyébként minden  $\mathfrak{N}_0$ -beli  $r$ -nek van ott inverze, vagyis  $r^{-1} = -r$ .

Jól ismert tény, hogy  $\mathfrak{N}_0$ -ban minden lokális egy-paraméteres alcsoport  $r(\tau) = \tau a$  alakú. Továbbá kanonikus koordinátákra az  $f^i$  függvények (4.1)-ben analitikusak (vagyis abszolút konvergens hatványsorok)  $e$ -nek egy alkalmasan választott környezetében, amelyről feltesszük, hogy tartalmazza  $\mathfrak{N}_0$ -t.  $q^k$ -val kifejezve az összes kanonikus koordinátarendszereket  $q'^k = \sum_{j=1}^n \beta_j^k q^j$  (valamilyen  $\mathfrak{N}$  környezeten érvényes) egyenletek definiálják tetszőleges nem-eltűnő determinánsú konstans  $\beta$  koefficiensekkel.

4b)  $A$  g Lie-algebra. Kanonikus koordinátákban  $G'$  g Lie-algebrája (vagy infinitezimális csoportja) azon  $a$  vektorok  $n$ -dimenziós valós vektortereként írható le, amelyek  $G'$  lokális egy-paraméteres alcsoportjait generálják. A vektor-összeadás és a valós skalárral szorzás műveletének a szokásos jelentést tulajdonítjuk. Ezenkívül g-n az  $[a, b]$  („zárójel”) binér műveletet is definiáljuk, amely tetszőleges  $a, b \in g$  rendezett párhoz egy vektort rendel, amely lineáris  $a$ -ban, és  $b$ -ben antiszimmetrikus, vagyis

$$[a, b] = -[b, a]. \quad (4.2)$$

és amely eleget tesz a Jacobi-azonosságnak

$$[[a, a'], a] + [[a', a''], a] + [[a'', a], a'] = 0 \quad (4.3)$$

bármilyen  $a, a', a''$  három elemre g-ben.

Legyen két adott  $a, b \in g$ -re  $r(\tau) = \tau a$  és  $s(\tau) = \tau b$  két lokális egy-paraméteres alcsoport. Jelöljük  $q(r, s)$ -sel az  $rs^{-1}s^{-1}$  kommutátort. Elegendően kis  $\tau$ -ra ( $\tau \neq 0$ )  $q(\tau a, \tau b)$  definiált (és  $\mathfrak{N}_0$ -ban van) és

$$[a, b] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} q(\tau a, \tau b) \quad (4.4)$$

vagyis  $[a, b]$   $i$ -edik komponense  $\tau^{-2} q(\tau a, \tau b)$   $i$ -edik komponensének határértéke.

A „zárójel”-et elegendő az  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $n$  elemű lineárisan független vektor rendszer tetszőleges két  $a_i, a_j$  elemére definiálni, amelyek g-nek egy bázisát alkotják. Akkor

$$[a_i, a_j] = \sum_{m=1}^n c_{ij}^m a_m, \quad (4.5)$$

ahol a  $c_{ij}^m$ -k  $G'$  struktúraállandói. (4.2)-ből

$$c_{ij}^m = -c_{ji}^m \quad (4.6)$$



és a (4.4) Jacobi-azonosság  $a_i, a_j, a_k$ -ra alkalmazva

$$J_{kij}^l = \sum_{m=1}^n (c_{mk}^l c_{ij}^m + c_{mi}^l c_{jk}^m + c_{mj}^l c_{ki}^m) = 0 \quad (4.7)$$

összefüggésre vezet.

*Standard bázis.* A kanonikus koordináták adott rendszeréhez válasszuk  $a_i$ -t olyan vektorként, amelynek  $i$ -edik komponense 1 és  $j$ -edik komponense 0 ( $j \neq i$ ). Erre a standard bázisra a struktúra-állandók:

$$c_{ij}^m = \left( \frac{\partial^2 f^m}{\partial q^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 f^m}{\partial q^j \partial \sigma^i} \right)_{[q^k = \sigma^k = 0]} \quad (4.8)$$

(4.1)  $f^i(r, s)$  függvényeivel kifejezve. A (4.8) egyenlet igaz marad, ha a  $q^i$  kanonikus koordinátákat tetszőleges  $q'^i = \Phi^i(q^1, \dots, q^n)$  koordinátákkal helyettesítjük, feltéve, hogy a  $\Phi^i$  függvények folytonos második parciális deriváltakkal rendelkeznek és  $\partial \Phi^i / \partial q^j = \delta_j^i q^1 = \dots = q^n = 0$  esetén.

*G' megalkotása a Lie-algebrából.* Adott, a (4.6) és (4.7) egyenleteket kielégítő  $c_{ij}^m$  konstansokhoz egy  $G'$  lokális Lie-csoport alkotható, amelynek konstansai a  $c_{ij}^m$ -k egy kanonikus koordináta-rendszer standard bázisára vonatkoztatva. Továbbá a (4.1)-ben szereplő  $f^i(r, s)$ -ek a  $q, \sigma$  kanonikus koordináták függvényeként egyértelműen meghatározottak az egységelem elég kis környezetén.

4c) *Differenciálható lokális exponensek.* A 4. § további részében  $G$  egy adott Lie-csoportot jelöl,  $\mathfrak{N}_0$  pedig egy adott kanonikus környezetet  $G$ -n. Először kimutatjuk, hogy  $G$  minden  $\xi(r, s)$  lokális exponense ekvivalens egy differenciálható exponenssel, ahol a „differenciálható függvény” annak rövid kifejezése, hogy egy függvény valamilyen  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_0$  környezetben minden rendű folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik a csoportelemeknek azon kanonikus koordinátaiban, amelyektől függ.

Legyen most  $\xi$  egy lokális exponens, amely  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_0$ -ra definiált és rögzített, és válasszunk két olyan  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$  környezetet, hogy  $\mathfrak{N}_1^2 \subset \mathfrak{N}, \mathfrak{N}_2^2 \subset \mathfrak{N}_1$ . Jelöljük  $G$ -n a bal, ill. jobb invariáns integrálást  $dr$ -rel, ill.  $d^*r$ -rel, és vezessünk be két  $v(r)$  és  $v^*(r)$  valós függvényt a következő tulajdonságokkal: 1.  $v$  és  $v^*$  differenciálhatók  $\mathfrak{N}$ -n. 2.  $v$  és  $v^*$  eltűnik az  $\mathfrak{N}_2$ -beli  $\mathfrak{N}_3(|r| < \mu)$  szferikus környezeten kívül. 3.  $\int_G v(r) d(r) =$

$$= \int_G v^*(r) d^*r = 1. \text{ (Megjegyezzük, hogy a két integrál ténylegesen csak } \mathfrak{N}_3\text{-ra terjed}$$

ki.) Egy lehetséges választás  $v(r) = \gamma \Phi(r), v^*(r) = \gamma^* \Phi(r)$ , ahol

$$\Phi(r) = \begin{cases} \exp(-(\mu^2 - |r|^2)^{-1}) & r \in \mathfrak{N}_3 \\ 0 & r \notin \mathfrak{N}_3 \end{cases}$$

és a  $\gamma, \gamma^*$  konstansokat úgy választottuk, hogy 3. teljesüljön. (Későbbi felhasználás céljából megjegyezzük, hogy  $v$  és  $v^*$  a teljes csoporton differenciálhatók a  $G$ -n analitikus koordináták szerint.)



Definiáljuk most (Iwasawa nyomán [6], 535. old.)

$$\begin{aligned}\zeta'(r, s) &= \zeta(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta] \quad (r, s \in \mathfrak{N}_1) \\ \zeta(r) &= - \int_G \zeta(r, t) v(t) dt \quad (r \in \mathfrak{N}_1^2)\end{aligned}\quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}\zeta''(r, s) &= \zeta'(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta'] \quad (r, s \in \mathfrak{N}_2) \\ \zeta'(r) &= - \int_G \zeta'(u, r) v^*(u) d^*u \quad (r \in \mathfrak{N}_2^2).\end{aligned}\quad (4.10)$$

[Könnyen látható, hogy (4.9) és (4.10) kifejezések megfelelően definiáltak a megjelölt tartományokban, és hogy  $\varrho(e) = \varrho'(e) = 0$ .]

(4.9)-ből és definíciójából az  $\mathfrak{N}_1$ -beli  $r$ -re és  $s$ -re [vö. (2.8)]:

$$\zeta'(r, s) = \int_G \{ \zeta(r, s) - \zeta(r, t) - \zeta(s, t) + \zeta(rs, t) \} v(t) dt.$$

Mivel ebben az integrálban valójában  $rs \in \mathfrak{N}$ ,  $st \in \mathfrak{N}$ , alkalmazhatjuk (2.6)-ot és azt találjuk, hogy

$$\zeta'(r, s) = \int_G \{ \zeta(r, st) - \zeta(r, t) \} v(t) dt.$$

Most  $\int_G \zeta(r, st) v(t) dt = \int_G \zeta(r, t) v(s^{-1}t) dt$ . Ennélfogva

$$\zeta'(r, s) = \int_G \zeta(r, t) \{ v(s^{-1}t) - v(t) \} dt. \quad (r, s \in \mathfrak{N}_1) \quad (4.9a)$$

Az előzővel analóg számolásból

$$\zeta''(r, s) = \int_G \zeta'(u, v s) \{ v^*(ur^{-1}) - v^*(u) \} d^*u \quad (r, s \in \mathfrak{N}_2) \quad (4.10a)$$

(4.9a)-t az utolsó kifejezésbe helyettesítve végül kapjuk:

$$\begin{aligned}\zeta''(r, s) &= \zeta(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta''] \quad (r, s \in \mathfrak{N}_2) \\ \zeta''(r) &= \zeta(r) + \zeta'(r) \quad (r \in \mathfrak{N}_2^2) \\ \zeta''(r, s) &= \int_G \int_G \zeta(u, t) \{ v(s^{-1}t) - v(t) \} \cdot \{ v^*(ur^{-1}) - v^*(u) \} dt d^*u.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Az utolsó integrálban csak  $v$  és  $v^*$  függ  $r$ -től és  $s$ -től. Így  $\zeta''$   $r$  és  $s$  koordinátái szerinti differenciálhatósága következik  $v$  és  $v^*$ -éből és a csoport szorzás  $\mathfrak{N}_0$ -n való analiticitásából. Ez definiálja a következő

4.1. LEMMA-t. Egy Lie-csoporton minden lokális exponens ekvivalens egy differenciálható lokális exponenssel.

*Ekvivalens differenciálható lokális exponensek.* Legyen  $\xi_1$  és  $\xi_2$  két ekvivalens differenciálható lokális exponens, és válasszunk egy olyan  $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}^2 \subset \mathfrak{N}_0)$  környezetet, hogy  $\chi = \xi_2 - \xi_1 = \Delta[\zeta]$  differenciálható legyen  $\mathfrak{N}$ -n és  $\zeta(r)$  folytonos és korlátos



$\mathfrak{N}^2$ -n. Legyen  $r \in \mathfrak{N}$ -re  $\eta(r) = \int_G \chi(r, t) v(t) dt$ , ahol  $v(r)$  ugyanaz, mint fentebb, és  $\varrho_1(r) = \eta(r) - \zeta(r)$ . Nyilvánvalóan  $\eta(r)$  differenciálható  $\mathfrak{N}$ -n, és így  $\zeta_1(r)$  is, mivel

$$\zeta_1(r) = \int_G \{\zeta(t) - \zeta(rt)\} v(t) dt = \int_G \zeta(t) \{v(t) - v(r^{-1}t)\} dt.$$

Így  $\zeta = \eta - \zeta_1$  differenciálható  $\mathfrak{N}$ -n. Bármilyen  $\mathfrak{N}_1(\mathfrak{N}_1^2 \subset \mathfrak{N})$ -re ez bizonyítja a

4.2. LEMMA-t. *Ha egy Lie-csoport két  $\zeta_1$  és  $\zeta_2$  differenciálható exponense ekvivalens, akkor egy  $\mathfrak{N}_1$  környezetben  $\zeta_2 = \zeta_1 + \Delta[\zeta]$ , ahol  $\zeta(r)$  differenciálható függvény.*<sup>3</sup>

4d) Egy-paraméteres csoport lokális exponensei. Egy  $G$  egy-paraméteres csoportnál az  $\mathfrak{N}$  nyitott gömb egy nyílt intervallum ( $|\varrho| < \gamma$ ), és a csoportművelet közönseges összeadás. Így egy  $\mathfrak{N}$ -n definiált  $\xi_0$  lokális exponens egy  $\xi_0(\varrho, \sigma)$  ( $-\gamma < \varrho, \sigma < \gamma$ ) folytonos függvény, amely (2.5) és (2.6) szerint eleget tesz a

$$\xi_0(0, 0) = 0 \quad (4.12)$$

$$\xi_0(\tau_1, \tau_2) + \xi_0(\tau_1 + \tau_2, \tau_3) = \xi_0(\tau_2, \tau_3) + \xi_0(\tau_1, \tau_2 + \tau_3) \quad (4.13)$$

összefüggéseknek, ahol  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  megfelelnek  $r, s, t$ -nek és  $-\gamma < \tau_i, \tau_1 + \tau_2, \tau_2 + \tau_3 < \gamma$ . (2.7) alapján  $\xi_0(\tau, 0) = 0$ .

4.3. LEMMA. *Egy egy-paraméteres csoport minden lokális exponense zérussal egyenlő.*

*Bizonyítás.* A 4.1. Lemma alapján  $\xi_0$ -ról feltehetjük, hogy differenciálható. Legyen

$$\Psi(\tau, \sigma) = \partial \xi_0(\tau, \sigma) / \partial \sigma,$$

és deriváljuk (4.13)-t  $\tau_3$  szerint a  $\tau_3 = 0$  helyen. Ebből kapjuk:

$$\Psi(\tau_1 + \tau_2, 0) = \Psi(\tau_2, 0) + \Psi(\tau_1, \tau_2) \quad (-\gamma < \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2 < \gamma).$$

Definiáljuk

$$\zeta_0(\tau) = \int_0^\tau \Psi(\sigma, 0) d\sigma = \int_0^1 \tau \Psi(\mu\tau, 0) d\mu \quad (|\tau| < \gamma). \quad (4.14)$$

Akkor  $\zeta_0(0) = 0$ , és ha  $|\tau_i| < \frac{1}{2}\gamma$ ,

$$\begin{aligned} -\Delta_{\tau_1, \tau_2}[\zeta_0] &= \zeta_0(\tau_1 + \tau_2) - \zeta_0(\tau_1) - \zeta_0(\tau_2) = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} \Psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\tau_2} \Psi(\sigma, 0) d\sigma = \int_0^{\tau_2} \{\Psi(\tau_1 + \sigma, 0) - \Psi(\sigma, 0)\} d\sigma = \\ &= \int_0^{\tau_2} \Psi(\tau_1, \sigma) d\sigma = \int_0^{\tau_2} (\partial \xi_0(\tau_1, \sigma) / \partial \sigma) d\sigma = \xi_0(\tau_1, \tau_2) - \xi_0(\tau_1, 0) = \xi_0(\tau_1, \tau_2). \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Ez a lemma könnyen általánosítható a következőképpen. Tegyük fel, hogy  $\xi_1$  és  $\xi_2$  mind  $C^k$  osztályúak  $\mathfrak{N}$ -n (vagyis folytonos parciális deriváltjaik vannak egészen a  $k$ -adik rendig). Akkor  $\zeta(r)$  is  $C^k$  osztályú  $\mathfrak{N}$ -n, mivel az azonos konstrukció folytán mind  $\eta$ , mind  $\zeta_1$   $C^k$  osztályúak. Azonkívül nem szükséges kanonikus koordinátákat használni. Elegendő feltenni, hogy az  $f^i$  függvények (4.1)-ben  $C^k$  osztályúak a használt koordinátákban.



Így

$$\xi_0(\tau_1, \tau_2) + \Delta_{\tau_1, \tau_2}[\xi_0] = 0 \quad (4.15)$$

vagyis  $\xi_0 \equiv 0$ , q. e. d.

4e) *Kanonikus lokális exponensek.* Az utolsó eredményt fel fogjuk használni arra, hogy a lokális exponenseket kanonikus alakra transzformáljuk.

*Definíció.* Egy  $G$  Lie-csoport  $\mathfrak{N}$  kanonikus környezetén definiált  $\xi$  lokális exponensét akkor nevezzük kanonikusnak, ha 1. differenciálható  $\mathfrak{N}$ -n és 2.  $\xi(r, s) = 0$ , ha  $r$  és  $s$  ugyanannak a lokális egy-paraméteres alcsoportnak az elemei  $\mathfrak{N}$ -ben. [Egyébként  $\xi(r, r^{-1}) = 0$ .]

4.4. LEMMA. Egy Lie-csoportnak minden  $\xi$  lokális exponense ekvivalens egy kanonikus lokális exponenssel.

*Bizonyítás.* Mint előzőleg, most is feltehetjük, hogy  $\xi$  differenciálható azon az  $\mathfrak{N}(|r| < \kappa)$  környezeten, amelyen definiáltuk. Válasszuk  $\mathfrak{N}_1$ -t ( $|r| < \kappa_1$ ) úgy, hogy  $\mathfrak{N}_1^2 \subset \mathfrak{N}$ . Ha  $r \in \mathfrak{N}_1$ , akkor  $r, r \in \mathfrak{N}$ , és mivel kanonikus koordinátákra  $r \cdot r = 2r$ , ebből következik, hogy  $\kappa_1 \leq \frac{1}{2} \kappa$ . Legyen két  $r, r'$  elemre, melyeknek koordinátái  $q^k, q'^k$

$$\chi_k(r, r') = \partial \xi(r, r') / \partial q'^k \quad (r, r' \in \mathfrak{N})$$

és definiáljuk

$$\zeta(r) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n q^k \chi_k(\mu r, 0) d\mu \quad (r \in \mathfrak{N}) \quad (4.16a)$$

$$\zeta'(r, s) = \zeta'(r, s) + \Delta_{r, s}[\zeta]. \quad (r, s \in \mathfrak{N}_1). \quad (4.16b)$$

Mivel  $\xi(r)$  differenciálható, és  $\xi(e) = 0$ ,  $\zeta'$  egy differenciálható lokális exponens  $\mathfrak{N}_1$ -en.

Legyen  $r(\tau) = \tau a$  tetszőleges adott egy-paraméteres alcsoport  $\mathfrak{N}_1$ -ben (vö. 4a. §). Annak bizonyítására, hogy  $\zeta'$  kanonikus, meg kell mutatnunk, hogy

$$\zeta'(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0 \quad (\tau_i a \in \mathfrak{N}_1). \quad (4.17)$$

Ez a triviális, ha  $a = 0$ , ezért ezentúl feltesszük, hogy  $a \neq 0$ . Ha  $|\tau| < \gamma = \kappa/|a|$ , akkor  $r(\tau) \in \mathfrak{N}$ , és ha  $r(\tau) \in \mathfrak{N}_1$ ,  $|\tau| < \kappa_1/|a| \leq \frac{1}{2} \gamma$ . Feltesszük, hogy  $\xi(\tau_1 a, \tau_2 a) = \xi_0(\tau_1, \tau_2) \times (|\tau_i| < \gamma)$  és alkalmazzuk a 4d § eredményeit. 1. Mivel  $\xi_0(\tau_1, \tau_2)$  lokális exponens, eleget tesz a (4.12) és (4.13) egyenleteknek. 2. Jelöljük  $a$  komponenseit  $\alpha^k$ -val. Akkor

$$\Psi(\tau, \sigma) = \partial \xi_0(\tau, \sigma) / \partial \sigma = \partial \xi(\tau a, \sigma a) / \partial \sigma = \sum_{k=1}^n \alpha^k \chi_k(\tau a, \sigma a).$$

Ha most egybevetjük (4.14)-et és (4.16a)-t, azt találjuk:

$$\xi_0(\tau) = \int_0^1 \tau \Psi(\mu \tau, 0) d\mu = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (\tau \alpha^k \chi_k(\mu \tau a, 0)) d\mu = \zeta(\tau a).$$



Így ha  $\tau_i a \in \mathfrak{N}_1$ , és ezért  $|\tau_i| < \frac{1}{2} \gamma$ , ezt kapjuk:

$$\xi'(\tau_1 a, \tau_2 a) = \xi(\tau_1 a, \tau_2 a) + \zeta(\tau_1 a) + \zeta(\tau_2 a) - \zeta((\tau_1 + \tau_2) a),$$

és (4.15) alapján

$$\xi'(\tau_1 a, \tau_2 a) = \xi_0(\tau_1, \tau_2) + \Delta_{\tau_1, \tau_2}[\zeta_0] = 0,$$

ami igazolja (4.17)-t és a 4.4. Lemmát.

*Ekvivalens kanonikus lokális exponensek.*

4.5. LEMMA. Legyen  $\xi_1$  és  $\xi_2$  egy  $G$  Lie-csoport két ekvivalens lokális exponense, és tegyük fel, hogy  $\xi_1$  kanonikus. Ez esetben  $\xi_2$  akkor és csak akkor kanonikus, ha valamilyen környezetben  $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[A]$ , ahol  $A(r)$   $r$  kanonikus koordinátáinak lineáris kifejezése.

Bizonyítás. 1. A feltétel szükségessége. A 4.2. Lemma (4c §) szerint létezik egy  $\mathfrak{N}(|r| < \kappa)$  környezet, amelyen  $\xi_2$  és  $\xi_1$  kanonikus, és amelyen

$$\xi_2(r, s) = \xi_1(r, s) + \Delta_{r, s}[\zeta] \quad (r, s \in \mathfrak{N}), \quad (4.18)$$

ahol a differenciálható  $\zeta(r)$   $r \in \mathfrak{N}^2$ -n definiált. Legyen  $r = \tau_1 a$ ,  $s = \tau_2 a$ . Akkor  $\xi_2 = \xi_1 = 0$ , és ennél fogva

$$\Delta_{r, s}[\zeta] = \zeta(\tau_1 a) + \zeta(\tau_2 a) - \zeta((\tau_1 + \tau_2) a) = 0 \quad (\tau_i a \in \mathfrak{N}). \quad (4.19)$$

Tegyük fel, hogy  $|a| < \kappa$ . (4.19) akkor érvényes, ha  $|\tau_i| \leq 1$ ,  $|\tau_1 + \tau_2| \leq 1$ , és rögzített  $a$ -ra a szokásos módon következik, hogy

$$\zeta(\tau a) = \tau \zeta(a) \quad |\tau| \leq 1, |a| < \kappa.$$

$\tau$  szerint differenciálva ( $\tau=0$ -nál) kapjuk  $|a| < \kappa$ -ra:

$$\zeta(a) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha^k = A(a) \quad (\lambda_k = \partial \zeta(0) / \partial \alpha^k) \quad (4.20)$$

vagy  $\zeta(r) = A(r) r \in \mathfrak{N}$ -re. Ha  $\mathfrak{N}_1^2 \subset \mathfrak{N}$ , (4.18) érvényes  $\zeta = A$  mellett minden  $r, s \in \mathfrak{N}_1$ -re, q. e. d.

2. A feltétel elégséges volta. Ha  $\zeta(r) = A(r) r \in \mathfrak{N}_1^2 \subset \mathfrak{N}$ -re, akkor  $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[A]$  differenciálható  $\mathfrak{N}_1$ -en. (4.19) érvényes, ha  $\tau_i a \in \mathfrak{N}_1$ , és  $\xi_1(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0$ -ból következik, hogy  $\xi_2(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0$ , tehát  $\xi_2$  kanonikus, q. e. d.

4f)  $A$   $H$  lokális csoport. Tekintsük most a  $G$   $n$ -dimenziós Lie-csoport  $H$  lokális csoportját (amelyet a 2d §-ban vezettünk be) egy  $\xi$  kanonikus lokális exponensre.  $H$  elemei:  $\bar{r} = \{\theta, r\}$ , ahol  $\theta$  egy valós szám és  $r$   $G$  eleme egy  $\mathfrak{N}$  környezetben, és  $H$ -ban a csoportszorzást

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 = \{\theta_1, r_1\} \cdot \{\theta_2, r_2\} = \{\theta_1 + \{\theta_2 + \xi(r_1, r_2)\} r_1, r_2\} \quad (4.21)$$

definiálja. (A felülvonás megkülönbözteti a  $H$ -n definiált matematikai objektumokat a  $G$ -n definiáltaktól.) Az  $\bar{r}$  elemek nyilvánvalóan leírhatók  $n+1$   $q^0, q^1, \dots, q^n$  koor-



dinátával, ahol  $\varrho^0 = \theta$  és  $\varrho^1, \varrho^2 \dots \varrho^n$   $r$  koordinátái  $G$ -n. Mint a 4a §-ban,  $\mathfrak{M}$  szférikus környezetek vezethetők be  $H$ -n az

$$|\bar{r}| = \left( \sum_{k=0}^n (\varrho^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = ((\varrho^0)^2 + |r|^2)^{\frac{1}{2}} < \kappa,$$

összefüggéssel. Tegyük fel, hogy  $\xi(r, s)$  kanonikus  $|r| < \kappa, |s| < \kappa$  esetén, legyen  $\mathfrak{M}$  az  $|\bar{r}| < \kappa$  környezet, és válasszuk  $\mathfrak{M}_1(|\bar{r}| < \kappa_1)$ -t úgy, hogy  $\bar{r}\bar{s} \in \mathfrak{M}$ , ha  $r, s \in \mathfrak{M}_1$ . Ha ekkor

$$\varrho^i, \sigma^i, \tau^i \quad (0 \leq i \leq n)$$

sorra  $\bar{r}, \bar{s}$  és  $\bar{t} = \bar{r}\bar{s}$  koordinátái, akkor a (4.21) definíciós relációkból

$$\tau^i = \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) \quad (0 \leq i \leq n; \bar{r}, \bar{s} \in \mathfrak{M}_1) \quad (4.22)$$

ahol

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \bar{f}^0(\bar{r}, \bar{s}) = \varrho^0 + \sigma^0 + \xi(r, s) \\ \tau^i &= \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) = f^i(r, s) \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.22a)$$

( $f^i(r, s) = f^i(\varrho^1, \dots, \varrho^n, \sigma^1, \dots, \sigma^n)$ ) a függvények, amelyek (4.1) alapján a csoport-szorozást definiálják  $G$ -n. Mivel mind  $\xi(r, s)$  és  $f^i(r, s)$  differenciálhatók, ugyanez érvényes  $\bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$ -re  $\mathfrak{M}_1$ -en ( $0 \leq i \leq n$ ); tehát  $H$  egy  $(n+1)$ -dimenziós lokális Lie-csoport.

Azonkívül a  $\varrho^i$  koordináták *kanonikusak*  $\mathfrak{M}_1$ -en. Az igazoláshoz legyen  $\bar{r}(\tau) = \tau \bar{a}$  (vagyis  $\varrho^k = \tau \alpha^k, 0 \leq k \leq n$ ), ahol  $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$ , úgyhogy  $\bar{r}(\tau) = \{\tau \alpha^0, r(\tau)\}$ ,  $r(\tau) = \tau a$ . Mivel  $\xi$  kanonikus, (4.21)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} \bar{r}(\tau_1) \bar{r}(\tau_2) &= \{(\tau_1 + \tau_2) \alpha^0 + \xi(\tau_1 a, \tau_2 a), r(\tau_1) r(\tau_2)\} = \\ &= \{(\tau_1 + \tau_2) \alpha^0, r(\tau_1 + \tau_2)\} = \bar{r}(\tau_1 + \tau_2), \quad \text{ha } |\tau_i a| < \kappa_1, \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

Fordítva, ha egy differenciálható  $\xi$  (4.21) által definiált koordinátái kanonikusak, akkor  $\xi$  egy kanonikus lokális exponens.

Egy kanonikus koordinátarendszerre az  $\bar{f}^i(r, s)$  függvények analitikusak valamilyen  $\mathfrak{M}'$  környezeten, amint azt a 4a §-ban említettük. Nevezetesen az következik ebből, hogy  $\xi$  analitikus  $G$ -nek valamely  $\mathfrak{N}'$  környezetén. Így kapjuk a

4.6. LEMMÁ-t. *Egy  $G$  Lie-csoport  $\xi(r, s)$  kanonikus lokális exponense valamely  $\mathfrak{N}'$  környezeten  $r$  és  $s$  kanonikus koordinátáinak analitikus függvénye.*

4g)  $H \mathfrak{h}$  Lie-algebrája. *Infinitézimális exponensek.*  $H \mathfrak{h}$  Lie-algebrája az előbb bevezetett  $\bar{a}(n+1)$ -dimenziós vektorokból áll,  $\alpha^k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) komponensekkel, amelyeket az  $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$  alakban fejezünk ki, ahol

$$a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$$

$G \mathfrak{g}$  Lie-algebrájának egy eleme. Legyen  $\bar{q}(\bar{r}, \bar{s}) = r \bar{s} r^{-1} \bar{s}^{-1}$ . (4.4) szerint  $\mathfrak{h}$  két eleméből alkotott  $[\bar{a}, \bar{b}] = [\{\alpha^0, a\}, \{\beta^0, b\}]$  zárójel egyenlő  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} \bar{q}(\tau \bar{a}, \tau \bar{b})$ . (E határérték létezése a lokális Lie-csoportok elméletéből következik.) (4.21)-ből

$$\begin{aligned} (\tau \bar{a})(\tau \bar{b}) &= \{\tau(\alpha^0 + \beta^0) + \xi(\tau a, \tau b), (\tau a)(\tau b)\} \\ (\tau \bar{a})^{-1}(\tau \bar{b})^{-1} &= (-\tau \bar{a})(-\tau \bar{b}) = \{-\tau(\alpha^0 + \beta^0) + \xi(-\tau a, -\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}\}, \end{aligned}$$



és egyszerű számolással

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [\{\alpha^0, a\}, \{\beta^0, b\}] = \{\Xi(a, b), [a, b]\} \quad (4.23)$$

$$\Xi(a, b) = \lim \tau^{-2} (\xi((\tau a)(\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}) + \xi(\tau a, \tau b) + \xi(-\tau a, -\tau b)). \quad (4.23a)$$

Itt  $[a, b]$  a  $\mathfrak{g}$  Lie-algebrán a zárójel.

$[\bar{a}, \bar{b}]$  antiszimmetrikusságából [vö. (4.2)] és  $\bar{a}, \bar{b}$ -ben való linearitásából megállapítható, hogy  $\mathfrak{g}$  tetszőleges  $a, a', b, b'$  elemére és bármely  $\lambda, \lambda'$  valós számokra

$$\begin{aligned} \Xi(a, b) &= -\Xi(b, a); \quad \Xi(\lambda a + \lambda' a', b) = \lambda \Xi(a', b) + \lambda' \Xi(a', b) \\ \Xi(a, \lambda b + \lambda' b') &= \lambda \Xi(a, b) + \lambda' \Xi(a, b'). \end{aligned} \quad (4.23b)$$

Tehát  $\Xi(a, b)$  egy valós értékű antiszimmetrikus bilineáris alak  $\mathfrak{g}$ -n.

Egy további feltétel következik a  $\bar{J} = [[\bar{a}, \bar{a}'], \bar{a}''] + [[\bar{a}', \bar{a}''], \bar{a}] + [[\bar{a}'', \bar{a}], \bar{a}'] = 0$  Jacobi-azonosságból  $\bar{J}$  bármilyen három elemére. (4.23)-ból például

$$[[\bar{a}', \bar{a}''], \bar{a}] = [\{\Xi(a', a''), [a', a'']\}, \{\alpha^0, a\}] = \{\Xi([a', a''], a), [[a', a''], a]\}.$$

Legyen most bármilyen antiszimmetrikus bilineáris alakra<sup>4</sup>

$$d\Xi(a, a', a'') = \Xi([a, a'], a'') + \Xi([a', a''], a) + \Xi([a'', a], a'). \quad (4.24)$$

( $d\Xi$  lineáris az  $a, a', a''$  három változójában, antiszimmetrikus bármelyik kettőben, és ennél fogva eltűnik, ha  $a, a', a''$  lineárisan összefüggnek.) Következésképpen  $\bar{J} = \{d\Xi(a, a', a''), j\}$ , ahol  $j = [[a, a'], a''] + [[a', a''], a] + [[a'', a], a'] = 0$   $\mathfrak{g}$ -n. Így tehát  $\bar{J}=0$  ekvivalens<sup>5</sup>

$$d\Xi(a, a', a'') = 0\text{-val} \quad (a, a', a'' \text{ g-ben vannak}). \quad (4.24a)$$

**Definíció.** Bármely  $\Xi$  a  $\mathfrak{g}$  Lie-algebrán definiált valós értékű antiszimmetrikus bilineáris alakot, amelyre  $d\Xi(a, a', a'')=0$ ,  $\mathfrak{g}$  *infinitezimális exponensének* fogunk nevezni. Ha (4.23a)-val definiáljuk, azt mondjuk, hogy megfelel  $G$  kanonikus lokális exponensének.

Legyen  $a_1, \dots, a_n$   $\mathfrak{g}$  egy bázisa és  $\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)$  egy  $\Xi$  infinitezimális exponensre.  $\mathfrak{g}$  bármilyen két

$$a = \sum_{i=1}^n \gamma^i a_i \quad \text{és} \quad a' = \sum_{i=1}^n \gamma'^i a_i$$

vektorára kapjuk:

$$\Xi(a, a') = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} \gamma^i \gamma'^j; \quad \beta^{ij} = -\beta^{ji} = \Xi(a_i, a_j). \quad (4.25)$$

<sup>4</sup> A (4.24) és a későbbiekben következő (4.29a) egyenletek (numerikus faktoroktól eltekintve) Chevalley—Eilenberg [2] (10.1) egyenletének (99. old.) speciális esetei, amelyet multilineáris alternáló alakokra írt fel egy Lie-algebrán.

<sup>5</sup> A  $d\Xi=0$  összefüggés a lokális exponenseket definiáló (2.6) összefüggés infinitezimális analogonjának tekinthető. Általánosságban szólva, a Jacobi-azonosság egy Lie-algebrán az asszociatív törvényt tükrözi a megfelelő csoportra (Pontrjagin, 236. old.),  $H$ -ra azonban az asszociatív törvény ekvivalens a  $\xi$  lokális exponensre felírt (2.6) összefüggéssel (vö. 2d §).



Helyettesítsük (4.24a)-ban  $a, a', a''$ -t sorra  $a_i, a_j, a_k$ -val. Mivel  $[a_i, a_j] = \sum_{m=1}^n c_{ij}^m a_m$  (ahol  $c_{ij}^m G$  struktúra-állandói), azt kapjuk, hogy

$$\Xi([a_i, a_j], a_k) = \sum_{m=1}^n c_{ij}^m \Xi(a_m, a_k) = \sum_{m=1}^n \beta_{mk} c_{ij}^m.$$

Így (4.24a) implikálja (4.26)-ot (és ő maga is következik belőle)

$$I_{kij} = \sum_{m=1}^n (\beta_{mk} c_{ij}^m + \beta_{mi} c_{jk}^m + \beta_{mj} c_{ik}^m) = 0 \quad (1 \leq k, i, j \leq n). \quad (4.26)$$

*Megjegyzés.* g bármely  $\Xi$  infinitezimális exponenséhez a (4.23) egyenlet egy  $(n+1)$ -dimenziós Lie-algebrát definiál, mivel akkor az  $[\bar{a}, \bar{b}]$  zárójel antiszimmetrikus, bilineáris és (4.24a) folytán eleget tesz a Jacobi-azonosságnak.

*Standard bázis h-n.* Válasszuk a  $q^1, \dots, q^n$  kanonikus koordinátákhoz  $G$ -n az  $a_1, \dots, a_n$  standard bázist  $g$ -n (vö. 4b §). Akkor a standard bázis  $h$ -n a  $q^0, q^1, \dots, q^n$  kanonikus koordinátákhoz  $H$ -n

$$\bar{a}_0 = \{1, 0\}; \quad \bar{a}_i = \{0, a_i\} \quad 1 \leq i \leq n.$$

$H$   $\bar{c}_{ij}^m$  struktúra-állandóira  $[\bar{a}_i, \bar{a}_j] = \sum_{m=0}^n \bar{c}_{ij}^m \bar{a}_m$ -ből meghatározva) kapjuk

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij}^0 &= \beta_{ij} & (1 \leq i, j \leq n); \\ \bar{c}_{ij}^m &= c_{ij}^m & (1 \leq m, i, j \leq n) \\ \bar{c}_{i0}^m &= \bar{c}_{0i}^m = 0 & (0 \leq m, i \leq n). \end{aligned} \quad (4.27)$$

[(4.7) és (4.26) összevetése azt mutatja, hogy  $I_{kij}=0$  megfelel  $\bar{f}_{kij}^0=0$ -nak  $H$  struktúra-állandóira.]

A  $H$ -ra alkalmazott (4.8) egyenletekből következik:

$$\bar{c}_{ij}^0 = \left( \frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial q^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial q^j \partial \sigma^i} \right)_{[q^k = \sigma^k = 0]} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

és ennél fogva kanonikus  $\xi$ -re (4.22a)-ból

$$\beta_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial q^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial q^j \partial \sigma^i} \right)_{[q^k = \sigma^k = 0]} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (4.28)$$

[Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet érvényes olyan  $q^k$  koordinátákra is, amelyek nem kanonikusak. Lásd a (4.8) egyenletet követő megjegyzést.]

4h) *Ekvivalens infinitezimális exponensek.* A következő diszkusszióhoz (4.23a)-ból kiszámítjuk a  $\Xi$  infinitezimális exponenst egy  $\xi = A[A]$  alakú kanonikus lokális



exponenshez, ahol  $\Lambda(r)$   $r$  lineáris kifejezése (vö. a 4.5. Lemmával a 4e §-ban).  $\Lambda$  linearitásából következik, hogy

$$\begin{aligned}\xi(\tau a, \tau b) &= \Lambda(\tau a) + \Lambda(\tau b) - \Lambda((\tau a)(\tau b)) \\ \xi(-\tau a, -\tau b) &= -\Lambda(\tau a) - \Lambda(\tau b) - \Lambda((\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}) \\ \xi((\tau a)(\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}) &= \Lambda((\tau a)(\tau b)) + \\ &+ \Lambda((\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}) - \Lambda(q(\tau a, \tau b)).\end{aligned}$$

Ezen három kifejezés összege  $-\Lambda[q(\tau a, \tau b)]$ . Így (4.4)-ből

$$\Xi(a, b) = -\lim \tau^{-2} \Lambda(q(\tau a, \tau b)) = -\Lambda(\lim \tau^{-2} q(\tau a, \tau b)),$$

vagyis

$$\Xi(a, b) = -\Lambda([a, b]). \quad (4.29)$$

Rövidség kedvéért ezt írjuk

$$\Xi = -d[\lambda]. \quad (4.29a)$$

$g$  egy bázisának  $a_i$  vektoraira  $\Lambda(a_i) = \lambda_i$  mellett azt találjuk:

$$\Xi(a_i, a_j) = \sum_{m=1}^n c_{ji}^m \Lambda(a_m),$$

vagy [vö. (4.25)]

$$\beta_{ij} = \sum_{m=1}^n c_{ji}^m \lambda_m. \quad (4.30)$$

Könnyű közvetlenül meggyőződni arról, hogy minden (4.29) alakú  $\Xi$  egy infinitezimális exponense  $g$ -nek. Valóban,  $\Xi$  nyilvánvalóan bilineáris és antiszimmetrikus és

$$d\Xi(a, a', a'') = -\Lambda([a, a'], a'') + [[a', a''], a] + [[a'', a], a'] = 0.$$

Tekintetbe véve (4.29)-et, a 4.5. Lemma a következő definíciót sugallja:

$g$  két  $\Xi$  és  $\Xi'$  infinitezimális exponensét akkor nevezzük ekvivalensnek és írunk  $\Xi' \equiv \Xi - t$ , ha  $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$ , ahol  $\Lambda(a)$  egy  $g$ -n definiált valós értékű lineáris alak.

Az antiszimmetrikus bilineáris alakokat  $g$ -n  $h = \frac{1}{2}n(n-1)$  számú  $\beta_{ij}$  koefficiens határozza meg, és ennél fogva egy  $\mathfrak{B}$   $h$ -dimenziós lineáris teret alkotnak. Az infinitezimális exponensek egy  $\mathfrak{B}_1$  lineáris alteret feszítenek ki  $\mathfrak{B}$ -ben és a  $\Xi = d(\Lambda)$  alakú infinitezimális exponensek pedig  $\mathfrak{B}_1$ -nek egy  $\mathfrak{B}_2$  lineáris alterét. Jelöljük  $\mathfrak{B}_1$  és  $\mathfrak{B}_2$  dimenzióit  $h_1$ -gyel és  $h_2$ -vel. Nyilvánvalóan  $h_2 \leq n$ .

A  $\Xi$  infinitezimális exponensek ekvivalencia osztályait figyelembe véve (vagyis  $\mathfrak{B}_1$  moduló  $\mathfrak{B}_2$  elemeit nézve) egy  $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_2$   $h^* = h_1 - h_2$  dimenziójú lineáris teret kapunk. Bármilyen  $g$ -re

$$h^* = h_1 - h_2 \leq h - h_2 \leq h = \frac{1}{2}n(n-1).$$

A  $h^* = h$  maximális dimenziószám akkor és csak akkor fordul elő, ha  $g$  (és ennél fogva a  $G$  csoport is, ha összefüggő) Abel-jellegű. Valóban  $h_2 = 0$  azt jelenti, hogy



$d[A]$  eltűnik minden  $A$  lineáris kifejezésre, azaz hogy  $[a, b] = 0$  minden  $a, b$ -re. Megfordítva, ez esetben (4.24a) üres, úgyhogy minden bilineáris antiszimmetrikus alak egy infinitezimális exponens, és így  $h^* = h$ , q. e. d.

4i) *Lokális és infinitezimális exponensek korrespondenciája.*  $G$  minden  $\xi$  kanonikus lokális exponensének megfelel (4.23a) alapján  $g$ -nek egy egyértelműen definiált  $\Xi$  infinitezimális exponense. Ezt így fejezzük ki:

$$\xi \rightarrow \Xi. \quad (4.31)$$

A (4.31) megfeleltetés nyilvánvalóan *lineáris*, azaz ha  $\xi \rightarrow \Xi$ ,  $\xi' \rightarrow \Xi'$  és valamilyen  $\mathfrak{N}$  környezetben  $\xi'' = \gamma\xi + \gamma'\xi'$  ( $\gamma, \gamma'$  állandók), akkor  $\xi'' \rightarrow \gamma\Xi + \gamma'\Xi'$ . Továbbá, ha két kanonikus lokális exponensnek megfelelő  $\Xi$ -k megegyeznek, akkor a lokális exponensek maguk megegyeznek valamilyen  $\mathfrak{N}$ -n.  $\Xi$  gyakorlatilag egyértelműen meghatározza a  $H$  lokális csoport (4.27) struktúra-állandóit, és következésképpen (l. a megjegyzéseket a 4b § végén) egyértelműen meghatározza a (4.22a)-beli  $f^i$  függvényeket és így  $\xi(r, s)$ -t is egy elegendően kicsiny környezetben, q. e. d.

4.7. LEMMA. *Két  $\xi$  és  $\xi'$  kanonikus lokális exponens akkor és csak akkor ekvivalens, ha a megfelelő  $\Xi$  és  $\Xi'$  infinitezimális exponensek ekvivalensek.*

*Bizonyítás.* 1. Legyen  $\xi' \equiv \xi$ . A 4.5. Lemma szerint  $\xi' = \xi + \Delta[A]$  valamilyen  $\mathfrak{N}$ -en, ahol  $\Delta(r)$  egy lineáris alak. Mivel  $\Delta[A] \rightarrow -d[A]$  (vö. 4.29a), következik, hogy  $\Xi' = \Xi - d[A]$ , vagyis  $\Xi' \equiv \Xi$ . 2. Legyen  $\Xi' \equiv \Xi$ , vagyis  $\Xi' = \Xi - d[A]$  valamilyen  $\Delta(a)$  lineáris alakra  $g$ -n. Akkor  $\xi + \Delta[A] \rightarrow \Xi'$ , és a (4.31) megfeleltetés fentebb bizonyított unicitása folytán  $\xi' = \xi + \Delta[A]$  valamilyen  $\mathfrak{N}$ -en, vagyis  $\xi' \equiv \xi$ .

*Korollárium.* Ha egy  $G$  csoportra az összes infinitezimális exponensek egyenlőek nullával, akkor az összes kanonikus lokális exponensek és így a 4.4. Lemma szerint az összes lokális exponensek egyenlőek nullával.

4.8. LEMMA.<sup>6</sup>  *$g$  minden egyes  $\Xi$  infinitezimális exponenséhez létezik  $G$ -nek egy  $\xi$  kanonikus lokális exponense, amelyre  $\xi \rightarrow \Xi$ .*

*Bizonyítás.* Egy  $\Xi$  infinitezimális exponens egy  $h$   $(n+1)$ -dimenziós Lie-algebrát definiál (4.27) alakú  $c_{ij}^m$  struktúra-állandókkal, és így egy  $(n+1)$ -dimenziós lokális Lie-csoportot, (amelyet nevezzünk  $H$ -nak) éppen ezekkel a struktúra-állandókkal egy standard bázisra vonatkoztatva (vö. 4b §). Nem nehéz kimutatni,<sup>7</sup> hogy kano-

<sup>6</sup> Sem a 4.8. Lemmát, sem az 5. Tételt nem fogjuk felhasználni az elméletnek a 6—7. §-ban tárgyalt alkalmazásaiban, mivel mindezen esetekben közvetlenül meg lehet határozni az exponenseket.

<sup>7</sup> Ez általános tételek segítségével abból a tényből származtatható, hogy  $\bar{a}_0$  és evvel a többszörösének  $g_0$  egydimenziós (ideális) altere centrálisak  $h$ -ban, és hogy  $h/g_0$  izomorf  $G$   $g$  Lie-algebrájával. Az  $f^i(r, s)$  függvények is közvetlenül megkaphatók az

$$F_k^i = \bar{v}_k^i(\bar{r}) - \sum_{j=0}^n \bar{v}_j^i(f^0, \dots, f^n) \partial f^j(\bar{r}, \bar{s}) / \partial q^k = 0 \quad (0 \leq i, k \leq n) \quad (A1)$$

differentiálegyenletekből (l. Pontrjagin, 51. §) az  $f^i(0, s) = \sigma^j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) kezdeti feltételekkel, amelyek elegendően kis  $q^k$  és  $\sigma^k$  esetén érvényesek.  $F_k^i = 0$  a kezdeti feltételekkel együtt egyértelműen meghatározza  $f^i$ -t adott  $v_j^i$ -re. A  $v_j^i(\bar{r})$  függvényeket viszont egyértelműen meghatározzák a

$$d\bar{w}_j^i(\tau)/d\tau = \delta_j^i + \sum_{k,m=0}^n \bar{c}_{km}^i \alpha^k \bar{w}_j^m(\tau); \quad (0 \leq i, j \leq n) \quad (A2)$$

$$\bar{w}_j^i(0) = 0$$



nikus koordinátákban az  $\bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$  ( $0 \leq i \leq n$ ;  $\bar{r} = q^0, \dots, q$ ;  $r = q^1, \dots, q^n$ ) analitikus függvények, amelyeket  $H$  valamilyen  $\mathfrak{M}$  környezetén definiáltunk, a kívánt (4.22a) alakúak egy olyan  $\xi(r, s)$  függvény mellett, amely eltűnik, ha  $r = s = e$ , úgyhogy (4.21) teljesül. Ezt mutatja, hogy  $\xi$  kanonikus, vagyis  $(\xi(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0$ , és hogy  $\xi FG$  lokális exponense, mivel  $H$ -n az asszociatív törvény a csoportszorzásra ekvivalens a (2.6) összefüggéssel, amely lokális exponenseket definiál (l. 2d §).

**4.9. LEMMA.** *Egy  $G$  Lie-csoport lokális exponenseinek ekvivalencia osztályai és  $G$   $\mathfrak{g}$  Lie-algebrájának infinitezimális exponensei ekvivalencia osztályai között egy-egyértelmű megfeleltetés áll fenn.*

*Bizonyítás.* A 4e § 4.4. Lemmája szerint elegendő a kanonikus lokális exponensek vizsgálata. Figyelembe véve a 4.7. és 4.8. Lemmát a megfeleltetést (4.31) biztosítja. Nemcsak az igaz, hogy minden  $(\xi)$  ekvivalencia osztály meghatároz (egyértelműen) egy  $(\Xi)$  ekvivalencia osztályt, hanem megfordítva is minden  $(\Xi)$  ekvivalencia osztály meghatároz (egyértelműen) egy  $(\xi)$  ekvivalencia osztályt.

Ez a megfeleltetés a  $\mathfrak{B}$  (2c §-ban bevezetett) vektortér lineáris leképezése  $\mathfrak{B}^*$ -ra. Következésképpen egy  $G$  Lie-csoportnál  $\mathfrak{B}$  dimenziója  $h^* = h_1 - h_2$  (vö. 4h. §).

A 4. § eddigi fő eredményeit a 4.1. Tétel foglalja össze.

**4.1. TÉTEL. 1.** *Egy  $G$  Lie-csoporton minden  $\xi(r, s)$  lokális exponens ekvivalens egy  $\xi'(r, s)$  kanonikus lokális exponenssel, amely valamely kanonikus környezeten analitikus  $r$  és  $s$  kanonikus koordinátáiban és eltűnik, ha  $r$  és  $s$  ugyanahhoz a lokális egy-paraméteres alcsoportoz tartozik. Két kanonikus lokális exponens akkor és csak akkor ekvivalens, ha  $\xi' = \xi + \Lambda[A]$  valamilyen kanonikus környezeten, ahol  $\Lambda(r)$   $r$  kanonikus koordinátáinak lineáris alakja.*

**2.**  *$G$  minden kanonikus lokális exponensének egyértelműen megfelel  $G$   $\mathfrak{g}$  Lie-algebrájának  $\Xi(a, b)$  infinitezimális exponense, vagyis egy bilineáris antiszimmetrikus*

egyenletek, ahol  $\bar{w}_j^i(\tau) = \tau_j^i(\tau \bar{a})$  egy egy-paraméteres alcsoportra ( $\bar{a}$  rögzített) és  $v_j^i(0) = \delta_j^i$ . Az (A1) és (A2) egyenleteket összevetjük a  $G$  csoportra vonatkozó megfelelő egyenletekkel,

$$F_k^i = v_k^i(r) - \sum_{j=1}^n v_j^i(f^2, \dots, f^n) \partial f^j(r, s) / \partial q^k = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (\text{B1})$$

az  $f^j(0, s) = \sigma^j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) kezdeti feltételekkel és

$$dw_j^i(\tau)/d\tau = \delta_j^i + \sum_{k,m=1}^n c_{km}^i \alpha^k w_j^m(\tau); \quad w_j^i(0) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad (\text{B2})$$

ahol  $w_j^i(\tau) = \tau v_j^i(\tau a)$  ( $a$  rögzített) és  $v_j^i(0) = \delta_j^i$ .

Leválasztva a 0-t a fennmaradó indexekből és (4.27)-et felhasználva először azt kapjuk (A2) és (B2)-ből:

$$\bar{v}_0^i = 0, \quad \bar{v}_0^0 = 1, \quad \bar{v}_j^i(\bar{r}) = v_j^i(r), \quad \bar{v}_j^0(\bar{r}) = z_j(r)$$

(a  $z_j$ -k csak  $r$ -től függenek). Most ezeket a függvényeket behelyettesítjük (A1)-be. (B1)-gyel egybevetve egyszerű elemzés után kapjuk

$$\begin{aligned} 1. \bar{F}_0^i &= 0\text{-ből: } \partial f^k / \partial q^0 = 0, & 2. \bar{F}_0^0 &= 0\text{-ből: } \partial f^0 / \partial q^0 = 1, \\ 3. \bar{F}_j^i &= 0\text{-ből: } f^i(\bar{r}, \bar{s}) = f^i(r, s), & 4. \bar{F}_i^0 &= 0\text{-ből: } \end{aligned}$$

$\bar{f}^0(\bar{r}, \bar{s}) = q^0 + \sigma^0 + \xi(r, s)$ , ahol a  $\xi(r, s)$  függvény eltűnik  $r = s = e$ -ben.

Az (A1) és (A2) egyenletek elvileg módszert adnak egy  $\xi$  kanonikus lokális exponensnek adott  $\Xi$  infinitezimális exponensből való megalkotására.



alak, amely eleget tesz a  $\Xi([a, a'], a'') + \Xi([a', a''], a) + \Xi([a'', a], a') = 0$  azonosságnak. A megfeleltetés lineáris.

3. Két  $\xi, \xi'$  kanonikus lokális exponens akkor és csak akkor ekvivalens, ha a megfelelő  $\Xi, \Xi'$  ekvivalensek, vagyis ha  $\Xi'(a, b) = \Xi(a, b) - \Lambda([a, b])$ , ahol  $\Lambda(a)$  lineáris alak  $g$ -n.

4. Egy-egyértelmű lineáris megfeleltetés áll fenn  $G$  lokális exponenseinek és  $g$  infinitezimális exponenseinek ekvivalencia osztályai között.

4k) Lokális exponensek ekvivalenciájának feltétele. A lokális Lie-csoportok elméletéből következő számos összefüggés a (4.22)-beli  $f^i$  függvényekre megfelelő összefüggésekre vezet a  $\xi$  lokális exponensekre is. Ezt a témát nem fogjuk tovább követni, csak arra szorítkozunk, hogy két  $\xi_1$  és  $\xi_2$  lokális exponens ekvivalenciájára egyszerű feltételt adjunk meg.

Tegyük fel, hogy valamilyen  $\mathfrak{N}$ -en  $\xi_1$  és  $\xi_2$   $C^2$  osztályúak (vagyis folytonos másodrendű parciális deriváltak vannak) a  $G$ -n választott koordinátákban, és legyen  $\xi$  egy lokális kanonikus exponens, amely ekvivalens az  $\eta = \xi_2 - \xi_1$  különbséggel, úgyhogy  $\mathfrak{N}_1$ -en  $\eta = \xi + \Delta[\xi]$ , ahol mind  $\xi$ , mind  $\xi$  szintén  $C^2$  osztályúak (l. 3. lábjegyzet, 4c §).  $\xi$  úgy választható, hogy  $\partial \xi(0)/\partial q^i = 0$  legyen ( $1 \leq i \leq n$ ). (Bizonyítás: Mivel ez a feltétel nem függ a  $G$ -n választott koordinátáktól,  $q^i$ -ről feltesszük, hogy kanonikus. Legyen  $\partial \xi(0)/\partial q^i = \zeta_i$ ,  $\Lambda(r) = \sum_{i=1}^n \zeta_i q^i$  és  $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$ . Akkor  $\eta = \xi' + \Delta[\xi']$ , ahol  $\xi'(r) = \xi(r) - \Lambda(r)$ , és  $\partial \xi'(0)/\partial q^i = 0$ , q. e. d.)

Legyen  $H$  a  $\xi$ -vel konstruált lokális csoport. (2.12) szerint  $\eta$ -t a  $q^0 = q^0 - \xi(r)$ ;  $q'^i = q^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) transzformációval vezettük be, amelyre a feltevésünk szerint  $\partial q'^i/\partial q^j = \delta_j^i$ ,  $\partial q^i/\partial q^j = 0$ -ban ( $0 \leq i \leq n$ ). Következésképpen a  $\tilde{c}_{ij} = \beta_{ij}$  struktúra-állandók megtartják a (4.28)-beli alakjukat, ha  $\xi$  helyére  $\eta$ -t helyettesítünk (vö. 4b §). Mivel  $\eta = \xi_2 - \xi_1 \equiv \xi$ , és a 4.7. Lemma szerint  $\xi \equiv 0$  akkor és csak akkor, ha (4.30) teljesül, a következő kritériumot kapjuk:

$G$ -nek két  $C^2$  osztályú  $\xi_1, \xi_2$  lokális exponense akkor és csak akkor ekvivalens, ha alkalmas  $\lambda_m$  konstansok mellett

$$\left( \frac{\partial^2 (\xi_1 - \xi_2)}{\partial q^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 (\xi_1 - \xi_2)}{\partial q^j \partial q^i} \right)_{[q^k = \sigma^k = 0]} = \sum_{m=1}^n c_{ij}^m \lambda_m. \quad (4.32)$$

4l) Egy sugár-ábrázolás infinitezimális generátorai.

1. Előzetes megjegyzések. Legyen  $V_r (r \in L)$  a  $\mathfrak{h}$  Hilbert-téren egy  $L$  Lie-csoport erősen folytonos unitér ábrázolása.  $L$  Lie-algebrájának  $b$  eleme által generált  $r(\tau)$  egy-paraméteres alcsoportot ( $r(\tau) = \exp(\tau b)$  Chevalley jelöléseivel [1], 116. old.) Stone tétele szerint  $V(\tau) = \exp(-i\tau B_b)$  ábrázolja, ahol  $B_b$  egy ön-adjungált (általában nem korlátos) operátor.  $B_b$ -t a  $V(\tau)$  operátorok egy-paraméteres csoportja infinitezimális generátorának nevezhetjük. Gårding [4] kimutatta, hogy létezik egy rögzített lineáris vektorrendszer, amely  $\mathfrak{H}$ -ban sűrű, ez legyen mondjuk  $\mathfrak{D}$ , amely bennfoglaltatik az összes  $B_b$ -k és véges szorzataik tartományaiban. Gårding eredményeiből következik, hogy  $\mathfrak{D}$ -n

$$B_{(\lambda b + \lambda' b')} = \lambda B_b + \lambda' B_{b'}; \quad B_b B_{b'} - B_{b'} B_b = i B_{[b, b']}. \quad (4.33)$$

(A  $B$  operátorok részletes vizsgálatára l. Segal [11].)



2. Tekintsük most egy  $G$  összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport  $U_r$  sugár-ábrázolását, és legyen  $U_r$  az ábrázolások megengedett halmaza az egész csoportra (a következő 5.1. Tételt figyelembevéve). Akkor a  $W(\theta, r) = e^{i\theta} U_r$  operátorok [l. (3.5a)] a  $H$  csoport egy ábrázolását szolgáltatják. Ennélfogva létezik  $(n+1)$  számú  $A_0, \dots, A_n$  infinitezimális generátor, amely megfelel  $H$   $\mathfrak{h}$  Lie-algebrája  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  bázisának.  $A_0 = -1$ .  $L$  helyére  $H$ -t,  $I$  helyére  $\mathfrak{h}$ -t és  $B$  helyére  $A$ -t írva (4.33)-ból és (4.27)-ből kapjuk:

$$A_k A_l - A_l A_k = i \sum_{m=1}^n c_{kl}^m A_m - i \beta_{kl} \cdot 1$$

$\mathfrak{H}$  valamilyen  $\mathfrak{D}$  halmazán. Nyilvánvaló a szoros analógia a kvantummechanikai felcserélési szabályokkal és Weyl különösen hangsúlyozta azt (l. [13] IV. 14. §). Ha  $G$  két-dimenziós Abel-csoport és  $P=A_1$ ,  $Q=A_2$ -t helyettesítünk és feltesszük, hogy  $\beta_{1,2}=1$ , valóban azt találjuk, hogy  $PQ = QP = -i \cdot 1$ .

### 5. §. Egy Lie-csoport lokális exponenseinek kiterjesztése

A Lie-csoportok exponenseinek általános tárgyalását avval zárjuk, hogy bebizonyítjuk (l. 6. lábjegyzet):

5.1. TÉTEL. *Legyen  $G$  egy összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport. Akkor  $G$  minden  $\xi$  lokális exponenséhez létezik  $G$ -nek  $\xi_0$  (az egész csoporton definiált) exponense, amely  $\xi$  egy kiterjesztése (l. 3d §). Ha  $\xi$  differenciálható,  $\xi_0$  is választható úgy, hogy differenciálható legyen.*

Ezen eredmény jelentőségét  $G$  sugár-ábrázolásainak osztályozásában már a 3. §-ban tárgyaltuk.

*Bizonyítás.* Az itt alkalmazott módszer Iwasawa módszerének ([6], 522. old.) közvetlen adaptációja minden lényeges változtatás nélkül. Mivel  $G$ -nek és exponenseinek már nem tisztán lokális tulajdonságaival foglalkozunk, a Lie-csoportok elméletének mélyrehatóbb eredményeit kell felhasználni.

1. Legyen  $\xi$   $G$ -nek egy kanonikus lokális exponense és  $H$  a  $\xi$ -ből (4.21) segítségével alkotott lokális Lie-csoport. Létezik egy teljes összefüggő és egyszeresen összefüggő  $H_1$  Lie-csoport, amely lokálisan izomorf  $H$ -val annak valamilyen  $\mathfrak{M}$  környezetén (l. Pontrjagin, 84. Tétel).  $H_1$  elemeit  $\bar{r}$ -sal jelöljük, és  $\mathfrak{M}$ -en azonosíthatók  $H$  elemeivel, úgyhogy  $H$  a  $H_1$  egy részét alkotja.

2.  $H \{\theta, e\}$  elemei olyan  $T$  lokális centrális egy-paraméteres alcsoportot alkotnak, amelyre  $H/T$  lokálisan izomorf  $G$ -vel,  $H$ -nak  $G$ -re való természetes homomorf leképezését

$$g(\bar{r}) = g(\theta, r) = r \quad (\bar{r} \in \mathfrak{M}; r \in G). \quad (5.1)$$

definiálja. A  $T$  lokális alcsoport kiterjeszthető  $H_1$ -nek  $T_1$  centrális egy-paraméteres alcsoportjára, amely összefüggő és egyszeresen összefüggő (vö. Pontrjagin, 85. tétel; Mostow [7], 1. Lemma, 611. old.). Így tehát  $T_1$  elemei  $\bar{i}(\theta)$  ( $-\infty < \theta < \infty$ ) alakúak, ahol  $\bar{i}(\theta)$   $\theta$ -nak analitikus függvénye (tetszőleges  $H_1$ -en analitikus koordinátákban),  $\bar{i}(\theta)\bar{i}(\theta'_1) = \bar{i}(\theta+\theta')$ , és  $\bar{i}(\theta) \neq \bar{i}'(\theta')$ , ha  $\theta \neq \theta'$ .  $H/T$ -nek  $G$ -vel való lokális izomorfizmusa kiterjed  $H_1/T_1$   $G$ -vel való izomorfizmusára, és ennek megfelelően



az (5.1) lokális homomorf leképezés a  $H_1$ -nek  $G$ -re való természetes homomorf leképezésére

$$g_1(\bar{r}) = r \quad (\bar{r} \in H_1, r \in G). \quad (5.2)$$

Ha  $\mathfrak{M}$ -t alkalmasan választottuk,  $g_1(\bar{r}) = g(\bar{r})$   $\mathfrak{M}$ -en. Továbbá

$$g_1(\bar{r}) = g_1(\bar{r}') \text{-ből következik } \bar{r}' = i(\theta) \bar{r} = \bar{r} i(\theta) \quad (5.3)$$

egyértelműen meghatározott  $\theta$  mellett.

Legyen  $\mathfrak{M}$  szferikus ( $|\bar{r}| < \kappa$ ), jelölje  $\mathfrak{N}$   $G$ -n az  $|r| < \kappa$  szferikus környezetet, és definiáljuk  $\mathfrak{N}$ -nek  $\mathfrak{M}$ -re való leképezését

$$\bar{h}(r) = \{0, r\} \quad (r \in \mathfrak{N}). \quad (5.4)$$

segítségével. Világos, hogy  $g(\bar{h}(r)) = r$ , ha  $r \in \mathfrak{N}$ .

3. Az  $r\mathfrak{N}$  ( $rs, s \in \mathfrak{N}$  szorzatokból álló) nyílt halmazok lefedik a  $G$  csoportot, és ezért egy  $r_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) sorozat kiválasztható úgy, hogy  $r_k\mathfrak{N}$  lefedje  $G$ -t. Anélkül, hogy ez az általánosság rovására menne, feltehetjük, hogy  $r_0 = e$ , és hogy  $r_{k+1}\mathfrak{N}$ -t nem tartalmazza az  $\mathfrak{U}_k = r_0\mathfrak{N} \cup r_1\mathfrak{N} \cup \dots \cup r_k\mathfrak{N}$  unió. Legyen  $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{N}$  és  $r_k\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{U}_k - \mathfrak{U}_{k-1}$  ( $k \geq 1$ ), ahol  $\mathfrak{Q}_k$  egy  $\mathfrak{N}$ -ben levő nem üres halmaz. Az  $r_k\mathfrak{Q}_k$  ( $k=0, 1, \dots$ ) halmazok nem összefüggőek és lefedik  $G$ -t.

Válasszunk ki  $H_1$ -ben egy olyan  $\bar{r}_k$  ( $k=0, 1, \dots$ ) sorozatot, hogy  $\bar{r}_0 = \bar{e}$  és  $g_1(\bar{r}_k) = r_k$  legyen. Definiáljuk most  $G$ -nek egy  $H_1$ -re való  $\bar{h}_1$  leképezését a következőképpen: Ha  $r \in r_k\mathfrak{Q}_k$ ,

$$\bar{h}_1(r) = \bar{r}_k \bar{h}(r'); \quad (r' = r_k^{-1}r \in \mathfrak{Q}_k \subset \mathfrak{N}).$$

(Általában persze  $\bar{h}_1$  nem folytonos.) Jegyezzük meg, hogy  $\bar{h}_1(r) = \bar{h}(r)$ , ha  $r \in \mathfrak{N}$  és hogy minden  $r$ -re

$$g_1(\bar{h}_1(r)) = g_1(\bar{r}_k) g_1(\bar{h}(r')) = r_k g(\bar{h}(r')) = r_k r' = r.$$

Ebből következik, hogy

$$g_1(\bar{h}_1(r) \bar{h}_1(s)) = g_1(\bar{h}_1(r)) g_1(\bar{h}_1(s)) = rs = g_1(\bar{h}_1(rs)).$$

Így (5.3) szerint

$$\bar{h}_1(r) \bar{h}_1(s) = i(\xi_1(r, s)) \bar{h}_1(rs) \quad (r, s \in G). \quad (5.5)$$

Itt  $\xi_1(r, s)$  valós értékű függvény (minden  $r, s \in G$ -re egyértelműen definiálva) a következő tulajdonságokkal:

$$\xi_1(r, s) = \hat{\xi}(r, s) \quad (r, s \in \mathfrak{N}_1) \quad (5.6)$$

ahol  $\mathfrak{N}_1$  egy rögzített környezet  $G$ -n, amelyet úgy választottunk, hogy  $\mathfrak{N}_1^2 \subset \mathfrak{N}$  legyen. [Ez (5.4)-ből következik és abból, hogy  $\bar{h}_1(r) = \bar{h}(r)$ , ha  $r \in \mathfrak{N}$ .]

$$\xi_1(e, e) = 0 \quad (5.7)$$

$$\xi_1(r, s) + \xi_1(rs, t) = \xi_1(s, t) + \xi_1(r, st) \quad (r, s, t \in G) \quad (5.8)$$

(5.7) (5.6)-ból következik és (5.8) pedig abból, hogy  $(\bar{h}_1(r) \bar{h}_1(s)) \bar{h}_1(t) = \bar{h}_1(r) (\bar{h}_1(s) \times \bar{h}_1(t))$ . Így  $\xi_1$  eleget tesz a  $G$  exponensét definiáló összefüggésnek, de általában nem folytonos.



4. A következő lépés az lesz, hogy  $\xi_1$ -t egy  $\xi_1''$  exponenssel helyettesítjük, amely differenciálható (tetszés szerinti  $H_1$ -en analitikus koordinátákban). Kimutatható, hogy  $\xi_1(r, s)$ :

- a) mérhető  $G$ -n bal és jobb invariáns mértékre vonatkoztatva;  
b) korlátos minden kompakt halmazon.

Ez igaz, ha  $\xi_1$ -t  $r$  és  $s$  kétváltozós függvényének tekintjük, és akkor is, ha  $\xi_1(r, s)$ -t rögzített  $r$  (vagy  $s$ ) mellett csak  $s$  (vagy csak  $r$ ) függvényének tekintjük. Ennélfogva  $\xi_1''(r, s)$  definiálható a (4.9), (4.10) és (4.11) egyenletekkel ( $\xi$  helyett  $\xi_1$ -t írva) minden  $r, s$ -re (vagyis anélkül, hogy  $r, s$ -t  $e$ -nek bizonyos környezeteire korlátoznánk). A (4.9) és (4.10)-beli integrálok végesek (mivel kompakt halmazokra terjednek ki), és a  $\xi, \xi_1', \xi_1'', \xi_1'''$  függvények mind rendelkeznek az a) és b) tulajdonsággal. Így (4.11)-ből:

$$\xi_1''(r, s) = \xi_1(r, s) + \Delta_{r,s}[\xi''] \quad (5.9)$$

kielégíti az (5.7) és (5.8) relációkat és differenciálható az egész  $G$  csoporton, vagyis  $\xi_1''$  differenciálható exponense  $G$ -nek. Elegendően kis  $\mathfrak{N}'$  környezeten (5.6)-ból kapjuk:

$$\xi''(r, s) = \hat{\xi}(r, s) + \Delta_{r,s}[\xi''] \quad (5.9a)$$

és  $\xi''(r)$  differenciálható, ha  $r \in \mathfrak{N}'^2$ .

5. A bizonyítás teljessé tételéhez legyen  $\xi$   $G$ -nek lokális exponense és  $\hat{\xi}$  egy  $\xi$ -vel ekvivalens kanonikus lokális exponens, úgy, hogy mondjuk  $\mathfrak{N}'$ -n

$$\hat{\xi} = \xi + \Delta[\xi], \quad (5.10)$$

és  $\hat{\xi}$  differenciálható  $\mathfrak{N}'$ -n, ha  $\xi$  differenciálható (l. a 4.2. Lemmát a 4c §-ban).

Legyen  $\kappa'$  az  $|r| < \kappa'$  szferikus környezet és definiálja  $\kappa'_i$ -t ( $i=1, 2$ )  $|r| < \kappa'_i$ , ahol  $\kappa'_1 < \kappa'_2 < \kappa'$ . Válasszunk most egy  $\Psi(r)$  ( $r \in G$ ) függvényt, amelynek a következők a tulajdonságai: 1.  $\Psi(r)$  differenciálható az egész  $G$  csoporton, 2.  $\Psi(r)=1$ , ha  $r \in \mathfrak{N}_1$ , 3.  $\Psi(r)=0$ , ha  $r$   $\mathfrak{N}_2$ -n kívül van. (Ilyen függvény könnyen konstruálható a 3c §-ban bevezetett  $\Phi(r)$  függvény analógiájára.) Ekkor  $\xi$  alkalmas kiterjesztése megkapható (5.9)-ből a

$$\xi_0(r, s) = \xi_1''(r, s) - \Delta_{r,s}[\xi_0] \quad (r, s \in G) \quad (5.11)$$

$$\xi_0(r) = \begin{cases} \Psi(r)(\hat{\xi}(r) + \xi''(r)) & \text{ha } r \in \mathfrak{N}' \\ 0 & \text{ha } r \notin \mathfrak{N}' \end{cases} \quad (5.11a)$$

helyettesítéssel.  $\xi_0$  mindig folytonos, és az egész csoporton differenciálható, ha  $\xi$  (és így  $\hat{\xi}$  is) differenciálható  $\mathfrak{N}'$ -n. Továbbá, (5.9a), (5.10), (5.11) és  $\Psi$  definíciója szerint  $\xi_0 = \xi$  egy elegendően kis környezeten. Tehát  $\xi_0$   $G$ -nek olyan exponense, amely a  $\xi$  lokális exponens kiterjesztése, és  $\xi_0$  differenciálható, ha  $\xi$  differenciálható, q. e. d.

*Megjegyzések.* 1. Az egyszerűen összefüggőség feltétele szükséges a tétel érvényességéhez. Kompakt, összefüggő  $G$  Ábel-csoport esetén például (l. 7b §-t) csak egy nullával egyenlő lokális exponens terjeszthető ki  $G$  exponensévé, míg a lokális exponensek ekvivalencia osztályainak  $\mathfrak{B}$  tere  $\frac{1}{2}n(n-1)$  dimenziós, ahol  $n$   $G$  dimenziója.



2. A 4f §-beli 4.6. Lemma szerint  $G$  kanonikus lokális exponense analitikus  $e$ -nek valamilyen környezetén. A tétel  $\xi$ -nek csak egy differenciálható kiterjesztésének létét bizonyítja, az analitikus kiterjesztését azonban nem. Ténylegesen könnyű a kanonikus lokális exponensekre olyan példákat találni (alkalmasan választott  $G$ -re), amelyeknek nincs analitikus kiterjesztése. A tétel arra a kérdésre sem ad választ, hogy vajon az ekvivalens exponensek mindegyik osztálya tartalmaz-e egy analitikus exponenst. (A 6. és 7. §-okban tanulmányozandó példákban minden ekvivalencia osztály tartalmaz egy analitikus exponenst.)

### 6. §. Példák

Most néhány példára alkalmazzuk a 4. § eredményeit, főképp a kvantumelméletben szerepet játszó csoportok esetén.

6a) *Ábel-csoportok.* (Ezt az esetet kiterjedten tárgyalja Weyl [13], 273—274. old.) Ha  $G$  egy  $n$ -dimenziós összefüggő és egyszeresen összefüggő Lie-csoport, amely Ábel-csoport, olyan  $q^k$  ( $-\infty < q^k < \infty$ ) kanonikus koordináták vezethetők be az egész csoportra, amelyekkel (4.1)  $f^i$  függvényei  $f^i(r, s) = q^i + s^i$ -re redukálódnak, és így az  $rs$  csoportszorzásból az  $r+s$  vektorösszeadás lesz. Amint azt a 4h. §-ban kimutattuk, ekkor minden antiszimmetrikus bilineáris alak a  $g$  Lie-algebrán egy infinitezimális exponens, és az infinitezimális exponensek ekvivalenciája egyenlőségre redukálódik.

Egy  $\xi$  lokális exponens eleget tesz a

$$\xi(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0 \quad (6.1a)$$

feltételnek, azonkívül a

$$\xi(0, 0) = 0 \quad (6.1b)$$

$$\xi(r, s) + \xi(r+s, t) = \xi(s, t) + \xi(r, s+t)$$

definíciós összefüggéseknek. Egy alkalmasan választott környezetben  $\xi$  analitikus és a  $\xi(r, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{(m)}(r, s)$  alakban írható, ahol  $\xi^{(m)}$   $r$  és  $s$  koordinátáinak  $m$ -edrendű homogén polinomja. A (6.1a) és (6.1b) egyenletek csak akkor teljesülnek, ha külön-külön minden  $\xi^{(m)}$ -re érvényesek; így minden  $\xi^{(m)}$  egy kanonikus lokális exponens. (4.28)  $\beta_{ij}$  kifejezései azonban minden  $\xi^{(m)}$ -re eltűnnek, kivéve esetleg  $\xi^{(2)}$ -t. Így  $\xi^{(m)} = 0$  ( $m \neq 2$ ) és  $\xi = \xi^{(2)}$ . (6.1a)-ból és (6.1b)-ből könnyen látható, hogy akkor  $\xi(r, s)$  egy antiszimmetrikus bilineáris alak  $r$ -re és  $s$ -re, és hogy megfordítva, minden antiszimmetrikus bilineáris alak exponens az egész  $G$  csoportra.

(4.23a)-ból következik, hogy a  $\xi$ -nek megfelelő infinitezimális exponenst  $\Xi(a, b) = 2\xi(a, b)$  adja. Így

$$\xi(r, s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} q^i \sigma^j \quad (\beta_{ij} = -\beta_{ji}). \quad (6.2)$$

Ezen  $\xi$ -k  $G$  nem-ekvivalens exponenseinek teljes rendszerét képviselik. (Ekvivalencia egyenlőséget jelent.)

Legyen  $U_r$   $G$  egy sugár-ábrázolásának (6.2)-vel kompatibilis ábrázoló operátor rendszere. Akkor az  $U_r U_s (U_r)^{-1} (U_s)^{-1}$  kommutátor (amelyet Weyl tárgyal),



egyenlő  $e^{2i\xi(r,s)} \cdot 1$ -gyel. (Figyeljük meg, hogy a kommutátor független az ábrázoló operátorok választásától.)

6b) *Pseudo-ortogonális csoportok.* A következőkben tenzor jelölést használunk és különösen a tenzorkalkulus összegzési konvencióját.

Legyen  $g_{ik} x^i x^k$   $m$  számú valós  $x^i$  változó nem-szinguláris kvadratikusan alakja. [A  $g_{ik}$  és  $g^{ik}$  szimmetrikus tenzorokat ( $g^{ij} g_{kj} = \delta_k^i$ ) fogjuk használni az indexek le- és felhúzására.] Egy  $x'^i = w_k^i x^k$  (vagy röviden  $x' = Wx$ ) valós homogén lineáris transzformációt, amellyel szemben az  $x_i x^i = g_{ik} x^i x^k$  kvadratikusan alak invariáns, *pseudo-ortogonális* transzformációnak fogunk nevezni. Az ortogonális transzformációk ( $g_{ik} = \delta_{ik}$ ) speciális esetei, a Lorentz-transzformációk és a de Sitter-csoport transzformációi különösen érdeklődésre tartanak számot a kvantumelméletben.

Alkalmas koordinátákban  $g_{ik}$  diagonális  $\pm 1$  elemekkel. Akkor

$$x_i x^i = \sum_{i=1}^p (x_i)^2 - \sum_{i=p+1}^m (x_i)^2.$$

A  $W$  pseudo-ortogonális transzformációk csoportját a fentiekkel összhangban  $G_p^m$ -vel fogjuk jelölni. Mivel  $g$  és  $-g$  ugyanazt a transzformációt hozza létre,  $G_p^m = G_{m-p}^m$ .

$G_p^m$  identitás-komponensét (azaz a csoportnak azt az összefüggő komponensét, amely tartalmazza az egységelemet)  $G_p^m$ -vel jelöljük.  $W \in G_p^m$ -be tartozik, ha determinánsa 1, és ha az első  $p$  sor és oszlop  $w_k^i$  elemeiből alkotott  $p$ -ed rendű al-determináns pozitív. (Ily módon  $G_p^m$   $W$ -t valódi ortogonális transzformációkra ( $p=m$ ), valódi Lorentz-transzformációkra stb. korlátozza.)

Következőként az *inhomogén* pseudo-ortogonális transzformációk  $I_p^m$  csoportját nézzük:

$$x'^i = w_k^i x^k + u^i \quad \text{vagy} \quad x' = Wx + u, \quad (6.3)$$

ahol  $W \in G_p^m$  egy eleme, és  $u$  tetszőleges transláció. Az  $I_p^m$  identitás komponensét megkapjuk, ha  $W$ -t  $G_p^m$ -re korlátozzuk.

Két (6.3) típusú transzformációt egymás után alkalmazva:  $x' = Wx + u$ ,  $x'' = W'x' + u'$ , kapjuk:  $x'' = W'Wx + (W'u + u')$  úgy, hogy  $I_p^m$ -n a csoport szorzás definíciója:

$$(W'u)(W, u) = (W'W, W'u + u'), \quad (6.4)$$

ha a (6.3) transzformációt  $(W, u)$ -val jelöljük. (6.4)  $m+1$ -ed rendű mátrixok szorzásaként interpretálható

$$\begin{pmatrix} W & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.4a)$$

ahol az utolsó oszlop az  $u$  vektorból és az 1 konstansból áll.  $I_p^m$  egységeleme  $(1, 0)$ , és  $(W, u)$  inverze  $(W^{-1}, -W^{-1}u)$ . Az  $(1, u)$  translációk  $T_m$  csoportja invariáns Ábel-alcsoportja  $I_p^m$ -nek, és  $I_p^m/T_m \cong G_p^m$ .

$$G_p^m \text{ és } I_p^m \text{ dimenziója } \frac{1}{2} m(m-1) \text{ ill. } \frac{1}{2} m(m+1).$$

6c)  $G_p^m$  és  $I_p^m$  Lie-algebrája. Ha egy  $n$ -dimenziós  $G$  Lie-csoportot  $l$ -ed rendű valós vagy komplex  $Z(r)$  mátrixokkal ábrázolunk, amelyekre  $Z(r)Z(s) = Z(r, s)$ ,



$Z(e)=1$ , és  $Z(r)$  mátrixelemei  $q^k$  koordinátái szerint folytonos parciális deriváltakal rendelkeznek,  $G$  g Lie-algebrája lineárisan képeződik le a  $\sum_{h=1}^n \gamma^h K_h$  lineárkombinációk rendszerére, ahol  $K_h = \partial Z(e)/\partial q^h Z(r)$  infinitezimális generátorai. Legyen  $a_1, \dots, a_n$  g-nek a  $q^k$  koordinátákra adaptált standard bázisa. Akkor  $a_h \rightarrow K_h$  és általánosabban

$$a = \sum_{h=1}^n \gamma^h a_h \rightarrow \sum_{h=1}^n \gamma^h K_h = K_a. \quad (6.5)$$

és

$$[a, b] \rightarrow K_{[a, b]} = K_a K_b - K_b K_a. \quad (6.6)$$

Ha a  $K_h$  mátrixok lineárisan függetlenek (valós együtthatókra vonatkoztatva), a leképezés kölcsönösen egyértelmű, és a  $K_a K_b - K_b K_a$  kommutátor meghatározza  $[a, b]$ -t és így a csoport struktúra-állandóit is.  $G_p^m$ -re  $Z(r)=W$ ,  $l=m$ ;  $I_p^m$ -re  $Z(r)$ -t (6.4a) adja meg, és  $l = m+1$ .

Az egységelem  $\mathfrak{R}$  környezetén a következő koordinátákat vezethetjük be  $G_p^m$ -ben és  $I_p^m$ -ben. Minden  $W$ , az egységmátrixhoz elég közeli mátrix egyértelműen leírható egy  $W = \exp P = 1 + P + \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{3!} P^3 + \dots$ , exponenciális függvényvel, ahol  $P$  egy mátrix elegendően kis abszolút értékű  $q_k^i$  valós elemekkel.  $W$  akkor és csak akkor tartozik  $G_p^m$ -hez, ha

$$q^{ij} + q^{ji} = 0, \quad q^{ij} = g^{jk} q_k^i. \quad (6.7)$$

$G_p^m$ -ben az  $\frac{1}{2} m(m-1)$  számú  $q^{ij}$  ( $i < j$ ) változót  $\mathfrak{R}$ -beli koordinátáknak tekinthetjük;  $I_p^m$ -ben ezekhez mindössze hozzáteesszük  $u$   $m$  számú komponensét.

A  $K$  mátrixok alakja

$$M \quad (G_p^m) \quad (6.8a)$$

$$\begin{pmatrix} M & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (I_p^m) \quad (6.8b)$$

a két csoportra. Itt  $M$  elemei:  $\mu_k^i = g_{kj} \mu^{ij}$  ( $\mu^{ij} + \mu^{ji} = 0$ ) és  $k$  tetszőleges vektor. Jelöljük  $M_{ij}$ -vel ( $i \neq j$ ) azt a mátrixot, amelyre  $\mu^{ij} = -\mu^{ji} = 1$ , míg az összes többi  $\mu^{kh} = 0$ ,  $k_i$ -vel azt a vektort, melynek komponensei  $\kappa^j = \delta_j^i$ , és legyen  $M_{ii} = 0$  (nem összegzés!).

g standard bázisa  $\frac{1}{2} m(m-1)$  számú  $a_{ij}$  ( $i < j$ ) ( $a$   $q^{ij}$  koordinátáknak megfelelő) vektorból áll  $G_p^m$ -re, és  $m$  további  $b_i$  (az  $u^i$  koordinátáknak megfelelő) vektorból  $I_p^m$ -re. Célszerűség kedvéért definiáljuk továbbá:  $a_{ji} = -a_{ij}$  ( $i < j$ ), és  $a_{ii} = 0$  (nem összegzés!), úgyhogy minden index-kombinációra

$$a_{ij} + a_{ji} = 0. \quad (6.9)$$

Akkor az  $a \rightarrow K_a$  hozzárendelést

$$a_{ij} \rightarrow M_{ij} \quad (G_p^m) \quad (6.10a)$$

és

$$a_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} M_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b_i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & k_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (I_p^m). \quad (6.10b)$$



adják. (Ha  $g_{ik}$  diagonális,  $a_{ij}$  az  $x_i - x_j$  sík önmagába való transzformációit és  $b_i$  az  $i$ -edik irányú translációkat generál.)

(6.6)-ból és (6.10)-ból a  $\mathfrak{g}$  Lie-algebrákat a

$$[a_{ij}, a_{kl}] = g_{jk}a_{il} - g_{ik}a_{jl} + g_{il}a_{jk} - g_{jl}a_{ik} \quad (G_p^m \text{ és } I_p^m) \quad (6.11a)$$

$$[a_{ij}, b_k] = g_{jk}b_i - g_{ik}b_j \quad [b_i, b_j] = 0 \quad (I_p^m) \quad (6.11b)$$

jól ismert alakban kapjuk, azaz  $G_p^m$  Lie-algebráját (6.11a),  $I_p^m$ -ét pedig (6.11a) és (6.11b) együttesen definiálják. (Ha  $m=2$ ,  $G_p^m$  egy-paraméteres csoport, és a (6.11a) egyenletek üresek.)

Bevezetve  $a_i^l = g_{ik}a_{ik}$ -t, (6.11a)-ból és (6.11b)-ből kapjuk:

$$[a_i^l, a_{jl}] = (m-2)a_{il} \quad (6.11c)$$

$$[a_i^l, b_j] = (m-1)b_i. \quad (6.11d)$$

6d) Az infinitezimális exponensek meghatározása.

I. Tegyük fel, hogy  $m > 2$ . Legyen  $\Xi$   $G_p^m$  vagy  $I_p^m$  Lie-algebrájának infinitezimális exponense, és

$$\xi_{ij,kl} = \Xi(a_{ij}, a_{kl}). \quad (6.12)$$

(6.9)-ből és  $\Xi$  antiszimmetrikus voltából következik, hogy

$$\xi_{kl,ij} = -\xi_{ij,kl}; \quad \xi_{ji,kl} = \xi_{ij,lk} = -\xi_{ij,kl}. \quad (6.12a)$$

(6.11c) szerint  $(m-2)\xi_{ij,kl} = \Xi([a_i^h, a_{hj}], a_{kl})$ , és így (4.24a)-ból

$$\begin{aligned} (m-2)\xi_{ij,kl} &= \Xi(a_i^h, [a_{hj}, a_{kl}]) + \Xi(a_{hj}, [a_{kl}, a_i^h]) \\ &= \Xi(a_i^h, [a_{hj}, a_{kl}]) - \Xi(a_j^h, [a_{hi}, a_{kl}]). \end{aligned}$$

A zárójelekbe beírva (6.11a)-beli értékeiket és felhasználva (6.12a)-t kapjuk:

$$\begin{aligned} (m-2)\xi_{ij,kl} &= g_{jk}\xi_{i,hl}^h - \xi_{ik,jl} + \xi_{il,jk} - g_{jl}\xi_{i,hk}^h - \\ &\quad - g_{ik}\xi_{j,hl}^h + \xi_{jk,il} - \xi_{jl,ik} + g_{il}\xi_{j,hk}^h \\ \Xi(a_{ij}, a_{kl}) &= \xi_{ij,kl} = g_{jk}\tau_{il} - g_{ik}\tau_{jl} + g_{il}\tau_{jk} - g_{jl}\tau_{ik} \\ \tau_{ik} &= -\tau_{ki} = (m-2)^{-1}\xi_{i,hk}^h. \end{aligned} \quad (6.13)$$

$[\tau_{ik} \text{ } i, k \text{ szerinti antiszimmetriája (6.12a)-ból következik.}]$

Definiáljunk  $G_p^m$  Lie-algebráján egy  $\Lambda$  lineáris alakot  $\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij} = -\tau_{ji}$ -vel. Akkor (6.11a) szerint  $\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = \Xi(a_{ij}, a_{kl})$ . Így  $G_p^m$ -re  $\Xi = d[\Lambda] \equiv 0$ . ( $m=2$ -re triviális, hogy  $\Xi \equiv 0$ .) A 4i. § 4.7. Lemmáját tekintetbe véve (l. a Korolláriumot) azt találjuk, hogy

$$G_p^m \text{ } (m \geq 2) \text{ minden lokális exponense nullával egyenlő.} \quad (6.14)$$

II.  $I_p^m$  ( $m > 2$ ) esetére még meg kell határozni  $\Xi(a_{ij}, b_k)$ -t és  $\Xi(b_i, b_k)$ -t. Legyen

$$\Xi(a_{ij}, b_k) = \eta_{ij,k} = -\eta_{ji,k}.$$



(6.11d), (4.24a) és (6.11b) alapján

$$\begin{aligned}(m-1)\eta_{ij,k} &= \Xi(a_{ij}, [a_k^h, b_h]) = \Xi([a_{ij}, a_k^h], b_h) + \Xi(a_k^h, [a_{ij}, b_h]) = \\ &= g_{jk}\eta_{i,h}^h - g_{ik}\eta_{j,h}^h + \eta_{jk,i} + \eta_{ik,j} + \eta_{ki,j} - \eta_{ki,j} \\ \Xi(a_{ij}, b_k) &= g_{jk}\theta_i - g_{ik}\theta_j; \quad \theta_i = (m-1)^{-1}\eta_{i,h}^h.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Végül ismét (6.11d), (4.24a) és (6.11b)-ből:

$$\begin{aligned}(m-1)\Xi(b_i, b_j) &= \Xi([a_i^h, a_h], b_j) = \Xi([a_i^h, b_j], b_h) \\ &= \delta_j^h \Xi(b_i, b_h) - g_{ij} \Xi(b^h, b_h).\end{aligned}$$

Az antiszimmetria miatt  $\Xi(b^h, b_h) = 0$ . Így  $(m-2)\Xi(b_i, b_j) = 0$  és

$$\Xi(b_i, b_j) = 0. \quad (6.16)$$

Definiáljunk  $I_p^m$  Lie-algebráján egy  $\Lambda$  lineáris alakot  $\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij} = -\tau_{ji}$ ,  $\Lambda(b_i) = \theta_i''$ -vel. A (6.13), (6.15) és (6.16)-tal való egybevetés azt mutatja, hogy akkor  $\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = \Xi(a_{ij}, a_{kl})$ ,  $\Lambda([a_{ij}, b_k]) = \Xi(a_{ij}, b_k)$  és  $\Lambda([b_i, b_j]) = 0 = \Xi(b_i, b_j)$ . Így  $\Xi = d[\Lambda] \equiv 0$ . Mint előbb, ezt találjuk:

$$I_p^m \ (m > 2) \text{ minden lokális exponense nullával egyenlő.} \quad (6.17)$$

III. Az  $I_p^2$  csoport. Ha  $m=2$ , (6.17) már nem érvényes többé. Tegyük fel, hogy  $g_{ik}$  diagonális. Akkor (6.11b) szerint

$$[a_{12}, b_1] = -g_{11}b_2, [a_{12}, b_2] = g_{22}b_1, [b_1, b_2] = 0.$$

A (4.24a) feltételek üressé válnak (helyettesítsünk  $a=a_{12}$ ,  $a'=b_1$ ,  $a''=b_2$ -t). Így tehát minden  $\Xi$  antiszimmetrikus bilineáris alak egy infinitezimális exponens. Ha  $\Xi = d[\Lambda]$ ,

$$\Xi(a_{12}, b_1) = -g_{11}\Lambda(b_2), \Xi(a_{12}, b_2) = g_{22}\Lambda(b_1), \Xi(b_1, b_2) = 0.$$

Mivel  $\Lambda(b_i)$  tetszés szerint választható, következésképpen  $\Xi \equiv 0$  akkor és csak akkor, ha  $\Xi(b_1, b_2) = 0$ . Ennélfogva  $\Xi$  ekvivalencia osztályainak  $\mathfrak{B}^*$  tere egydimenziós, és  $I_p^2$  (vagy  $I_p'^2$ )  $\xi$  nem-ekvivalens lokális exponenseinek teljes rendszere tetszőleges  $\xi_0 \neq 0$  összes többszöröseiből áll. Ilyen  $\xi_0$  exponens (az egész  $I_p'^2$  csoportra definiálva):

$$\xi_0(r, s) = D(u, Wu'); \quad r = (W, u), \quad s = (W', u'),$$

ahol  $D(u, v)$  az  $u$  és  $v$  vektorok determinánsa. Könnyű meggyőződni arról [(4.32)-ből], hogy  $\xi_0 \neq 0$ ,<sup>8</sup> és arról is, hogy (2.5) és (2.6) érvényes az  $I_p'^2$  csoport összes elemére [l. (6.4)], mert ilyenkor  $W$  determinánsa 1.

6e)  $G_p^m$  és  $I_p^m$  fedőcsoportjai és sugár-ábrázolásai. Legyen  $G_p^{*m}$  és  $I_p^{*m}G_p^m$  és  $I_p^m$  univerzális fedőcsoportja, és jelöljük  $G_p^{*m}$  elemeit  $r, s \dots$ -vel. Minden  $r$ -nek egyértel-

<sup>8</sup> Azt az elemi tényt is felhasználhatjuk, hogy  $\xi \equiv 0$  maga után vonja, hogy  $\xi(r, s) = \xi(s, r)$ , valahányszor  $rs = sr$ .  $\xi_0$  esetén ezt a feltételt megsérti az  $r = (1, u)$ ,  $s = (1, u')$  eset, ha  $u$  és  $u'$  lineárisan függetlenek.



műen megfelel  $G_p^m$  egy eleme és így egy  $W(r)$  mátrix.  $I_p^{*m}$  elemeit  $(r, u)$  topologikus szorzat adja és a csoportszorzást  $I_p^{*m}$ -n

$$(r', u') \cdot (r, u) = (r' r, W(r')u + u') \quad (r', r \in G_p^{*m}) \quad (6.18)$$

definiálja.

Fennáll, hogy  $G_p^m = G_p^*/N_p^m$  és  $I_p^m = I_p^*/\hat{N}_p^m$ , ahol  $N_p^m$  és  $\hat{N}_p^m$   $G_p^{*m}$ , ill.  $I_p^{*m}$  diszkrét centrális alcsoportjai.  $\hat{N}_p^m$  elemeit  $(t, 0)$  alakúak,  $t \in N_p^m$ , úgy, hogy  $N_p^m \cong \hat{N}_p^m$ . Végül  $N_p^m$  két ciklikus csoport direkt szorzata:

$$N_p^m \cong C_p \times C_{m-p}. \quad (6.19)$$

$C_p$  másodrendű, ha  $p \geq 3$ ,  $C_2$  egy végtelen ciklikus csoport és  $C_p$  elsőrendű, ha  $p = 1$  vagy 0 (amely esetben elhagyható a szorzatból). A forgás- és a Lorentz-csoportra  $N_3^3 \cong N_3^4 \cong C_3$  másodrendű annak a jól ismert ténynek megfelelően, hogy ezeket a csoportokat a  $G_3^{*3}$  és  $G_3^{*4}$  spinorcsoportjaik kétszeresen lefedik.

**Sugár-ábrázolások.** Tegyük fel, hogy  $m \geq 3$ . Tekintetbe véve a 3.2. Tételt (3b §) (6.14)-ből és (6.17)-ből arra következtethetünk, hogy  $G_p^{*m}$  (vagy  $I_p^{*m}$ ) minden ábrázolását egy közönséges ( $U$ ) ábrázolás indukálja. Ez viszont  $G_p^m$  (vagy  $I_p^m$ ) egy sugár-ábrázolásához vezet, ha  $N_p^m$  (vagy  $\hat{N}_p^m$ ) minden  $t$  elemére  $U_t = \chi(t)$ . (ami mindig igaz, ha az ábrázolás irreducibilis). Mivel minden  $U_t G_p^m$  (vagy  $I_p^m$ ) egységelemét képviseli és  $\chi(t)\chi(t') = \chi(tt')$ , az ilyen ábrázolás lehetséges „sokrétűsége” következtethető (6.19)-ből. (A  $G_3^{*5}$  de Sitter-csoport ilyen vonatkozású tárgyalását l. Wigner [16].)

6f) *A Galilei-csoport.* Az utolsó tárgyalandó példa azon nem-relativisztikus transzformációk csoportja, amely két inerciarendszert köt össze (a koordinátatengelyek elforgatásait és térbeli és időbeli transzlációkat beleértve). Legyen  $x$  a koordinátavektor ( $x^1, x^2, x^3$  komponensekkel) és  $\tau$  az idő. Akkor a  $G$  Galilei-csoport transzformációi

$$x' = Wx + \tau v + u \quad (6.20)$$

$$\tau' = \tau + \eta,$$

ahol  $W$  egy ortogonális transzformáció, azaz  $G_3^3$ -nak egy eleme,  $v$  és  $u$  tetszőleges vektorok ( $v$  a két inerciarendszer relatív sebessége), és  $\eta$  valós szám. Így tehát  $G$  10-dimenziós.

Ha  $G$   $r$  elemeit  $(W, \eta, v, u)$ -val jelöljük, a csoportszorzást

$$(W, \eta, v, u) \cdot (W', \eta', v', u') = (WW', \eta + \eta', Wv' + v, Wu' + u + \eta'v) \quad (6.21)$$

adja, vagy a

$$Z(r) = \begin{pmatrix} W & v & u \\ 0 & 1 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

5×5-ös mátrixok szorzása.  $G$  egységeleme  $(1, 0, 0, 0)$  és az  $r^{-1}$  inverzet

$$(W^{-1}, -\eta, -W^{-1}v, -W^{-1}(u - \eta v))$$



adja. Megjegyezzük, hogy  $G$  minden eleme így írható:

$$(W, \eta, v, u) = (1, 0, v, 0) \cdot (W, \eta, 0, u). \quad (6.21a)$$

(A jobb oldal első tényezőjét *valódi* Galilei-transzformációnak tekinthetjük.) Mint előbb is,  $G$ -n az egységelem környezetbeli koordinátáknak választhatjuk a három  $Q_{ij}$  ( $i < j$ ) koordinátát [l. (6.7), ahol most  $g_{ik} = \delta_{ik}$ ],  $u$  és  $vu^i, v^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) komponenseit és  $\eta$ -t.

$G$  Lie-algebrája. A  $K$  infinitezimális transzformációk

$$K = (M, \Phi, k', k) = \begin{pmatrix} M & k' & k \\ 0 & 0 & \Phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

alakúak [vö. (6.8)], ahol  $M$  definíciója ugyanaz, mint előbb ( $G$ -re ez egy antiszimmetrikus mátrix),  $k$  és  $k'$  tetszőleges vektorok és  $\Phi$  egy valós szám.

A  $g$  Lie-algebra standard bázisának vektorait  $a_{ij}$  ( $i < j$ ),  $b_i$ ,  $d_j$  és  $f$ -fel jelöljük, és  $a_{ij}$ -t ( $i \geq j$ ) (6.9) definiálja. Az  $a \rightarrow K_a$  hozzárendelésre kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\rightarrow (M_{ij}, 0, 0, 0), & b_j &\rightarrow (0, 0, 0, k_i) \\ d_i &\rightarrow (0, 0, k_i, 0), & f &\rightarrow (0, 1, 0, 0), \end{aligned} \quad (6.24)$$

ahol a  $k_i$  vektor komponensei  $\kappa^j = \delta_i^j$ . A  $b_i$ -k translációkat hoznak létre és a  $d_i$ -k tiszta Galilei-transzformációkat. (6.6), (6.23) és (6.24)-ből kapjuk a  $g$  Lie-algebrát:

$$[a_{ij}, a_{kl}] = \delta_{jk} a_i - \delta_{ik} a_{jl} + \delta_{il} a_{jk} - \delta_{jl} a_{ik} \quad (6.25a)$$

$$[a_{ij}, b_k] = \delta_{jk} b_i - \delta_{ik} b_j; \quad [b_i, b_j] = 0 \quad (6.25b)$$

$$[a_{ij}, d_k] = \delta_{jk} d_i - \delta_{ik} d_j; \quad [d_i, d_j] = 0; \quad [d_i, b_j] = 0 \quad (6.25c)$$

$$[a_{ij}, f] = 0; \quad [b_k, f] = 0; \quad [d_k, f] = b_k. \quad (6.25d)$$

*Az infinitezimális exponensek meghatározása.* Legyen  $\Xi$   $g$ -nek egy infinitezimális exponense. Megjegyezzük, hogy  $G$ -nek mind  $(W, 0, u, 0)$ , mind  $(W, 0, 0, v)$  elemei  $I_3^3$ -mal izomorf alcsoportokat alkotnak, és ennek megfelelően mind az  $a_{ij}$ ,  $b_k$ , mind az  $a_{ij}$ ,  $d_k$  vektorok  $g$   $I_3^3$  Lie-algebrájával izomorf szubalgebrákat feszítik ki. Így a 6d § eredményei érvényesek ( $g_{ik} = \delta_{ik}$ ,  $m = 3$  mellett). Következésképpen fennáll (6.13), (6.15), (6.16) és azonkívül

$$\Xi(a_{ij}, d_k) = \delta_{jk} \theta'_i - \delta_{ik} \theta'_j; \quad \theta'_i = \frac{1}{2} \Xi(a_i^j, d_j) \quad (6.26)$$

$$\Xi(d_i, d_j) = 0.$$

Legyen most  $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$ , ahol a  $\Lambda$  lineáris alakot

$$\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij} = -\tau_{ji}, \quad \Lambda(b_i) = \theta_i, \quad \Lambda(d_i) = \theta'_i, \quad \Lambda(f) = 0$$

definiálja. (6.13), (6.15), (6.16) és (6.26) most ezt adja:

$$\Xi'(a_{ij}, a_{kl}) = 0, \quad \Xi'(a_{ij}, b_k) = \Xi'(a_{ij}, d_k) = 0 \quad (6.27a)$$

$$\Xi(b_i, b_j) = \Xi'(d_i, d_j) = 0.$$



Következőnek (6.11b), (4.24a) és (6.25c) felhasználásával:

$$\begin{aligned} 2\Xi'(b_i, d_k) &= \Xi'([a_i^j, b_j], d_k) \\ &= \Xi'([a_i^j, d_k], b_j) + \Xi'([d_k, b_j], a_i^j) \\ &= -\Xi'(b_k, d_i) + \delta_{ik}\Xi'(b^j, d_j). \end{aligned}$$

Ezt  $2\Xi'(b_k, d_i) = -\Xi'(b_i, d_k) + \delta_{ik}\Xi'(b^j d_j)$ -vel kombinálva kapjuk:

$$\Xi'(b_i, d_k) = \gamma \delta^{ik} \left[ \gamma = \frac{1}{3} \Xi'(b^j, d_j) \right].$$

$\Xi'$  fennmaradó elemeit

$$d\Xi(a_i^h, a_{hj}, f) = 0, \quad d\Xi(a_i^j, b_j, f) = 0, \quad d\Xi(a_i^j, d_j, f) = 0.$$

ból kapjuk [l. (4.24)]. A zárójelekbe beírva a (6.25)-beli kifejezéseiket és (6.27a)-t felhasználva kapjuk:

$$\Xi'(a_{ij}, f) = 0, \quad \Xi'(b_i, f) = 0, \quad \Xi'(d_i, f) = 0. \quad (6.27b)$$

Tehát  $\Xi'$  eltűnik minden bázisvektor párra az egyetlen lehetséges kivétellel:

$$\Xi'(b_i, d_k) = -\Xi'(d_k, b_i) = \gamma \delta_{ik}. \quad (6.27a)$$

Megfordítva, a (6.27a, b, c) által definiált  $\Xi'$  antiszimmetrikus alak minden  $\gamma$ -ra infinitezimális exponens, mert  $d\Xi'$  eltűnik a bázisvektorok minden kombinációjára, amint az közvetlenül belátható. Ezenkívül  $\Xi' \neq 0$ , ha  $\gamma \neq 0$ , mert  $\Xi = d[A]$  éppen azt jelenti, hogy  $\Xi(b_i, d_k) = \Lambda([b_i, d_k]) = 0$ . Tehát az infinitezimális exponensek ekvivalencia-osztályainak halmaza *egydimenziós*.

*G exponensei.* Ennélfogva  $G$   $\xi$  nem-ekvivalens exponenseinek teljes rendszere egy rögzített  $\xi_0 \neq 0$  exponens összes többszöröséből áll. Egy alkalmas választás<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \xi_0(r, s) &= \frac{1}{2} \{u \cdot Wv' - v \cdot Wu' + \eta' v \cdot Wv'\} \\ r &= (W, \eta, v, u) \quad s = (W', \eta', v', u'), \end{aligned} \quad (6.28)$$

ahol  $u \cdot v$  két  $u$  és  $v$  vektor közönséges skaláris szorzata. Könnyű belátni [(6.21)-ből], hogy  $\xi_0(r, s)$   $G$  minden  $r, s, t$  elemére eleget tesz a (2.5) és (2.6) definíciós relációknak, és ennélfogva egy az egész csoporton definiált exponens. Azonkívül  $\xi_0 \neq 0$ . Ez abból

<sup>9</sup> Vázzoljuk  $\xi_0$  megalkotását. Jelöljük  $G$  elemeit  $(\varrho, z)$ -vel, ahol a  $z$  vektor 6 komponense az  $u^i$ -k,  $v^i$ -k,  $\varrho$  jelöli a fennmaradó  $\varrho_{ij}$  és  $\gamma$  koordinátákat. Írjuk fel (6.21)-t a  $(\varrho, z) \cdot (\varrho', z') = (\varrho'', z'')$  formában. Akkor  $z''$  és  $z'$  homogén lineáris függvénye  $\varrho$ -tól és  $\varrho'$ -től függő együtthatókkal. Tegyük fel, hogy a  $\xi$  exponens analitikus és legyen (a 6a §-ban követett eljáráshoz hasonlóan)  $\xi(r, r') = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{(n)}(r, r')$ , ahol  $\xi^{(n)} z$  és  $z'$  komponenseinek  $n$ -ed rendű homogén polinomja, amelynek együtthatói  $\varrho$ -tól és  $\varrho'$ -től függenek. Mivel a csoportszorzás lineáris  $z$ -ben és  $z'$ -ben, a (2.5) és (2.6) összefüggések csak akkor lehetnek érvényesek, ha minden  $\xi^{(n)}$ -re külön-külön érvényesek úgy, hogy minden  $\xi^{(n)}$  egy lokális exponens. (4.32)-ből következik ( $\xi_1 = \xi^{(1)}$ -t,  $\xi_2 = 0$ -t írva), hogy minden  $\xi^{(n)} \equiv 0$   $\xi^{(2)}$  lehetséges kivételével. Avval a feltevéssel, hogy  $\xi^{(2)}$  bilineáris  $z$ -ben és  $z'$ -ben, (2.6) egyszerű, könnyen megoldható függvényegyenleteket szolgáltat  $\xi^{(2)}$  együtthatóira. Az eredmény:  $\xi^{(2)} = \gamma \xi_0 + \gamma' \xi'(\gamma, \gamma'$  konstans), ahol  $\xi' = v \cdot Wv' = 0$ . (Valójában  $\xi' = d[\xi]$ ,  $\xi(r) = -\frac{1}{2} v \cdot v$ ).



a tényből következtethető, hogy a megfelelő  $\Xi_0$  ekvivalens a fent definiált  $\Xi'$  infinitezimális exponenssel (ha  $\gamma=1$ ) [l. (4.32)], vagy elemi módon úgy látható be, hogy kimutatjuk, hogy megfelelő  $r, s$ -re  $\xi_0(r, s) \neq \xi_0(s, r)$ , bár  $(rs=sr)$  (l. 8. lábjegyzet). [Válasszunk (6.28)-ban  $r=(1, 0, 0, u)$ -t,  $s=(1, 0, v', 0)$ -t. Akkor  $rs=sr=(1, 0, v', u)$ , de  $\xi_0(r, s) - \xi_0(s, r) = u \cdot v'$ .]  $\xi_0$  nem kanonikus, de legalább  $\xi_0(r, r^{-1})=0$ .

Legyen  $G$  identitás-komponense  $G'$  ( $G'$  mindazon elemekből áll, amelyekre  $W$  determinánsa 1), és legyen  $G^*$  a (6.18)-cal analóg módon konstruált univerzális fedőcsoportja. Mivel  $G^*$  minden exponense egyenlő  $\gamma\xi_0$ -val ( $\gamma$  konstans),  $G^*$  (és így  $G'$ ) sugár-ábrázolásai a 3e §-ban megjelölt módon határozhatók meg. Amint azt meg fogjuk mutatni, ilyen sugár-ábrázolások ( $\gamma \neq 0$ ) előfordulnak a kvantummechanikában. [ $G$  közösleges ábrázolásait ( $\gamma=0$ ) nemrégiben Inönü és Wigner [5] tanulmányozta.]

6g) *A Galilei-csoport a kvantummechanikában.* Legyen  $\Psi(x, \tau)$  egy  $m$  tömegű szabad részecskére a nem-relativisztikus Schrödinger-egyenletnek egy megoldása,

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2\mu} \nabla^2 \Psi = 0, \quad (\mu = m/\hbar),$$

ahol  $\nabla^2$  a Laplace-operátor az  $x^k$  három változóra. Jelöljük az  $x^k, \tau$  négy változót  $X$ -szel és írjuk fel a (6.20) transzformációra:  $X' = rX$  (vagy ezzel ekvivalens módon:  $X = r^{-1}X'$ ), ahol  $r = (W, \eta, v, u)$ . Az  $X'$  transzformált változókra a Schrödinger-egyenlet megfelelő megoldását (ezekkel a változókkal)  $\Psi'(X') = e^{-i\theta(r, X')} \Psi(r^{-1}X')$  adja, ahol  $\theta(r, X)$  az  $r$  csoportelem és az  $X$  változók következő függvénye:<sup>10</sup>

$$\theta(r, X) = \mu \left\{ \frac{1}{2} \tau v \cdot v - v \cdot x \right\}. \quad (6.29)$$

Az  $r$  függés explicit kifejezésére a vesszőt elhagyva  $X$ -ről ezt írjuk

$$\Psi' = T_r \Psi; \quad \Psi'(X) = e^{-i\theta(r, X)} \Psi(r^{-1}X). \quad (6.29a)$$

$T_r$  a  $\Psi$  hullámfüggvényekre ható lineáris operátor.

Vessük egybe most  $\Psi_1 = T_r T_s \Psi$ -t  $\Psi_2 = T_{rs} \Psi$ -vel. Legyen  $\Psi_3 = T_s \Psi_3$ . Akkor

$$\Psi_1(X) = e^{-i\theta(r, X)} \Psi_3(r^{-1}X) = e^{-i\{\theta(r, X) + \theta(s, r^{-1}X)\}} \Psi((rs)^{-1}X),$$

míg  $\Psi_2(X) = e^{-i\theta(rs, X)} \Psi((rs)^{-1}X)$ . Így

$$\Psi_1(X) = e^{-i\{\theta(r, X) + \theta(s, r^{-1}X) - \theta(rs, X)\}} \Psi_2(X). \quad (6.29b)$$

(6.29)-ből és (6.21)-ből azt találjuk, hogy az előző egyenletben a kitevő független  $X$ -től, pontosabban

$$\Psi_1(x) = e^{-i\mu\xi_1(r, s)} \Psi_2(x) \quad (6.30a)$$

$$\xi_1(r, s) = u \cdot Wv' - \eta \left\{ \frac{1}{2} v' \cdot v' + v \cdot Wv' \right\},$$

<sup>10</sup> L. Pauli [8], 100. old. Ezt az egyenletet általában  $W=1, \eta=0$ -ra adják meg. Azonban bizonyosan megegyezik  $\Psi$  konvencionális transzformációjával, ha  $v=0$ . Most a (6.21a) felbontást alkalmazva és a két tényezőjére (6.29a)-t posztulálva megkapjuk — egy tényezőtől eltekintve — (6.29a)-t egyértelműen minden Galilei-transzformációra.



ahol  $r$ -t,  $s$ -t úgy választottuk, mint (6.28)-ban. A  $T$  operátorokra akkor fennáll, hogy

$$T_r T_s = e^{-i\mu \xi_1(r,s)} T_{rs}. \quad (6.30b)$$

Tehát  $\xi_1$  a Galilei-csoport egy exponense. A (6.28)-cal való összevetés azt mutatja, hogy  $\xi_1 \equiv \xi_0$  az egész csoporton. Valójában  $\xi_1 = \xi_0 + \Delta[\zeta]$ , ahol

$$2\zeta(r) = \eta v \cdot v - v \cdot u \quad (r = (W, \eta, v, u)).$$

*Hullámfüggvények az impulzustérben.* A Schrödinger-egyenlet megoldásainak kvantummechanikában megengedett  $\Psi$  rendszerét pontosan

$$\Psi(x, \tau) \sim (2\pi)^{-3/2} \int \Phi(k) e^{-i\{(\tau/2\mu)k \cdot k - k \cdot x\}} d^3k \quad (6.31)$$

adja, ahol a  $k$  vektor komponensei  $k^1, k^2, k^3$  ( $-\infty < k^j < \infty$ ). —  $p = \hbar k$  az impulzus —  $d^3k$  jelöli  $dk^1, dk^2, dk^3$ -t  $\Phi(k)$  tetszőleges négyzetesen integrálható függvény, és (6.31) rögzített  $\tau$  érték mellett  $\Psi(x, \tau)$ -t mint  $\Phi(k) e^{-i\tau k \cdot k/2\mu}$  Fourier-transzformáltját fejezi ki. A  $\Phi(k)$  függvények (hullámfüggvények a „Heisenberg-reprezentációban”) egy  $\mathfrak{H}$  Hilbert-teret alkotnak, ahol a belső szorzat

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \overline{\Phi_1(k)} \Phi_2(k) d^3k.$$

A  $\Psi \rightleftharpoons \Phi$  megfeleltetés nyilvánvalóan egy-egyértelmű. Következésképpen  $T_r \Psi$   $U_r \Phi$ -be képződik le, ahol  $U_r$  egy meghatározandó operátor. Következik, hogy

$$T_r(T_s \Psi) \rightarrow U_r U_s \Phi, \quad T_{rs} \Psi \rightarrow U_{rs} \Phi,$$

és ennél fogva (6.30b) szerint

$$U_r U_s = e^{-i\mu \xi_1(r,s)} U_{rs}. \quad (6.32)$$

Hogy  $U_r$ -t megkapjuk, legyen  $rk = Wk + \mu v$  a Galilei-csoport  $r = (W, \eta, v, u)$  elemére. Akkor (6.21) szerint  $r(sk) = (rs)k$  és  $r^{-1}k = W^{-1}(k - \mu v)$ .  $\Psi' = T_r \Psi$ ,  $\Phi' = U_r \Phi$  mellett (6.29a)-ból némi számolás után kapjuk:

$$\Psi'(x, \tau) \sim (2\pi)^{-3/2} \int \Phi'(k) e^{-i\{(\tau/2\mu)k \cdot k - k \cdot x\}} d^3k \quad (6.33)$$

$$\Phi' = U_r \Phi; \quad \Phi'(k) = \Phi(r^{-1}k) e^{-i\Omega(r,k)}$$

$$\Omega(r, k) = k \cdot u - \frac{\eta}{2\mu} k \cdot k + \mu \left( \frac{1}{2} \eta v \cdot v - u \cdot v \right).$$

$U_r$  nyilván unitér operátor, és (6.32)-t figyelembe véve az  $U_r$  operátorok a Galilei-csoportnak egy folytonos sugár-ábrázolását definiálják, ahol  $\omega(r, s) = e^{-i\mu \xi_1''(r,s)}$ . Az ábrázolás irreducibilis.

Mellesleg (6.32) közvetlenül származtatható (6.33)-ból. (6.29b)-vel analóg módon  $\Omega(r, k) + \Omega(s, r^{-1}k) - \Omega(rs, k) = \mu \xi_1(r, s)$ .



### 7.§. Félig egyszerű és kompakt Lie-csoportok sugár-ábrázolásairól

7a) *A félig egyszerű Lie-csoport lokális exponensei.* Legyen  $a_1, \dots, a_n$  egy  $G$  félig egyszerű Lie-csoport  $\mathfrak{g}$  Lie-algebrájának bázisa, amely csoport ezen bázisra vonatkoztatott struktúraállandói:  $c_{ik}^m$ . Jelöljük  $A_i$ -vel a mátrixot, melynek elemei  $\alpha_k^m = c_{ik}^m$  (vagyis  $\mathfrak{g}$  adjungált reprezentációjában az  $a_i$ -nek megfelelő mátrix, l. Chevalley [1], 124. old.). A (4.7) alakú Jacobi-azonosság ekkor a következő mátrix-egyenlet formájában írható fel:

$$A_i A_j - A_j A_i = c_{ij}^m A_m, \quad (7.1)$$

ahol ismét az összegzési konvenciót alkalmazzuk. Mivel  $G$  félig-egyszerű, Cartan feltétele szerint a

$$\gamma_{ij} = \text{Sp}(A_i A_j) = c_{ik}^m c_{jm}^k \quad (7.2)$$

által definiált  $\gamma_{ij}$  szimmetrikus tenzor (ahol  $\text{Sp}$  „spur”-t jelent) nem-szinguláris (l. Eisenhart [3], 174. old.), úgyhogy  $\gamma_{ij}$  és inverze  $\gamma^{ij} = \gamma^{ji}$  ( $\gamma^{ij} \gamma_{kj} = \delta_k^i$ ) a szokásos módon alkalmazható az indexek le- és felhúzására. Pontosabban, (l. Eisenhart [3], 162. old.)

$$\begin{aligned} c_{lij} &= \gamma_{lm} c_{ij}^m = c_{ij}^m \text{Sp}(A_l A_m) = \text{Sp}(A_l (A_i A_j - A_j A_i)) = \\ &= \text{Sp}(A_l A_i A_j) - \text{Sp}(A_l A_j A_i). \end{aligned}$$

Ennélfogva  $c_{lij} = -c_{lji}$ , tehát  $c_{lij}$  antiszimmetrikus bármelyik két indexben. Akkor (7.2)-ből következik:

$$\delta_j^i = c_k^{mi} c_{jm}^k = c_{km}^i c_{jm}^m. \quad (7.3)$$

Az  $[a_i, a_j] = c_{ij}^m a_m$  egyenletet  $c_l^{ji}$ -vel megszorozva és összegezve (7.3)-ból kapjuk:

$$a_i = c_l^{ji} [a_i, a_j]. \quad (7.4)$$

Legyen  $\Xi$   $\mathfrak{g}$ -nek infinitezimális exponense. (4.26) szerint

$$\beta_{mj} c_{kl}^m = \beta_{km} c_{lj}^m + \beta_{lm} c_{jk}^m \quad (\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)).$$

$c_l^{lk}$ -val szorozva és a kontrakciót elvégezve

$$\beta_{ij} = \beta_{km} c_{lj}^m c_i^{lk} + \beta_{lm} c_{jk}^m c_i^{lk} = 2\beta_{km}^k c_{ji}^m c_{ik}^l = 2 \text{Sp}(B A_j A_i),$$

ahol  $B$  a mátrix, melynek elemei:  $\beta_m^k$ . Mivel  $\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \beta_{ji})$ ,

$$\beta_{ij} = \text{Sp}(B(A_j A_i - A_i A_j)) = c_{ji}^m \lambda_m \quad (\lambda_m = \text{Sp} B A_m). \quad (7.5)$$

Így  $\Xi = -d[A] (\lambda(a_m) = \lambda_m)$ , vagyis  $\Xi \equiv 0$ , ami (l. a 4.7. Lemmát) bizonyítja a következő

**7.1. TÉTEL-t.** *Egy félig egyszerű Lie-csoport minden lokális exponense nullával egyenlő.*

Mivel a  $G_p^m$  ( $m > 2$ ) csoportok félig egyszerűek, ez alternatív bizonyítékot szolgáltat (6.14)-re.



7b) *Kompakt, összefüggő Ábel-csoportok sugár-ábrázolásai.* Tekintsünk  $n$ -dimenziós kompakt, összefüggő  $G$  Lie-csoportot, amely Ábel-csoport, és ennek  $G^*$  univerzális fedőcsoportját. Kanonikus koordinátákban a csoportszorzás  $G^*$ -on vektorösszeadás (l. 6a. §), és  $G^*$ -on úgy választhatunk egy koordinátarendszert, hogy  $G = G^*/N$  legyen, ahol  $N$  az összes  $t$  vektorokból áll, melyek komponensei egész számok. Jelölje

$$t_j (1 \leq j \leq n)$$

azt a vektort, melynek komponensei  $t^k = \delta_j^k$ . Akkor  $r = \sum_{k=1}^n q^k t_k$  (minden  $r \in G^*$ -ra);

$t \in N$  akkor és csak akkor, ha  $t = \sum_{k=1}^n v^k t_k$  ( $v^k$  egész szám).

$G^*$  bármilyen  $U_r$  folytonos sugár-ábrázolásához kiválasztható az egész csoporton az ábrázoló operátorok  $U_r$  megengedett sorozata (l. 6a §-t és 3.3. Tételt) úgy, hogy

$$U_r U_s = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}, \quad (r, s \in G^*)$$

ahol  $\xi(r, s)$  bilineáris antiszimmetrikus alak  $r$ -ben és  $s$ -ben. (Akkor  $U_r U_{-r} = 1$ .)  $G$  sugár-ábrázolását kapjuk eredményül, ha  $N$ -t az egységsugárra képezzük le, ez esetben

$$U_{t_k} = e^{i\theta_k} \cdot 1. \quad (7.6)$$

Ezért minden  $r \in G^*$ -ra  $U_r = (U_{-t_k} U_r) U_{t_k} = e^{i(\xi(r, t_k) + \xi(r - t_k, t_k))} \cdot U_r = e^{2i\xi(r, t_k)} U_r$ . A folytonosság miatt  $\xi(r, t_k) = 0$  (minden  $r$ -re), mivel  $\xi(0, t_k) = 0$ . Így bármilyen

$$s (= \sum \sigma^k t_k)\text{-re} \quad \xi(r, s) = \sum \sigma^k \xi(r, t_k) = 0.$$

Az  $U_r$  operátorok tehát  $G^*$  közönséges ábrázolását definiálják:

$$U_r U_s = U_{rs} \quad (r, s \in G^*) \quad (7.7)$$

és (7.6) szerint

$$U_t = e^{i\sum v^k \theta_k} \cdot 1 \quad (t = \sum v^k t_k \in N). \quad (7.6a)$$

Válasszuk most az ábrázoló operátorok új halmazának

$$U'_r = e^{-i\xi(r)} U_r \quad (\xi(r) = \sum_k q^k \theta_k).$$

Mivel  $\Delta_{r,s}[\xi] = 0$ ,  $U'_r$ -re teljesül a (7.7). Ezenkívül  $U'_t = 1$  [(7.6a) szerint] minden  $t \in N$ -re. Ennélfogva az  $U'_r$ -k magának  $G$ -nek egy ábrázolását definiálják.

7.2. TÉTEL. *Egy kompakt összefüggő Ábel-jellegű  $G$  Lie-csoport minden folytonos sugár-ábrázolását  $G$  egy ábrázolása indukálja.*

7c) *Kompakt összefüggő Lie-csoportok sugár-ábrázolásai.* Legyen  $G$  egy  $n$ -dimenziós kompakt összefüggő Lie-csoport. Három esetet különböztetünk meg (l. Pontrjagin 55. §):

1.  $G$  Ábel-csoport;
2.  $G$  félig egyszerű, amely esetben az univerzális fedőcsoportja kompakt;
3.  $G$ -nek van egy  $G' = G_1 \times G_2$  fedőcsoportja, a kompakt összefüggő  $G_1$  Ábel-csoport és a kompakt összefüggő és egyszeresen összefüggő félig egyszerű  $G_2$  direkt



szorzata  $G'$  maga nem egyszeresen összefüggő;  $G$  (és  $G'$ ) univerzális fedőcsoportja  $G^* = G_1^* \times G_2$ , ahol  $G_1^*$   $G_1$  univerzális fedőcsoportja.

A 7.1. és 7.2. Tételleket figyelembe véve csak a harmadik esetet kell néznünk.

*Az infinitezimális exponensek definíciója.*  $G'$   $\mathfrak{g}$  Lie-algebrája  $G_1$  és  $G_2$   $\mathfrak{g}_1$  és  $\mathfrak{g}_2$  Lie-algebráinak direkt összege.  $\mathfrak{g}$  bázisul választhatunk  $k$  darab  $a_i$  vektort, amelyek kifeszítik  $\mathfrak{g}_1$ -t és  $l$  darab  $a'_j$  vektort, amelyek kifeszítik  $\mathfrak{g}_2$ -t ( $k+l=n$ ). Akkor

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i, a'_j] = 0 \quad (7.8a)$$

$$[a'_i, a'_j] = \sum_{m=1}^l c_{ij}^m a'_m. \quad (7.8b)$$

Most alkalmazzuk a 7. § eredményeit a  $\mathfrak{g}_2$  félig egyszerű Lie-algebrára. Legyen  $\Xi$   $\mathfrak{g}$ -nek egy infinitezimális exponense. Akkor  $\Xi(a'_i, a'_j)$ -t (7.5) adja meg.  $\Xi_1 = \Xi + d[A]$ -ra

$$\Xi_1(a'_i, a'_j) = 0 \quad (7.9a)$$

ha  $A$ -t így definiáljuk:  $A(a'_i) = \lambda_i$ ,  $A(a_j) = 0$ . Továbbá  $d\Xi_1(a'_i, a'_j, a_h) = 0$ -ból következik, hogy  $\Xi_1([a'_i, a'_j], a_h) = 0$  [(7.8a) szerint]. Mivel [(7.4) szerint]  $\Xi_1(a'_m, a_h)$  a  $\Xi_1([a'_i, a'_j], a_h)$  kifejezések lineárkombinációja,

$$\Xi_1(a'_m, a_h) = 0 \quad (7.9b)$$

következik. Tehát  $\Xi_1$  összes együtthatói eltűnnek,

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji} = \Xi_1(a_i, a_j) \quad (7.9c)$$

lehetséges kivételével. A (4.24a) összefüggések semmiféle megszorítást nem jelentenek  $\beta_{ij}$  számára.

*$G'$  sugár-ábrázolásai.* Jelöljük  $G^* = G_1^* \times G_2$  elemeit  $(r, r')$ -vel, ahol  $r \in G_1^*$ ,  $r' \in G_2$ , úgyhogy a csoportszorzást  $G^*$ -on

$$(r, r') \cdot (s, s') = (rs, r's')$$

definiálja. Legyenek  $e$  és  $e'$   $G_1^*$ , ill.  $G_2$  egységelemei. A 7b § eredményei érvényesek  $G_1$ -re és  $G_1^*$ -ra. Következésképpen  $G' = G^*/N'$ , ahol az  $N'$  invariáns alcsoport a  $(t, e')$  elemekből áll,  $t = \sum_{j=1}^k v^j t_j$  ( $v^j$  egész szám).

$G^*$   $\Xi_1$ -nek megfelelő exponense (l. 7.9a, b, c):

$$\xi_1((r, r'), (s, s')) = \xi_1(r, s),$$

ahol  $\xi_1$   $r$  és  $s$  antiszimmetrikus bilineáris alakja. Ennélfogva  $G^*$  minden sugár-ábrázolásához létezik az ábrázoló operátorok megengedett  $U(r, r')$  halmaza az egész csoporton, amelyre

$$U(r, r')U(s, s') = e^{i\xi_1(r, s)}U(rs, r's') \quad (7.10)$$

alkalmasan választott  $\xi_1$  mellett.



Legyen  $U(r, e') = U_r$  és  $U(e, r') = V_{r'}$ . (7.10)-ből

$$U_r V_{r'} = V_{r'} U_r = U(r, r') \quad (7.11)$$

$$U_r U_s = e^{i\xi_1(r,s)} U_{rs}; \quad V_{r'} V_{s'} = V_{r's'}; \quad (7.12)$$

$G'$  sugár-ábrázolását úgy kapjuk meg, ha  $N'$ -t leképezzük az egységsugárra. (7.12) első egyenlete azt jelenti, hogy ez esetben az  $U_r$ -k a kompakt összefüggő  $G_1$  Abel-csoport sugár-ábrázolását definiálják. Ennélfogva — amint azt a 7b §-ban kimutattuk —  $\xi_1$ -nek el kell tűnnie, és ki lehet választani olyan  $U'_r = e^{-i\xi(r)} U_r$ -ket, amelyek éppen  $G_1$  egy ábrázolását definiálják, és így olyan  $U'(r, r') = e^{-i\xi(r)} U(r, r')$  ábrázoló operátorokat is, amelyek  $G'$  ábrázolását definiálják. Mivel  $G'$   $G$ -nek kompakt fedőcsoportja, igaz a következő

**7.3. TÉTEL.** *Egy kompakt összefüggő  $G$  Lie-csoport minden folytonos sugár-ábrázolását  $G$   $G'$  kompakt fedőcsoportjának ábrázolása indukálja.*

Ebből többek között az is következik (Wigner [15], 194—196. old.), hogy ilyen ábrázolás egy § szeparálható Hilbert-téren véges dimenziós irreducibilis ábrázolások megszámlálható összege.

Princetoni Egyetem

Fordította: Mátrai Mária

#### BIBLIOGRÁFIA

1. C. Chevalley: Lie-csoportok elmélete. Princeton 1946.
2. C. Chevalley és S. Eilenberg, Trans. Amer. Math. Soc. 63 85 (1948)
3. L. P. Eisenhart: Transzformációk folytonos csoportjai. Princeton 1933.
4. L. Gårding, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 33, 331 (1947)
5. E. Inönü és E. P. Wigner, Il Nuovo Cimento IX, 705 (1952)
6. K. Iwasawa, Ann. of Math. 50, 507 (1949)
7. G. Mostow, Ann. of Math. 52, 606 (1950)
8. W. Pauli: Handbuch der Physik XXIV/1 p. 83—272, 1933.
9. L. Pontrjagin: Topologikus csoportok, Princeton 1939.
10. I. Schur, Journ. für die reine und angewandte Mathematik 127, 20 (1904); 132, 85 (1907)
11. I. E. Segal, Duke Math. J. 18, 221 (1951)
12. A. Weil: Integrálás topologikus csoportokban és alkalmazásaikban. Párizs 1940.
13. H. Weyl: Csoportelmélet és kvantummechanika. London 1931.
14. E. P. Wigner: Csoportelmélet és alkalmazása atomspektrumok kvantummechanikájában. Braunschweig 1931.
15. E. P. Wigner: Ann. of Math. 40, 149 (1939).
16. E. P. Wigner: Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36, 184 (1950)
17. E. P. Wigner, Nachrichten d. Gesellschaft d. Wissenschaften Göttingen 546 (1932).







# KÖNYVISMERTETÉS

Tarján I. and Mátrai M.: Laboratory Manual on Crystal Growth.  
Akadémiai Kiadó, Budapest 1972. 250 oldal

Az egykristályok növesztése és felhasználása ma már világszerte ipari méretekben folyik, és ennek megfelelően a téma irodalma sem szegényes, de mindmáig hiányzott a jelenségek és a növesztési technológia elemeinek oktatásánál felhasználható kísérletek leírása. A szerzők ezt a hiányt pótolták 18 társszerző közreműködésével, úgyszólván valamennyi hazai, kristálynövesztéssel foglalkozó kutatóhely erőit egyesítve.

A könyv első fele a kristálynövekedés alapjelenségeinek szemléltetésére alkalmas egyszerű, sok esetben rendkívül szellemes kísérletek leírásával foglalkozik, és ez az összeállítás önmagában is figyelemre méltó. Lényegében ez az, ami új, a már meglevő kézikönyvekhez képest, és jóformán az egész anyag a Gyulai-iskola tapasztalatain alapszik. Önmagában ezek ilyen formában való összegyűjtése már régóta aktuális volt. És jóllehet ezek a kísérletek a mai ipari technológiai folyamatok mellett gyermekjátéknak tűnnek, éppen ez az, amit az oktatásban nem nélkülözhetünk. Az itt szereplő közel 60 kísérletben, amelyek az oldhatóságtól kezdve, dentrites növekedéssel, tűkristályokkal, epitaxiával, rekrisztallizációval, stb. egyaránt foglalkoznak, természetesen az ionkristályok dominálnak, de e részben az anyagok széles választéka nem is követelmény. Mégis jó lett volna, ha néhány fontos fogalmat, illetve jelenséget a szerzők nemcsak futólag és erősen leszűkített értelmezésben említenek. Ilyen pl. a textúra fogalma vagy a precipitáció jelensége, ami az üvegek kristályosodásánál fordul elő.

A második rész a fizikai vizsgálatokra vagy technológiai felhasználásra alkalmas „nagy” egykristályok növesztésének technikai kérdéseit tárgyalja. Az oldatból, olvadékból és gőzfázisból történő növesztés különböző módjainak ismertetése után röviden foglalkozik a könyv a kályhaépítés és a kristályok megmunkálásának kérdéseivel is. Valamennyi növesztési módszerhez egy-két, alkalmasan választott anyaghoz kapcsolódó, növesztési kísérlet leírása tartozik (összesen több mint harminc) részletes gyakorlati utasításokkal, amelyek alapján azt remélhetjük, hogy segítségükkel a kristálynövesztésben gyakorlatlan olvasó is sikeres növesztési kísérleteket végezhet.

A sok társszerző közreműködése ellenére a könyv szerkezete, stílusa eléggé egységes és szövege jól érthető. Ez elsősorban a szerkesztők munkáját dicséri. Kár, hogy a fényképek nyomdai reprodukciója viszonylag gyenge, hiszen ezek némelyike valóban reprezentatív lehetne.

Az Akadémiai Kiadó e kiadvánnyal jó és legfőképp hasznos könyvet adott a szilárdtestek fizikájának és kémiájának oktatásával foglalkozók kezébe és tulajdonképpen kár, hogy csak angolul jelent meg, de ez nem lehet akadály annak, hogy felsőfokú oktatásunkban e témakör a jelenleginél kicsit nagyobb súlyt kapjon. De talán nem is itt kell kezdenünk. Meggyőződésem, hogy az első rész jó néhány kísérlete középiskolában, legalábbis szakköri foglalkozásokon hasznos, szép élményt nyújtana a tanulóknak. Talán nem lenne hiábavaló munka néhány oldalas ismeretterjesztő bevezetővel ellátni, e célra válogatott kísérletgyűjteményt magyarul is megjelentetni. Minél előbb.

*Zsoldos Lehel*

H. Brechna: Superconducting magnet systems  
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York. 1973.  
Technische Physik in Einzeldarstellungen Band 18.  
Herausgegeben von F. X. Eder

A civilizáció ártaival terhes korunkban örömmel üdvözlendő minden olyan lépés, amely az energiaigény csökkentése, a környezet hővel és füsttel való szennyezése ellen hat. A sok-megawattos étvágyú elektromágnesek felváltása minimális fogyasztású szupravezető mágnesekkel éppen ilyen lépés, ezért H. Brechna könyve nagyon időszerű. Időszerű azért is, mert segít megértetni: az alacsony hőmérsékletek alkalmazását (különösen nálnunk) körülvevő mítoszt nem indokolja semmi: a szupra-



vezetés gyakorlati felhasználásának akadályai semmivel sem visszaretentőbbek, mint bármely más bonyolult, de konvencionális módszeré. Meg kell azonban szokni az újat: a tervező és a felhasználó csak így érezhet rá a problémákra.

Ez a Brechna könyvének célja: emberközelbe hozni az állandó és váltakozó mágneses teret szolgáltatató szupravezető mágnesek készítésének és kiszolgáltatásának problémakörét. Az önként vállalt feladat óriási és a könyv 590 oldalnyi terjedelme, 396 ábrája és 46 táblázata ellenére sok területet csak felületesen érinthet. A hazai fizika szempontjából sajnálatos, hogy a szerző, aki a stanfordi gyorsító-laboratórium munkatársa, a hangsúlyt a hatalmas méretű nyalábeltérítő- és buborékkamra-mágnesekre helyezi.

De lássuk magát a könyvet!

A mágnes térkeltés klasszikus módszereiről írott bevezető jó kontrasztot teremt. Hiányzik viszont az impulzusüzemű mágnesek közül például az amszterdami neonhűtésű 450 kOe-es berendezés. A mágneses terek számításáról szóló második fejezet a könyvnek mintegy negyede. A ferro-mágneses anyagot nem tartalmazó mágnesekről szóló rész bizonyos átlapolást mutat más, ismert monográfiákkal. A vasmagos mágnesek tervezésére szolgáló numerikus módszerek példákkal illusztrált gyűjteménye sokkal több újat ad. Külön alfejezet tárgyalja a tekercsmenetekre ható mágneses és hőtagulásból fakadó erőket. Érdekes, hogy az erőmentes tekercselés módszereit teljesen figyelmen kívül hagyja.

A szupravezetés jelenségkörét és elméletét bemutató fejezetet G. D. Cody írta, elsősorban azok számára gyűjtve össze sok hasznos formulát, akikben már az elsőfajú szupravezetőköről szilárdan megalapozott kép alakult ki. A másodfajú szupravezetők kritikus teréről és áramáról írott két alfejezet olvasmányos, modern és érthető.

A könyv legsikerültebb része a váltakozóáramú szupravezető mágnesekről írott fejezet. A veszteségek mikrofizikai okait tárgyaló alfejezet teljes és amellet eléggye gyakorlati beállítottságú ahhoz, hogy a megismertek közvetlen alapul szolgáljanak a látszólag bonyolult felépítésű, kis veszteségű sokeres kábelek bemutatásához. Itt esik szó a szupravezető adiabatikus és dinamikus stabilizálásának döntő fontosságú kérdéséről, és hasznos tanácsokat kapunk a mágnes tényleges megtervezéséhez és kivitelezéséhez is. A fejezetet a magsugárzás hatásának tárgyalása zárja a szupravezető anyagra.

A kriotechnikát általában bemutató (H. M. Long-gal közösen készített) fejezetből szívesen elhagytuk volna a cseppfolyósításról szóló részt, ha több útmutatást kapunk cserébe az aránylag nagy mennyiségű cseppfolyós hélium tényleges kezelése terén. A hővesztésekkel, a hűtőfolyadékok fizikai tulajdonságaival és különösen a szerkezeti anyagok alacsony hőmérsékletű viselkedésével kapcsolatos részekben azonban az olvasó nagyon sok olyan adatot talál összegyűjtve, amit különben fáradságosan kellene összbúvárkodnia.

A hagyományos és a szupravezető mágnesek összehasonlításáról szóló rész nagyon érdekes, de eltérő viszonyaink miatt gazdasági döntés alapja semmiképpen sem lehet.

Az utolsó fejezet megépített (nagy) mágneseket ismerteti: a legnagyobb 3,7 méteres, a legkisebb 0,3 m-es átmérőjű kísérleti munkateret biztosít.

A nagyszámú ábra, a nyolc oldalnyi részletes tárgymutató, az elegendő, de nem elrettentően sok jól megválogatott irodalmi utalás és a Springertől megszokott kitűnő nyomdatechnika csak növeli a könyv értékét. Érthetetlen viszont, hogy miért keveredik a felhasznált matt felületű papíryanag időnként fényes műnyomó papírral, egyazon kötetben.

Összefoglalva: a szupravezető mágneseket mérnöki-tervezői szemmel néző könyvben sok jól használható anyagot talál minden olyan fizikus vagy mérnök, aki mágnesrendszerek vagy áramvezetők szupravezetős megoldásának problémájával kerül szembe.

*Zimmer György*

**Jacques Vanier: Basic Theory of Lasers and Masers**

**Gordon and Breach Science Publishers, 1971. (Documents on modern physics)**

A cím szerényen, de sokat ígér: az olvasó előre örül, hogy a koherens állapotok kvantumelektrodinamikáját (Glauber), az intenzív koherens sugárzás és az anyag kölcsönhatásának elméletét (Lamb), végül a rezonátorok klasszikus elméletét olvashatja — valamilyen jól sikerült összefoglalásban. Ennél több nem kell ahhoz, ha a laserfizika elméleti alapjait meg akarjuk érteni (természetesen itt a laser különböző megvalósításai csak példaként jöhetnek szóba). Ha pedig a szerző a fenti három témát jobban összefoglalja, mint a megfelelő monográfiák, sőt esetleg újat is mond, akkor a könyvet érdemes volt kiadni.

Az olvasó (kritikus) kevésbé örül, ha a könyvet kinyitva meglátja az alcímet: „A density matrix approach”. Az alcím mindenképp szűkíti a területet, az olvasó most már csak a sugárzó anyag és ki-



sugárzott tér kölcsönhatásának leírását várja, mert a sűrűségmátrix erre igen jól használható. Sőt, nemlineáris optikát is vár, a nem lineáris jelenségek tárgyalásának a sűrűségmátrix formalizmus igen hatásos eszköze.

A kiábrándult olvasó ehelyett a sűrűségmátrix fogalmának bevezetését találja, majd a módszert egy rövid fejezetben alkalmazzák a rezonancia átmenetekre mágneses térben. Itt a címre visszaemlékező olvasó elvárná, hogy szép elméleti tárgyalásban megkapja Patell spin-flip laserét, de erről nincs szó. Végül rövid fejezetekben megemlékeznek az optikai pumpálásról, a molekuláris erősítőről, a laserről (5 oldal!) és a spin kicserélő kölcsönhatásról.

Kollegáim, akik nálam jobban elmélyedtek a könyvben, azt mondják, hogy sok benne a sajtóhiba. Dehát ezért kár az időt vesztegetni. (V. P.)

**Otfried Madelung: Festkörpertheorie III. Heidelberger Taschenbücher  
Springer-Verlag 1973**

Egy szilárdtest sajátságainak leírásakor kétféleképpen járhatunk el. A szilárdtest adott sajátságú atomokból álló felépítését állítjuk előtérbe, azaz a szilárdtestben végbemenő folyamatokat mint az egyes atomokon végbemenő, lokális folyamatokat tekintjük, amelyekre az a körülmény van hatással, hogy az atomok egy rácsban vannak beépülve. A helyi rezgések a szilárdtestben a rácsépítő elemek kölcsönhatása által tovaterjednek. Ha az atomok egy adott struktúrájú rácsban való elhelyezkedését a szilárdtest lényeges tulajdonságának tekintjük, akkor a rács kollektív sajátságait a szilárdtest sajátságok értelmezésére használhatjuk fel.

A másik álláspont adja az elemi gerjesztések koncepcióját. Egy rács rezgésállapotát most nem tekintjük a rácsatomok lokális rezgéseinek összegeként, hanem úgy írjuk le, mint harmonikus rács-hullámok eredőjét, amelyekkel mint energiakvantumokat, a fononokat rendeljük. A rácsionok spin orientációjának leírásához spinhullámokat és ezekhez rendelt magnonokat vezetünk be. Egy elektron-lyuk pár lokális gerjesztéseit szuperponáltatják az excitonok kollektív gerjesztéseire. Az összes kollektív gerjesztések közegek abban, hogy energiaspektrumok állapotaihoz egy hullámszámvektor meghatározott értékét rendelik, míg a hely meghatározatlan marad. Az állapotok az egész szilárdtestre kiterjednek. Ebben az értelemben delokalizáltak. Hasonló delokalizált leírás szolgál a sávmodell kvázi-részecskéinek esetére is.

Otfried Madelung első két kötetét előző számainkban (20, 601, 1972; 21, 405, 1973) már ismertettük. Az előbbiekben felhasznált, az elemi gerjesztések és kölcsönhatásaik rendezési elve nem fedi be a szilárdtestfizika egész területét. Mindenütt, ahol a szilárdtestek véges kiterjedése vagy a szigorú rácsperiodicitásból való eltérés fontos, előnyösebb lehet a szilárdtest-jelenségek lokális leírása. Ezért a sorozat befejező kötetében Madelung a lokalizált állapotokat emeli ki. Mivel a tárgyalt terület igen széles, a szerző csak a reprezentatív példákra szorítkozik. Ezenkívül a félvezetőket mint a rácsstorzulások és torzult rácsok vizsgálatára alkalmas modellanyagokat, az előző kötetekben tárgyaltnál jobban az előtérbe hozza, mint az előző két kötetben, a függelékben matematikai kiegészítést hoz. S a kötetet mind a háromra érvényes irodalmi és tárgyjegyzékkel zárja. (T. Gy.)



Technikai szerkesztő: Turchányi György  
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sós Attila  
A kézirat beérkezett: 1974. április 2. — Terjedelem: 9,45 (A/5) ív

74-1581 — Szegedi Nyomda

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADEMIA  
KÖNYVTÁRA



A MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,

1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.



## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Tihanyi László</i> : Relativisztikus plazma rezgései önmaga által keltett skalártérben.....	391
<i>Dénes Ervin</i> : Küszöbjelenségek vizsgálata egy egzaktul megoldható modell keretében .....	401

## A KLASSZIKUS IRODALOMBÓL

<i>V. Bargmann</i> : A folytonos csoportok unitér sugar-ábrázolásairól .....	447
--	-----

## KÖNYVISMERTETÉS

<i>Tarján I. and Mátrai M.</i> : Laboratory Manual on Crystal Growth ( <i>Zsoldos Lehel</i> ) .....	495
<i>H. Brechna</i> : Superconducting magnet systems. ( <i>Zimmer György</i> ) .....	495
<i>Jacques Vanier</i> : Basic Theory of Lasers and Masers ( <i>V. P.</i> ) .....	496
<i>Otfried Madelung</i> : Festkörpertheorie III. ( <i>T. Gy.</i> ) .....	497



307.226

1V

# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

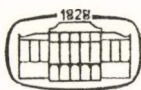
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

GÁSPÁR REZSŐ, KOVÁCS ISTVÁN, NAGY ELEMÉR,  
PÁL LÉNÁRD ÉS SZALAY SÁNDOR  
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI  
JÁNOSSY LAJOS

XXII. KÖTET

6. FÜZET



AKADÉMIAI KIADO  
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
BUDAPEST 1974

2



# MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21. SZ.

A Magyar Fizikai Folyóirat a magyar fizikus kutatók lapja. A lap célja a magyar fizikai kutatás korszerű szinten való támogatása, elsősorban összefoglaló jellegű cikkek, tanulmányok stb. közlése által. Ilyen dolgozatok megjelentetésével a lap tájékoztatást kíván nyújtani a fizika különböző kutatási területeinek jelenlegi eredményeiről, problémáiról, további célkitűzéseiről. A lap „A klasszikus irodalomból” című rovatában rendszeresen közöl egy-egy téma köré csoportosított, immár klasszikussá vált cikkeket, amelyek a témakör befejezése, átlagosan 10—10 dolgozat megjelenése után a folyóiratfüzetekről leválasztva, az alsó lapszámozás szerint összekötve, önálló köteteket képeznek. A folyóiratból évenként egy kötet jelenik meg hat füzetben, füzetenként átlag 6 ív terjedelemben.

A kéziratok a következő címre küldendőek:

Jánossy Lajos akadémikus  
1121 Budapest XII., Konkoly Thege út  
Központi Fizikai Kutató Intézet

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőkhöz, de felelősséget a beküldött, el nem fogadott kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A folyóirat előfizetési ára kötetenként 48 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. (pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, 1389 Budapest I., Fő utca 32. (pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990) útján eszközölhetők.

A kéziratokkal kapcsolatban a szerkesztőség a következőket kéri a szerzőktől:

1. A dolgozat elé rövid tartalmú ismertetőt írjanak.
2. A levezetéseknek csak a gondolatmenetét és főbb lépéseit közöljék. Ha részletezésre lesz szükség, a szerkesztőség azt külön fogja kérni.
3. A kéziratokat gépelve, egy oldalra írva, 4 cm-es margóval, kettős sorközzel készítsék el.
4. Az ábrákat ceruzával, sima fehér papírra rajzolják. A nyomda számára a rajzok elkészítését a Kiadó vállalja.
5. Az ábrák alá rövid magyarázószöveget írjanak.
6. A kéziratban az érvényben levő kiadói előírások szerint adjanak szedési útmutatásokat.
7. A szövegben az irodalmi utalásokat szögletes zárójellel tegyék. Az irodalmi adatok megadásakor a folyóiratban kialakult formát használják.



# $\pi$ MEZONOK ELEKTROMÁGNESES TÖMEGKÜLÖNBSÉGE\* I.

PALLA LÁSZLÓ\*\*

ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

A  $\pi$  mezonok elektromágneses tömegkülönbségét a gravitációs kölcsönhatás figyelembevételével oly módon számoltuk ki, hogy az erős kölcsönhatást modell-függetlenül kezeltük. A kapott eredmények alkalmasan választott bemenő adatok esetén összhangban vannak a kísérleti tömegkülönbséggel. Weinberg II. összecsabályának módosításait is vizsgáljuk.

## BEVEZETÉS

Az izotóp spin fogalmának bevezetésével egyidős az a gondolat, hogy az azonos izomultipllettbe sorolt hadronok tömegkülönbségét tisztán elektromágneses hatások (elektromágneses sajátenergia eltolódás) okozzák. Az azonos paritás és spin mellett éppen a közel azonos tömeg a döntő kritérium a feltételezett belső szimmetria szerinti multipllettbe történő besorolásnál. Az első sajátenergia számolás a kvantum-elektrodinamikában az elektron sajáttömegére végtelent adott, de ez itt nem okozott inkonzisztenciát, mert fizikailag nem megfigyelhető mennyiséget jelentett. Ezzel szemben az izomultiplletteken belüli tömegkülönbségek mérhetők, jól definiált, viszonylag stabil mérési eredmények tehát elméleti származtatásuk jelentős. A kísérletileg talált tömegkülönbségek a barionokra, mezonokra és az izobár decuplet elemeire (MeV-ben):

$p - n - 1,29$	$\Pi^\pm - \Pi^0 4,60 \pm 0,014$	$\Delta^0 - \Delta^{++} 0,45 \pm 0,85$
$\Sigma^+ - \Sigma^- - 8,0 \pm 0,11$	$K^+ - K^0 - 3,93 \pm 0,13$	$\Delta^- - \Delta^{++} 7,9 \pm 6,8$
$\Xi^0 - \Xi^- - 6,5 \pm 1,0$	$K^{*+} - K^{*0} - 6,3 \pm 4,1$	$\Sigma^{*+} - \Sigma^{*-} - 5,8 \pm 3,8$
$\Sigma^+ + \Sigma^- - 2\Sigma^0 1,76 \pm 0,23$		$\Delta^{++} + \Delta^0 - 2\Delta^+ 4,81 \pm 5,39$

A dolgozat első részében általánosságban tekintjük át a tömegkülönbségek elméleti származtatását (I. fejezet) és konkrétan a  $\pi$  mezonokra bemutatjuk az áramalgebrai keretben kapott divergens tömegkülönbséget (II. fejezet). A következő dolgozatban megvizsgáljuk, hogy a gravitáció figyelembevétele hogyan módosítja ezt a képet, és a kapott eredményeket összehasonlítjuk a kísérleti adatokkal és elméleti feltételezésekkel.

\* Diplomamunka részletek. Érkezett 1973. május 14.

\*\* V. éves fizikus hallgató.



# I. HADRONOK ELEKTROMÁGNESES TÖMEGKÜLÖNBSÉGE

## 1. §. Perturbációszámítási előzmények

Az első kísérlet a tömegkülönbségek elméleti származtatására a perturbációszámítás keretein belül *Feynman*-tól ered. Pontszerű Dirac részecskére  $e^2$  rendben számolva — az első fejezetben részletezendő általános alapokon — a legalacsonyabb rendű sajátenergiás gráfból

$$\delta m = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \bar{u}(p) \gamma_\mu \frac{i\gamma(p+k) - m}{(p+k)^2 + m^2} \gamma_\mu u(p)$$

és 0 spinű részecskére:

(I.1)

$$\delta m^2 = \frac{ie^2}{16\pi^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \left[ 2 + \frac{k^2 + 4m^2}{k^2 - 2(pk)} \right].$$

Az első logaritmikusan, a másik kvadratikusan divergál. *Feynman* észrevette, hogy ha  $C(k^2)$  konvergencia-faktorral, mely  $k^2 \rightarrow \infty$ -re eltűnik, alkalmas levágást vezetünk be, akkor az integrálok végesek lesznek. A levágás bevezetése úgy értelmezhető, mint a pontszerű részecske töltésének „szétkenése”, a töltés részecskén belüli eloszlásának figyelembevétele, hiszen  $C(k^2)$  nem más, mint a részecske  $X$  térbeli „alakjának” Fourier-transzformáltja. Ekkor természetesen az eddigi lokális  $j(x)A(x)$  kölcsönhatást a  $j(x)C(x-x')A(x')$ -kal helyettesítettük.

Vezessük be a  $r = -\frac{(pk)}{m}$  új integrálási változót, mely a laboratóriumi rendszerben  $k_0$ -ra redukálódik és a  $k_0 \rightarrow ik_0$ , óramutató járásával ellentétes forgást elvégezve (Wick-forgás)  $r \rightarrow ir$ . Legyen  $q^2 = |\vec{k}|^2 + r^2$  ekkor a fenti tömegintegrálok

$$\delta m = \frac{c^2}{4\pi} \frac{m}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dq^2}{q^2} \int_{-|q|}^{+|q|} dr \sqrt{q^2 - r^2} C(q^2) \begin{cases} \frac{q^2 + 2r^2}{q^4 + 2m^2 r^2} & \text{Dirac} \\ \frac{q^2 + 2r^2 + \frac{3q^4}{4m^2}}{q^4 + 2m^2 r^2} & 0 \text{ spin.} \end{cases}$$

Ezekről az integrálokról látható, hogy mindig pozitívak, azaz ilyen módon számolva mindig a töltött részecske tömege adódik nagyobbak. Ez fizikailag nyilvánvaló, ha meggondoljuk, hogy az elektromágneses tasztítás ellen munkát kell végezni, amikor a részecskét összerakjuk darabjaiból.

*Feynman* észrevette, hogy a nukleon-tömeg nagyságrendjébe eső levágási faktorral a pion tömegkülönbség helyes előjellel és nagyságrendben adódik. A proton-neutron esetében már a tömegkülönbség előjelében mutatkozó ellentmondást az anomális mágneses momentum járulékanak figyelembevételével kísérelték meg feloldani, oly módon, hogy az elektromágneses kölcsönhatási tagot egy Pauli-taggal bővítették. Ennek a  $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu + i\lambda \sigma_{\mu\nu} k_\nu$  helyettesítés felel meg, ahol  $\lambda$  az anomális mágneses momentum nukleon-Bohr magnetonokban. A számolás során a direkt mágneses momentum tagnak saját levágó faktort bevezetve — azaz bevezetve a részecske mágneses momentum eloszlását — az elektromágneses sajáttömegben ténylegesen kaptak  $\lambda$ -ban lineáris tagot  $-\lambda G(q^2)$  alakban. Látszik, ha a  $G(q^2)$



mágneses formaktort alkalmasan választjuk, akkor a neutron—proton tömegkülönbség kísérleti értéke megkapható.

Eddig a levágó faktorokat önkényesen választották meg. Azt várták, hogy az erős kölcsönhatás figyelembevétele automatikusan szolgáltatni fogja ezeket a levágásokat és végessé teszi az elektromágneses tömegkülönbségeket. Erre először a diszperziós elmélet keretei között nyílt lehetőség.

## 2. §. Tömegkülönbségek a diszperziós elméletben

(I.1)-et egyszerűen átalakíthatjuk

$$\delta m = \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{d^4 k}{k^2} \delta_{\mu r} T_{\mu r}(p, k) \quad (\text{I.2})$$

ahol  $T_{\mu r}(p, k)$ -ban előállítottuk a legalacsonyabb rendű perturbációs mátrix-elemet egy  $k^2$  tömegű virtuális foton Compton-előreszórásra. A diszperziós elméletben a redukciós technika segítségével ez a mátrixelem egzaktul előállítható  $j_\mu j_r$  Heisenberg-hadronáramok, valamint in—out állapotok segítségével

$$T_{\mu r} = i\pi \int d^4 x e^{ikx} [\langle p | T(j_\mu(x) j_r(0)) | p \rangle + \langle p | T(j_r(x) j_\mu(0)) | p \rangle].$$

Ezt (I.2)-be helyettesítve formálisan zárt kifejezést kapunk, mely az erős kölcsönhatás teljes leírását tartalmazza. Szokásosan bontsuk fel  $T_{\mu r}(p, k)$ -t mértékinvariáns tenzorokra úgy, hogy az eredő invariáns függvények kinematikai szingularitásoktól mentesek legyenek:

$$T_{\mu r}(p, k) = \sum_i \bar{u}(p) I_{\mu r}^{(i)} u(p) t_i(r, k^2).$$

Ha 0 spinű részecskékről van szó, akkor természetesen a spinorok hiányoznak. Itt

$$I_{\mu r}^{(1)} = k^2 \delta_{\mu r} - k_\mu k_r$$

$$I_{\mu r}^{(2)} = \frac{(pk)^2}{m^2} \delta_{\mu r} + \frac{k^2}{m^2} p_\mu p_r - \frac{(pk)}{m} (p_\mu k_r + p_r k_\mu).$$

Az invariáns  $t_i(r, k^2)$ -re írunk diszperziós relációt térszerű  $k^2$ -nél, figyelembe véve a  $\text{Im } t_i(r, k^2) = -\text{Im } t_i(-r, k^2)$  keresztezési relációt

$$t_i(r, k^2) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } t_i(r', k^2)}{r' - r} r' dr'. \quad (\text{I.3})$$

Végrehajtva a Wick-forgást a saját tömeg előállításában, kapjuk az alapvető Cottingham-formulát.

$$\delta m = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dq^2}{q^2} \int_{-|q|}^{+|q|} dr \sqrt{q^2 - r^2} [3q^2 t_1(q^2, ir) - (q^2 + 2r^2) t_2(q^2, ir)].$$



(A Wick-forgás elvégezhetősége körültekintő vizsgálatot igényel.) Az ebben szereplő  $t_i$  függvényeket (I.3) diszperziós reláció segítségével kaphatjuk meg, ha

$$\text{Im } T_{\mu r} = \frac{1}{2} \int d^4 x e^{ikx} \langle p | [j_\mu(x), j_r(0)] + [j_r(x), j_\mu(0)] | p \rangle$$

alakjában az áramok közé a teljes négyesimpulzus operátor teljes sajátfüggvény rendszerét,

$$1 = \int dm \int \frac{d^3 l}{2l_0} |l, l_0 m\rangle \langle m, l_0 l| - t$$

helyettesítjük. Egyrészesce közbülső állapot (pólus-közelítés) esetén

$$\text{Im } T_{\mu r} = \frac{m}{2\pi} \delta(k^2 - 2mr) \sum_\beta \langle p, \alpha | j_\mu(0) | p+k, \beta \rangle \langle p+k, \beta | j_r(0) | p, \alpha \rangle.$$

$\alpha, \beta$  nem impulzus jellegű belső kvantumszámok (spin, izospin). Ha  $|p, \alpha\rangle$   $\alpha$  spinvetületű nukleon állapot

$$\langle p, \alpha | j_\mu(0) | p+k, \beta \rangle = ieN\bar{u}^\alpha(p) \left[ \gamma_\mu F_1(k^2) - i\sigma_{\mu r} k_r \frac{F_2(k^2)}{2mp} \right] u^{(\beta)}(p+k),$$

ha  $|ip\rangle$   $p$  impulzusú  $i$  izospinű pion állapot

$$\langle p, i | j_\mu(0) | p+k, j \rangle = ieN\epsilon_{3ij} (2p_\mu + k_\mu) F_\pi(-k^2)$$

alakú, ahol  $F_1, F_2$  a proton Pauli f. elektromos és mágneses formfaktorai,  $F_\pi$  a pion elektromágneses alakfaktora. Ezért a pólusközelítésben számolt  $t_i$  függvények — és ezáltal a Cottingham-formula is — tartalmazni fogja az alakfaktorokat, a Feynman által önkényesen választott konvergencia-faktorok kifejezhetőek  $F_i$ -k függvényeként, ezeket a kísérleti eredményekből kell venni.

Ha a barion-oktetre feltesszük, hogy a mágneses momentumok az SU(3) szimmetria szerint adódnak, valamint az elektromágneses formfaktorok mindenütt a nukleon formfaktoral helyettesíthetők, és protonra (Sachs-féle jelölésben):

$$G_E(q^2) = \frac{1}{\mu_p} G_M(q^2) = \left( 1 + \frac{q^2}{q_0^2} \right)^{-2} \quad \begin{matrix} q_0^2 = 0,71 (\text{GeV})^2 \\ \mu_p = 2,79, \end{matrix}$$

akkor a Born-közelítésben

$$p - n \ 0,79, \quad \Sigma^+ - \Sigma^- \ 0,20, \quad \Xi^0 - \Xi^- \ 0,96, \quad \Sigma^+ + \Sigma^- - 2\Sigma^0 \ 1,73$$

MeV-nek adódik, tehát a  $p-n$  tömegkülönbség ebben a közelítésben is rossz előjellel adódik. A pionokra a szokásos  $F_\pi(q^2) = \left( 1 + \frac{q^2}{m_\rho^2} \right)^{-1}$   $\rho$  domináns alakot feltevezve, a Born-közelítés 4,37 MeV-et ad, míg bonyolultabb feltételeket téve a  $K$  mezon formfaktorára a  $K^+ - K^0$  tömegkülönbség 2,17 MeV-nek adódik, előjelben is ellentétes a kísérlettel.

Természetesen az (I.3) diszperziós integrálhoz a pólustagon felül van még a többrészesekes közbülső állapotoknak megfelelő kontinuum-járulék is. Ez



a járulék kapcsolatba hozható a különböző fotokeltési folyamatokkal és a rezonanciák nehezen mérhető formfaktorainak ismeretét igényli. Nukleonrezonanciákra általában nukleon-formfaktor + ismert tömeg feltételezésével a Born-taghoz képest viszonylag kis hozzájárulást kaptak. A mezonrezonanciák még nem ismertek eléggé ahhoz, hogy figyelembe lehessen venni őket.

### 3. §. A tömegkülönbségek nyitott problémái

Látjuk, hogy amennyiben a Born-tagokat és (ahol lehet) a rezonancia járulékokat vesszük figyelembe — ami ésszerű feltételezés, ha elfogadtuk az (I.3) diszperziós integrál levonás nélküli konvergenciáját, akkor nem csak a  $p-n$ , de majdnem minden tömegkülönbség rossz előjellel és nagyságban adódik. A két kivétel a  $\pi^\pm - \pi^0$  és  $\Sigma^+ + \Sigma^- - 2\Sigma^0$  tömegkülönbség. Harrari mutatta meg először, hogy ennek mi az oka. Először is észrevette, hogy minden tömegkülönbség ( $e^2$  rendig)  $\Delta I=1$  vagy  $\Delta I=2$  ként transzformálódhat izotóp spin térben, ugyanis minden foton kölcsönhatás izovektor és izoskálár részből áll, ezért a két foton kölcsönhatás 0,1 vagy 2 izotóp spinegységet hordozhat. A 0 izospinhez rendelt elektromágneses tömeg egy multipletten belül minden részecskére megegyezik és így a tömegkülönbségből kiesik.

Minthogy a pionok egységnyi izotóp spinnel rendelkeznek és egy  $\vec{V}$  vektoroperátor mátrix-eleme  $I=1$  állapotok között  $\langle 1, m | v_i | 1, m \rangle \sim \epsilon_{mim} = 0$ , látható, hogy ebben az esetben csak a  $\Delta I=2$ -es rész járulhat hozzá a tömegkülönbséghez. Hasonló a helyzet a  $\Sigma^+ + \Sigma^- - 2\Sigma^0$  esetben is. Másrészt az összes tömegkülönbség, mely Born-közelítésben rossz előjellel adódott,  $\Delta I=1$  tulajdonságúnak bizonyul.

Ahhoz, hogy az (I.3) levonás nélküli diszperziós integrál konvergáljon,  $t_i(r, q^2)$ -nek elég gyorsan el kell tűnnie  $r \rightarrow \infty$ -re, rögzített  $q^2$ -nél. A fenti észrevétel alapján tekintsük külön a  $\Delta I=1$  és  $\Delta I=2$ -hez adódó járulékaikat,  $t_i^{(I)}(r, k^2)$ -t. Ezeknek aszimptotikus viselkedésére a virtuális Compton-hatáskeresztmetszet feltételezett állandóságából vonhatunk le következtetéseket az optikai-tétel segítségével:

$$\sigma \sim \frac{1}{r} \text{Im } T_{\mu\mu}$$

$T_{\mu\mu}$  invariáns-operátoros előállításából

$$|r^2 t_2^{(I)}(q^2, r)| \leq \text{konst} \cdot r \quad r \rightarrow \infty,$$

azaz mindkét izotóp spin csatornában alkalmasan viselkedik, ugyanakkor  $t_1^{(I)}$ -re csak  $|t_1^{(I)}(r, q^2)| \leq \text{konst} \cdot r$   $r \rightarrow \infty$ , ami megengedi az aszimptotikus  $t_1^{(I)} \sim r^{\alpha_1(0)}$ ;  $\alpha_1(0) < 1$  viselkedést. Minthogy nincsenek alacsonyan fekvő  $I=2$ -vel rendelkező mezonok,  $\alpha_2(0) < 0$ , azonban a  $\Delta I=1$ -es izospin csatornában az  $A_2$  mezon ( $I=1$ ,  $G=1$ ,  $C=1$ ,  $P=+$ ,  $J=2$ ) kicserélhető, és  $\alpha_{A_2}(0) \sim 0,4$ .

Látható, hogy  $\Delta I=2$  esetben  $t_1$  és  $t_2$ -re valóban konvergensek a levonás nélküli diszperziós relációk, tehát várhatjuk, hogy a Born-közelítés alkalmazható,  $\Delta I=1$  esetén azonban (I.3) helyett

$$t_1^{(1)}(r, k^2) = t_1^{(1)}(0, k^2) + \frac{2r^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\text{Im } t_1^{(1)}(r', k^2)}{(r'^2 - r^2)} dr'$$



írandó, ahol most már  $\alpha_1(0) = \alpha_{A_2}(0) \sim 0,4$  esetén is konvergens az integrál. A levonási tag megjelenése miatt azonban nem várhatjuk el, hogy a néhány alacsonyan fekvő állapotot megtartó közelítés helyes előjelű és nagyságrendű eredményt szolgáltatson.

A diszperziós tárgyalás keretein belül kiterjedt kísérletek voltak a levonási tag leszámaztatására, illetve figyelembevételére. Próbálkoztak egy izomultiptetten belüli virtuális Compton-amplitúdók kombinációjára, valamint  $t_1^{(1)}(r, k^2) - t_1^{(1)Reggl}(r, k^2)$ -re felírt levonás nélküli diszperziós relációk feltételezésével. Az eredmények általában erősen függtek attól, hogy milyen kiindulási mérési eredményeket vettek figyelembe, egyaránt „jó” és „rossz” is adódott. Általános alapokon bizonyították, hogy a Cottingham-formulában szereplő  $t_i$  függvények nem fejezhetők ki teljes egészükben mérhető mennyiségekkel. Megvizsgálták a Cottingham-formula konvergenciáját a skálátörvények fennállása esetén, és az elektromágneses sajáttömegben kvadratikusan divergenciát találtak, ha csak az operátor Schwinger-tag egyrészecske előreszórás mátrixeleme el nem tűnik, a tömegkülönbségben logaritmikus konvergenciát találtak, ennek eltűnéséhez speciális modellfüggő feltételek kellenek, általában jelen van ez a divergencia is.

Általánosan a véges tömegkülönbségek elméleti magyarázatát a következő lehetőségek nyújthatják:

1.  $\delta m$  a finomszerkezeti állandónak,  $\alpha$ -nak nem analitikus függvénye  $\alpha=0$  körül, tehát a perturbációs sorfejtés nem jogos.

2. A skálázás sérül nagyon kis távolságokon — ezért felelős mechanizmus lehet a gravitáció, mely beépített levágó faktorként hat nagy  $q^2$  tartományban.

3. Az egy izomultiptetten belüli tömegkülönbségek nem csupán elektromágneses eredetűek, származtatásukhoz gyenge kölcsönhatási effektusokat is figyelembe kell venni, a két jelenséget tárgyaló elméletben a kétféle divergenciák kiejthetik egymást.

A továbbiakban a második lehetőséggel, a gravitáció figyelembevételével fogunk foglalkozni konkrétan a pionok esetében. Kiindulásunk nem a fenti diszperziós keretből, hanem tisztán áramalgebrailag leszámaztatott pionkülönbség lesz.

## II. PION TÖMEGKÜLÖNBSÉG AZ ÁRAMALGEBRÁBAN

### 1. §. A tömegkülönbség származtatása

Az áramalgebrai tárgyalásmód kifejlődése — pontosabban a PCAC feltétel és a különböző összszabályok felismerése — lehetővé tette a pion tömegkülönbség nem diszperziós leszámaztatását, mely nehézség nélkül tartalmazza a rezonancia-tartomány járulékát is. Láttuk, hogy a diszperziós tárgyalásban a pion tömegkülönbségre a Born-tag igen jó eredményt adott, azonban az első rezonanciának, az  $A_1$  mezonnak figyelembevételéhez ennek a kevésbé ismert rezonanciának formfaktorait nehezen hozzáférhető tartományban kellene ismerni. Evvel szemben mint látni fogjuk az áramalgebrai tárgyalásban első közelítésben csak a tömegére lesz szükségünk.

Az áramalgebrai leírás lehetőséget ad az erős kölcsönhatás modellfüggetlen kezelésére. Ennek kihasználására gondolatban csatoljuk az erős kölcsönhatást leíró Lagrange-függvényt a szabad Lagrange-függvényekhez és térjünk át az ezek



által meghatározott közbülső kölcsönhatási képbe (Furry-kép analogonja az erős kölcsönhatásnál). Ebben a képben a pion téregyenlete csak az erős kölcsönhatást érzi, az elektromágneses tér szabad egyenletnek tesz eleget. Természetesen az elektromágneses kölcsönhatás „bekapcsolása” előtt a pionoknak már van tömegük, ez az erős tömeg, mely elektromágneses szempontból „csupasz” és korrekcióra szorul. Az elektromágneses kölcsönhatás okozta sajátenergia eltolódás [1]  $\Delta E_i = \langle \Phi_i | H - \mathcal{H} | \Phi_i \rangle$ , ahol  $\mathcal{H}$  a perturbálatlan Hamilton-operátor,  $\mathcal{H} | \Phi_i \rangle = E_i | \Phi_i \rangle$ ,  $H$  az elektromágneses kölcsönhatást érző terekből felépülő perturbált Hamilton-operátor, ennek képe a kölcsönhatási képben  $\mathcal{H} + H'$ , itt  $H'$  a kölcsönhatási Hamilton-operátor, mely az elektromágneses kölcsönhatást nem, de a többi érző terekből épül fel. A sajátenergia eltolódás  $H'$ -ben másodrendig [1, 2]

$$\Delta E = \text{Re} \frac{(2\pi)^3}{2i} \int d^4x [ \langle \Phi_p | T(H'(x)H'(0)) + 2i\delta^{(4)}(x) H'(x) | \Phi_p \rangle - \langle 0 | u \cdot a \cdot 0 \rangle ].$$

A Hamilton-operátort a Lagrange-függvényből kell megkonstruálni. A Furry-képbe történt áttérés után maradt kölcsönhatási Lagrange-függvény  $\mathcal{L}_\gamma = -eA_\mu \cdot (j^\mu + e\pi^+\pi A^\mu)$ , ahol  $j^\mu$  az erős hadron-áram. Az ebben levő derivált csatolás miatt a kölcsönhatási Hamilton-függvény nem fog megegyezni a kölcsönhatási Lagrange-függvény  $(-1)$ -szeresével [1], hanem további, nem kovariáns tagokat is tartalmaz. [2] és [3]-ban megmutatták, hogy ezek a nem kovariáns járulékok egzaktul kiesnek a  $T$  szorzat nem kovariáns voltából eredő tagokkal, ezért következetesen elhanyagolunk minden — ezen két helyről eredő — nem kovariáns járulékot. Az  $e^2\pi^+\pi A_\mu A^\mu$  kontakt tag járuléka végtelen, de (magasabb rendben kompenzálódik [1]) alkalmas mértékválasztással (Fried—Yennie-féle mérték) kiejthető, továbbiakban mindig ebben a mértékben fogunk dolgozni.

Végezzük el az elektromágneses renormálást. Minthogy  $e$ -ben másodrendig számolunk, mindenhol  $e^2 = e_F^2$  írható, továbbá mivel a renormálási konstansok is másodrendű tagokkal kezdődnek és  $\mathcal{L}_\gamma$  is tartalmaz  $e$ -t, a fotontér mindenütt renormálatlannak veendő. A tömegrenormálás kérdéséhez tekintsük (II.1)-nek alternatív lezármasztását [4].

Az elektromágnesesen teljesen korrigált, nem renormált mezonpropagátor  $\Delta'_F$ , az elektromágneses szempontból „csupasz” propagátor,  $\Delta_F$ , segítségével  $\Delta'_F(p) = \Delta_F(p) + \Delta_F(p) \pi(p) \Delta'_F(p)$  alakban írható.  $\Delta_F$  csupasz voltát az jelenti, hogy az elektromágneses szempontból csupasz tömegnél,  $m_0$ -nál van pólusa;  $\pi(p)$  a teljesen felkorrigált, kompakt sajátenergiás betétrész, tömegoperátor,  $\pi(p)$  olyan vonalakból épül fel, ahol az  $m_0$  tömeg szerepel. Az unitaritásból eredően  $\Delta'_F(p)$ -nek  $p^2 = m_F^2$  fizikai tömeg helyén van pólusa, ebből következik, hogy  $\delta m^2 = m_F^2 - m_0^2 = \pi(m_F^2)$ . Figyelembe véve, hogy másodrendig a tömegoperátor és a teljes sajátenergiás betétrész megegyezik, valamint a

$$\Delta'_F(x-y) = \langle 0 | T(\pi(x)\pi(y)S) | 0 \rangle / \langle 0 | S | 0 \rangle$$

kifejezésben az  $S$  mátrix kifejtését elvégezve, hajtsuk végre a Fourier-transzformációt és alkalmazzuk a redukciós-technika összefüggéseit „visszafelé”, eredményül (II.1)-et kapjuk. A számolásban jelentős volt, hogy a csupasz propagátornak a nem-renormált tömegnél van a pólusa. Ha először elvégezzük az additív tömegrenormálást, akkor  $\pi(m^2)$  helyett  $\tilde{\pi}(m^2)$  függvényt kapunk, ahol a  $\sim$  azt jelenti, hogy a belső vonalakon a fizikai tömeg szerepel. Ebben az esetben a  $\Delta'_F(p)$  pólusának létezéséből



fakadó követelmény  $\tilde{\pi}(m_F^2)=0$ , azaz a már felkorrigált tömeghez képest nincs eltolódás, amint az várható is volt. Ebben az esetben a  $\delta m^2$  sajátenergiát a regularizáló kontratag segítségével lehet kiszámolni.

A továbbiakban az első lehetőséget fogjuk választani, elektromágneses tömegrenormálást nem végzünk (II.1)-ből leszarmaztatott bármely összefüggést az elektromágneses szempontból csupasz piontömegnél ( $\sim m_\pi^2$ ) kell venni.

Az összes elhanyagolást figyelembe véve a fenti mértékben a sajátenergiára kapjuk [5]:

$$\Delta E = e^2 (2\pi)^3 \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int d^4 x \langle 0 | T(A_\mu(x) A_r(0)) | 0 \rangle \cdot [\langle \pi | T(j^\mu(x) j^r(0)) | \pi \rangle - \langle 0 | u \cdot a \cdot | 0 \rangle]$$

innen a tömegkülönbség

$$m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = \delta_\mu^2 = e^2 \frac{2E_\pi}{4\pi} \operatorname{Re} \int \frac{d^4 q}{q^2 + i\varepsilon} \left( \eta_{\mu r} - 4 \frac{q_\mu q_r}{q^2} \right) T^{\mu r}(q, k)$$

ahol

$$T^{\mu r}(q, k) = \int d^4 x e^{iqx} [\langle \pi^+(k) | T(j^\mu(x) j^r(0)) | \pi^+(k) \rangle - \langle \pi^0(k) | T(j^\mu(x) j^r(0)) | \pi^0(k) \rangle].$$

Az áramnak csak az izovektor része járul hozzá  $T^{\mu r}$ -höz ( $G$  paritás megmaradása miatt), azaz  $j_\mu(x) = V_\mu^3(x)$  írható. A pionokat izotóp térbeli Descartes-koordinátákra bontva és mindkettőt kiredukálva

$$T^{\mu r}(q, k) = \frac{e^2 (k^2 - m_\pi^2)^2}{(2\pi)^3 2E_\pi} \int d^4 x d^4 y d^4 z c^{iqx} e^{ik(y-z)} \cdot$$

$$\langle 0 | T \left( \left[ \sum_{a=1}^3 r_a \pi^a(y) \pi^a(z) \right] V^{\mu 3}(x) V^{\nu 3}(0) \right) | 0 \rangle$$

ahol  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $r_3 = -1$ . Használjuk a PCAC feltételt a következő alakban,

$$\pi^a(y) = \frac{1}{F_\pi m_\pi^2} \partial^\mu A_\mu^a(y)$$

és a külső  $k$  pion impulzusokban hajtsunk végre  $k \rightarrow 0$  határátmenetet (soft pion limit). A  $k \rightarrow 0$  határátmenet elvégzéséhez megjegyezzük, hogy  $\delta\mu^2$ -ben  $T^{\mu r}(k, q)$   $k^2 = m_\pi^2$  helyen vett értéke szerepel, azonban a fenti függvényalakokkal  $T^{\mu r}(k, q)$  értelmezhető a tömeghéjon kívül is, minden  $k^2 > s$  értékre. Ezt a  $T^{\mu r}$  függvényt a tömegkülönbség képletébe visszahelyettesítve  $\Delta(s)$  függvényt kapunk, melyre  $\Delta(s = m_\pi^2) = \delta\mu^2$  a tényleges tömegkülönbség.  $\Delta(s)$ -nek  $s = m_\pi^2$  helyen pólusa, és elágazási pontja van. [6]-ban megmutatták, hogy a vágás járuléka ésszerűen becsülhető, és  $\Delta(m_\pi^2) - \Delta(0)$  esetleges járuléka tömegkülönbséghez csak  $\sim 0,1$  MeV, tehát van értelme a  $k_\mu \rightarrow 0$  határátmenetnek, ezzel nem hagyunk el végtelen mennyiségeket, a végesek járuléka pedig kicsi.

A  $k \rightarrow 0$  határátmenet elvégzése után hajtsunk végre parciális integrálásokat, hogy az axiál áramokról eltávolítsuk a deriválásokat. (A fellépő felületi integrálokat



és nem kovariáns tagokat az előző megállapítások fényében elhanyagoljuk.) Felhasználva az

$$\begin{aligned} [A_0^a(\vec{x}, t), A_\mu^b(\vec{y}, t)] &= i\epsilon^{abc} V_\mu^c(x) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + A_{A0}^{ab} A_\mu(\vec{x}, \vec{y}, t) \\ [A_0^a(\vec{x}, t), V_\mu^b(\vec{y}, t)] &= i\epsilon^{abc} A_\mu^c(x) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + A_{A0}^{ab} V_\mu(\vec{x}, \vec{y}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

áram—áram kommutátorokat, kapjuk

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(0, q) &= \frac{2e^2}{(2\pi)^3 2E_\pi F_\pi^2} \int d^4 x e^{iqx} [\langle 0 | T(V^{\mu 3}(x) V^{\nu 3}(0)) | 0 \rangle - \\ &- \langle 0 | T(A^{\mu 3}(x) A^{\nu 3}(0)) | 0 \rangle] = \frac{2e^2}{(2\pi)^3 2E_\pi F_\pi^2} (\Delta^{\nu\mu}(q) - \Delta^{A\mu\nu}(q)). \end{aligned}$$

Az utolsó tényező általános szerkezete

$$\Delta_{\mu\nu}^V(q) - \Delta_{\mu\nu}^A(q) = F(q^2) \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu G(q^2). \quad (\text{II.3})$$

A Schwinger-tagokat elhagyjuk, ugyanis a  $\Delta^V - \Delta^A$ -ra feltételezett aszimptotikus viselkedés ( $SU(2) \otimes SU(2)$  szimmetria) mellett kiesnek, illetve eltűnésük nagy  $q^2$ -re nem ad új információt az  $F(q^2)$ , illetve  $G(q^2)$  viselkedéséből következő információkon felül. Beírva a propagátorok spektrál-előállítását

$$\begin{aligned} \Delta^{\nu\mu}(q) - \Delta^{A\mu\nu}(q) &= -i \left\{ \int_0^\infty \frac{dm^2}{-q^2 + m^2 - i\epsilon} \left[ \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m^2} \right) (\varrho_V(m^2) - \varrho_A(m^2)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q^\nu q^\mu}{m^2} \Delta\varrho_A(m^2) \right] + F_\pi^2 \frac{q^\mu q^\nu}{-q^2 + m_\pi^2 - i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Itt  $\varrho_V(m^2)$ , illetve  $\varrho_A(m^2)$  a transzverzális vektor, illetve axiálvektor spektrálfüggvény,  $\Delta\varrho_A(m^2)$  a longitudinális axiálvektor spektrálfüggvény a pion járulék nélkül. A spektrálfüggvények kielégítik Weinberg I. összesszabályát

$$\int_0^\infty dm^2 \frac{\varrho_V(m^2) - [\varrho_A(m^2) + \Delta\varrho_A(m^2)]}{m^2} = F_\pi^2. \quad (\text{II.4})$$

(II.4)  $G(q^2)$  szuperkonvergencia követeléséből ( $q^2 G(q^2) \rightarrow 0$ ;  $q^2 \rightarrow \infty$ ) ered. Ezt felhasználva kapjuk a tömegkülönbségre:

$$\begin{aligned} \delta\mu^2 &= \frac{3ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{F_\pi^2} \int \frac{d^4 q}{q^2} \left\{ \int_0^\infty dm^2 \frac{\varrho_V(m^2) - \varrho_A(m^2)}{m^2 - q^2} - \frac{m_\pi^2 F_\pi^2}{m_\pi^2 - q^2} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty dm^2 \frac{\Delta\varrho_A(m^2)}{m^2 - q^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$



## 2. §. A tömegkülönbség vizsgálata

[5]-ben a soft pion határérték mellett még  $m_\pi=0$ -t is helyettesítettek, ekkor  $\Delta Q_A(m^2)=0$ , valamint felhasználták Weinberg II. összszabályát  $\int_0^\infty dm^2 [Q_V(m^2) - Q_A(m^2)] = 0$  alakban. ( $F(q^2)$  szuperkonvergencia megkövetelésének eredménye.) Egy részecske közbülső állapot közelítésben  $Q$ , illetve  $A_1$  mezon dominanciát feltételezve

$$Q_V(m^2) = g_\rho^2 \delta(m^2 - m_\rho^2) \quad Q_A(m^2) = g_A^2 \delta(m^2 - m_A^2)$$

— ahol

$$\langle 0 | V_\mu^a(0) | \rho^b(q) \rangle = \frac{\varepsilon_\mu(q) \delta_{ab}}{\sqrt{(2\pi)^3 q_0}} g_\rho,$$

és hasonlóan  $g_A$ -ra — a KSFR relációt,  $g_\rho^2 = 2m_\rho^2 F_\pi^2$ -t figyelembe véve  $\delta_\mu^2 = \frac{3\alpha}{4\pi} m_\rho^2 \cdot 2 \ln 2$  kaptak.

Láttuk [6]-ban, hogy a soft pion technika alkalmazása kevésbé változtatja meg a tömegkülönbséget, azonban a zérus külső pionimpulzushoz történő extrapoláció után is maradhatnak  $m_\pi$ -vel, vagy valamilyen hatványával arányos divergens tagok, melyek az áramok spektrálfüggvényeiből eredhetnek, és így túlélnek a  $k \rightarrow 0$  határmenetet, ugyanis függetlenek a külső pionimpulzusoktól. Ezért (II.5) utolsó két tagja ténylegesen jelen van a tömegkülönbségben, azaz soft pion technika alkalmazása esetén sem megengedett az  $m_\pi=0$  helyettesítés (II.5)-ben. [7]-ben megmutatták, hogy Weinberg I., II. összszabályát feltéve, ez az utolsó két tag logaritmikusan divergáló tömegkülönbséget ad. A bizonyítás azon alapul, hogy véges tömegkülönbséghez az utolsó két tag összegének  $q^{-2}$ -nél gyorsabban kell csökkenni nagy  $q^2$ -re, azaz

$$m_\pi^2 F_\pi^2 + \int_0^\infty dm^2 \Delta Q_A(m^2) = 0.$$

Ez [7] szerint implicálja, hogy  $m_\pi^4 F_\pi^2 \int \frac{Q_\pi(m^2)}{m^2} dm^2 = 0$ , ahol  $Q_\pi(m^2)$  a pion kétpont spektrálfüggvény ( $Q_\pi(m^2) > 0$ ). Ez pedig ellentmond a PCAC-nek, ezért a tárgyalt keretek között (áramalgebra, PCAC, soft pion technika, Weinberg-összszabályok) a pion tömegkülönbség logaritmikusan divergál.

Vizsgáljuk részletesebben a tömegkülönbséget egyrészecske közbülső állapot közelítésben, ekkor  $\Delta Q_A(m^2)=0$ .

1. Weinberg I., II. összszabálya igaz

$$\delta_\mu^2 = \frac{3e^2}{F_\pi^2 (2\pi)^4} \text{Re } i [g_\rho^2 (m_A^2 - m_\rho^2) J_1 - m_\pi^2 F_\pi^2 J_3]$$

$$J_3 = \int d^4 q (q^2 + it)^{-1} (m_\pi^2 - q^2)^{-1}, \quad (\text{II.6})$$

ahol  $J_1$  az előző konvergens integrál,

$$\delta_\mu^2 = -\frac{3\alpha}{4\pi} m_\pi^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_\pi^2} \quad \Lambda^2 \rightarrow \infty \text{ szerint divergál } (J_3\text{-ből}).$$



## 2. Csak Weinberg I. összszabályát használva + KSFR feltételt

$$\delta\mu^2 = \frac{3e^2}{(2\pi)^2} \operatorname{Re} i [m_A^2 m_\rho^2 J_1 + (m_A^2 - 2m_\rho^2) J_2 - m_\pi^2 J_3]. \quad (\text{II.7})$$

$J_3$  az előző logaritmikusan divergáló integrál,  $J_2$  is az,

$$J_2 = \int d^4q (m_\rho^2 - q^2 - i\varepsilon)^{-1} (m_A^2 - q^2 - i\varepsilon)^{-1}.$$

Ha speciális kompenzáció nem lép fel, a két divergens integrál között, akkor a tömegkülönbség logaritmikusan divergens lesz. [7]-ben a véges pion tömegkülönbség tényétől indítatva módosított összszabályt javasolnak,

$$\int_0^\infty dm^2 [\varrho_V(m^2) - (\varrho_A(m^2) + \Delta\varrho_A(m^2))] = m_\pi^2 F_\pi^2 \quad (\text{II.8})$$

( $q^4 G(q^2) \rightarrow 0$ , ha  $q^2 \rightarrow \infty$  szuperkonvergencia követelménye), mely éppen elvégzi az előbb említett speciális kompenzációt és  $\sim 4,4$  MeV tömegkülönbséget ad  $\varrho$  és  $A_1$  mezon dominancia feltevésével. Evvel az összszabállyal kapcsolatban megjegyezzük; 1. A véges pion tömegkülönbség tényén kívül nincs más indíték, ami kiválasztaná ezt az összszabályt, mint egyedüli lehetséget, ugyanis azok az összszabályok, ahol jobb oldalt  $bm_\pi^2 F_\pi^2$  áll ( $b \sim 1$ , de  $b \neq 1$ ) minden egyéb következményükben (pl.  $A_1$  mezon tömege) néhány százalékos eltéréssel ugyanazt az eredményt adják, mint a  $b=1$  eset, azonban  $b \neq 1$ -re a tömegkülönbség mindig divergens. 2. Még  $b=1$  esetén is a kompenzáció csak az utolsó lépésben következik be, kívánatos lehetne végig létező integrálokkal dolgozni, kívánatos lenne, valami közbülső regularizáció.

Megvizsgálták a pion tömegkülönbséget a soft pion határeset feltevése nélkül, tömeghéjon levő, fizikai pionokra is. [8]-ban a (II.2) áramkommutátorokkal és PCAC-vel összhangban levő módon általánosított Schnitzer—Weinberg 3-pont vertexmódszerrel logaritmikusan divergáló pion tömegkülönbséget kaptak. Lee és Nieh  $SU(2) \otimes SU(2)$  invariáns fenomenologikus Lagrange-függvénnyel, mely pionokat,  $\varrho$  és  $A_1$  mezonokat tartalmazott, szintén logaritmikusan divergens tömegkülönbséget kapott, mely  $m_\pi^2 \rightarrow 0$ -ra visszaadta [5] véges eredményét:

$$\delta\mu^2 = \frac{3\alpha}{4\pi} m_\rho^2 \left[ 2 \ln 2 + \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \left( \ln \frac{m_\rho^2}{m_\pi^2} + \frac{19}{4} \ln 2 - \frac{5}{2} + \frac{1}{8} \ln \frac{A^2}{m_\rho^2} \right) \right].$$

[8]-ban ugyanezt kapták még további  $A_1$  mezon anomális mágneses momentumától függő tagoktól eltekintve.

A logaritmikusan divergáló pion tömegkülönbség nem meglepő, ugyanis Bjorken [9] általános alapokon megmutatta, hogy a hadronok elektromágneses tömegkülönbségében a logaritmikusan divergens rész általában jelen van, kiesése az erős kölcsönhatásra feltételezett modelltől függ.

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy az erős kölcsönhatás egyedül nem teszi végessé a pion tömegkülönbséget, nem szolgáltatja a várt, beépített levágó faktort. A gravitációnak az anyaghoz való univerzális (és nem lineáris) csatolásának figyelembevétele, mely [10]-ben a kvantum-elektrodinamikában, [11]-ben a hadron-elektrodinamikában, [12]-ben erős kölcsönhatás modellben ténylegesen eltávolí-



totta a divergenciákat, kézenfekvővé teszi a gravitáció csatolásának figyelembevételét a modellfüggetlenül kezelt erős kölcsönhatásnál is. Azt várjuk, hogy a gravitációnak a hadronokhoz való direkt csatolódása végessé teszi a (II.5) tömegkülönbséget, az erős kölcsönhatásra vonatkozó kiegészítő feltételek nélkül is. (Bár nem feltétlen várjuk el azt, hogy jó eredményt is szolgáltatasson.)

#### IRODALOM

Az I. fejezet *M. Cini* and *P. Stichel*: Text Book on Elementary Particle Physics Chapter 11 Bi-72(09)1972 Preprint.

1. *H. Umezawa*: Quantum Field Theory North-Holland Publ. Co. Amsterdam 1956.
2. *V. Barger* and *E. Kazes*, Nuovo Cimento 28 385, 1963.
3. *L. S. Brown*, Phys. Rev. 150, 1338, 1966.
4. *Pócsik György*: Személyes közlés.
5. *T. Das*, *G. S. Guralnik*, *V. S. Mathur*, *F. E. Low* and *J. E. Young*, Phys. Rev. Lett. 18, 759, 1967.
6. *J. S. Bell* and *R. P. van Royen*, Phys. Lett. 25B, 354, 1967.
7. *C. L. Cook*, *L. E. Evans*, *M. Y. Han*, *N. R. Lipschitz* and *N. Strauman*, Nucl. Phys. B5, 140, 1968.
8. *I. S. Gernstein*, *B. W. Lee*, *H. T. Nieh* and *H. J. Schnitzer*, Phys. Rev. Lett. 19, 1064, 1967.
9. *J. D. Bjorken*, Phys. Rev. 148, 1467, 1966.
10. *A. Salam* and *J. Strathdee*, Phys. Rev. D1, 3296, 1970.
11. *I. Farkas* and *G. Pócsik* Nucl. Phys. B41, 157, 1972.
12. *M. J. Duff*, *J. Huskins* and *A. Rothery*, Phys. Rev. D4, 1841, 1971.



# BEVEZETÉS A SOKRÉSZECSKEKELTÉS FENOMENOLÓGIÁJÁBA\*

MONTVAY ISTVÁN

ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

Két hadron nagyenergiájú ütközésében keletkezett részecskék eloszlásának tanulmányozása az utóbbi néhány évben igen intenzíven folyt és jelenleg is intenzíven folyik. Ezért a sokrészecskekelés fenomenológiájával igen sok cikk, összefoglaló, iskolajegyzet, konferenciai előadás foglalkozik. E jegyzet ugyan a leglényegesebbnek vélt alapvető fogalmakkal és megfigyelésekkel foglalkozik, de még ilyen szempontból sem tekinthető teljesnek. Részletesebb tárgyalást, ill. kiegészítő anyagot az irodalomjegyzékben feltüntetett [1—6] munka tartalmaz.

## 1. A sokrészecskes végállapotok mérhető jellemzői

### 1.1. Mérhető mennyiségek

A részecskéket keltő, bejövő hadronok négyesimpulzusa legyen  $p_L$ , ill.  $p_R$ . Ekkor az impulzusmegmaradás szerint

$$p_L + p_R = k_1 + k_2 + \dots + k_l, \quad (1.1)$$

ahol  $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) a végállapotban levő  $i$ -edik hadron négyesimpulzusát jelöli,  $l$  a hadronok száma. Ütközési eseményenként  $k_i$  és  $l$  értéke más és más, ezenkívül változik a részecskék típusa is (spinje, töltése, izospinje, ...). A kísérleti fizikus (KF) feladata ezen mennyiségek eloszlásainak felvétele. A mérés véges pontossága miatt a KF az impulzus lehetséges tartományát véges nagyságú cellákra osztja. A cellákat jellemezhetjük a  $k$  hármassimpulzus egy (diszkrét) értékével és a részecske típusára jellemző  $\alpha$  kvantumszámmal ( $\alpha$  lehetséges értékei pl.:  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $p$ , ...). A rövideg kedvéért a cellaindexet jelölhetjük összefoglalva  $K$ -val, azaz  $K := (k, \alpha)$ . Egy eseményt teljesen jellemeznek az  $n(K)$  „betöltési számok”, amelyek megmondják, hogy a  $K$  cellába hány „nyom” (tehát részecske) esik. Az eloszlások felvétele úgy történik, hogy egy sok eseményből álló eseménysorozatot tekintünk, mindegyik eseményen meghatározzuk a betöltési számot (az  $i$ -edik eseményen ez  $n_i(K)$ ) és átlagolunk az eseményekre. Ha összesen  $N$  eseményt tekintünk, és a  $K$  cellába eső nyomok száma az összes eseményen  $n(K) = \sum_i n_i(K)$ , akkor a  $K$  cellába eső részecskék átlagos száma

$$d(K) = \frac{n(K)}{N}. \quad (1.2)$$

\* Jegyzet a XI. Elméleti Fizikai Iskolára. Érkezett 1973. aug. 17.



Ez az „egyrészecske eloszlás”. Az eseményenkénti részecskeszám legyen  $n_i = \sum_K n_i(K)$ , ekkor az átlagos részecskeszám („átlagmultiplicitás”)

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_i n_i}{N} = \frac{\sum_{i,K} n_i(K)}{N} = \sum_K d(K). \quad (1.3)$$

Az egyrészecskeeloszláson és átlagmultiplicitáson kívül lehet bonyolultabb fizikai mennyiségeket is származtatni az  $n_i(K)$  betöltési számokból. Általában, ha az  $F$  fizikai mennyiség értéke az  $n(K)$  betöltési számok  $F[n(K)]$  függvénye, akkor  $F$  átlagértéke:

$$\langle F \rangle = \frac{\sum_i F_i}{N} = \frac{\sum_i F[n_i(K)]}{N}. \quad (1.4)$$

Egyszerű példák az  $F$  függvényre a következők:

a) *Lineáris függvény*: ennek az általános alakja

$$F[v(\cdot)] = \sum_K v(K) h(K), \quad (1.5)$$

ahol  $h(K)$  egy tetszőleges függvény. ( $F$  argumentumában a  $v(K)$  betöltési szám a változó és nem  $K$ , ezért jelöltük  $v(\cdot)$ -tal!) Az átlagérték ebben az esetben, (1.2) felhasználásával.

$$\langle F \rangle = \sum_K d(K) h(K). \quad (1.6)$$

A mérésben  $h(K)$  jelentheti a műszer érzékenységét a  $K$  cellában ( $h(K)=1$  ideális érzékenység,  $h(K)=0$  teljes érzéketlenség). Speciális eset, ha  $K=(k, \alpha)$  esetén  $h(K)=1$  ha mondjuk  $\alpha=\pi^+$  és  $h(K)=0$ , ha  $\alpha \neq \pi^+$ . Ekkor (1.6) a „ $\pi^+$ -eloszlást” adja. Hasonlóan lehet pl. az antibarion-eloszlást definiálni stb.

b) *Kvadratikus függvény*: az általános alak és az átlagérték a következő

$$F[v(\cdot)] = \sum_{K_1, K_2} v(K_1) v(K_2) h(K_1, K_2), \quad (1.7)$$

$$\langle F \rangle = \sum_{K_1, K_2} \Delta_2(K_1, K_2) h(K_1, K_2),$$

ahol  $\Delta_2(K_1, K_2)$  a  $K_1$  és  $K_2$  cellában levő részecskeszám szorzatának átlagértéke:

$$\Delta_2(K_1, K_2) = N^{-1} \sum_i n_i(K_1) n_i(K_2). \quad (1.8)$$

c) *k-adrendű függvény*: az a) és b) pont általánosításaként legyen

$$F[v(\cdot)] = \sum_{K_1, \dots, K_k} v(K_1) \dots v(K_k) h(K_1, \dots, K_k), \quad (1.9)$$

$$\langle F \rangle = \sum_{K_1, \dots, K_k} \Delta_k(K_1, \dots, K_k) h(K_1, \dots, K_k).$$

A  $\Delta_k(K_1, \dots, K_k)$  mennyiség a „ $k$ -adik sűrűségmomentum” [7]:

$$\Delta_k(K_1, \dots, K_k) = N^{-1} \sum_i n_i(K_1) n_i(K_2) \dots n_i(K_k). \quad (1.10)$$



$k=1$  esetén természetesen  $\Delta_1(K_1)=d(K_1)$  az egyrészecske eloszlás.  $\Delta_k(K_1, \dots, K_k)$  összege  $K_1, \dots, K_k$  szerint nyilván a részecskeszám  $k$ -adik hatványának átlagértéke:  $\langle n^k \rangle = N^{-1} \sum_i n_i^k$ .

d) *A sűrűségmomentumok generátorfüggvénye*: legyen most a fizikai mennyiséget definiáló függvény

$$F[v(\cdot)] = \exp \left\{ i\lambda \sum_K v(K) h(K) \right\}, \quad (1.11)$$

ahol a  $\lambda$  paraméter és a  $h(K)$  függvény adott.  $F$  átlagértéke kifejezhető az előző pontbeli sűrűségmomentumokkal, éspedig:

$$f[\lambda; h(\cdot)] =: \langle F \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^r}{r!} \sum_{K_1, \dots, K_r} \Delta_r(K_1, \dots, K_r) h(K_1) \dots h(K_r). \quad (1.12)$$

Itt definíció szerint  $\Delta_0=1$ . Így a sűrűségmomentumok, ill. azok  $K$  szerinti összegei kifejezhetők az  $f$  „generátorfüggvény” deriváltjaival:

$$\Delta_j(K_1, \dots, K_j) = i^{-j} \frac{\delta^j f[1; h(\cdot)]}{\delta h(K_1) \dots \delta h(K_j)} \Big|_{h(\cdot)=0};$$

$$\Delta_j[h(\cdot)] =: \sum_{K_1, \dots, K_j} \Delta_j(K_1, \dots, K_j) h(K_1) \dots h(K_j) = i^{-j} \frac{\partial^j f[\lambda; h(\cdot)]}{\partial \lambda^j} \Big|_{\lambda=0}. \quad (1.13)$$

Fontos jelentése van  $f[\lambda; h(\cdot)]$  Fourier-transzformáltjának:

$$p[\mu; h(\cdot)] =: \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-i\lambda\mu} f[\lambda; h(\cdot)]. \quad (1.14)$$

Miután (1.11) alapján ez formálisan a  $\delta(\mu - \sum_K n(K)h(K))$  függvény átlagértéke, ezért  $p[\mu; h(\cdot)]d\mu$  annak a valószínűsége, hogy a  $\sum_K n(K)h(K)$  valószínűségi változó értéke  $\mu$  és  $\mu+d\mu$  közé essen. Hasonlóan belátható, hogy

$$p[\mu_1, \dots, \mu_m; h_1(\cdot), \dots, h_m(\cdot)] =: \frac{1}{(2\pi)^m} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_m \cdot$$

$$\cdot e^{-i \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j} f[1; \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\cdot)], \quad (1.15)$$

annak a valószínűsége, hogy a  $\sum_K n(K)h_j(K)$  változók értéke ( $j=1, 2, \dots, m$ ) rendre  $\mu_j$  legyen.

Az  $f[\lambda; h(\cdot)]$  generátorfüggvényből határozhatók meg az ún. „sűrűségkorrelációk” [7], éspedig a következőképpen:

$$f[\lambda; h(\cdot)] =: \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^m}{m!} \sum_{K_1, \dots, K_m} G_m(K_1, \dots, K_m) h(K_1) \dots h(K_m) \right\}. \quad (1.16)$$



A definícióból következik, hogy a  $G_m(K_1, \dots, K_m)$  sűrűségkorrelációs függvények és  $K$  szerinti összegük a következőképpen fejezhetők ki:

$$G_m(K_1, \dots, K_m) = i^{-m} \frac{\delta^m \log f[1; h(\cdot)]}{\delta h(K_1) \dots \delta h(K_m)} \Big|_{h(\cdot)=0}. \quad (1.17)$$

$$G_m[h(\cdot)] =: \sum_{K_1 \dots K_m} G_m(K_1, \dots, K_m) h(K_1) \dots h(K_m) = i^{-m} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \log f[\lambda; h(\cdot)]_{\lambda=0}.$$

A valószínűségi számításban a  $G_m[h(\cdot)]$ -k a  $\sum_K n(K)h(K)$  valószínűségi változó „kumulánsai”. A sűrűségkorrelációk és a sűrűségmomentumok (1.13) és (1.17) alapján kifejezhetők egymással, például:

$$\begin{aligned} \Delta_1(K_1) &= G_1(K_1) \\ \Delta_2(K_1, K_2) &= G_2(K_1, K_2) + G_1(K_1)G_1(K_2) \\ \Delta_3(K_1, K_2, K_3) &= G_3(K_1, K_2, K_3) + G_1(K_1)G_2(K_2, K_3) + \\ &+ G_1(K_2)G_2(K_3, K_1) + G_1(K_3)G_2(K_1, K_2) + G_1(K_1)G_1(K_2)G_1(K_3) \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

e) „*Pár-függvény*”: ez a koincidencia mérést idealizálja. Az  $F$  függvény értéke az  $i$ -edik eseményen ekkor

$$F_i = \sum_{K_1 K_2} [n_i(K_1)n_i(K_2) - \delta_{K_1 K_2} n_i(K_1)] h(K_1, K_2), \quad (1.19)$$

ahol  $h$  adott függvény.  $F$  átlagértéke most:

$$\langle F \rangle = \sum_{K_1 K_2} d_2(K_1, K_2) h(K_1, K_2), \quad (1.20)$$

ahol a  $d_2(K_1, K_2)$  „kétrészecske-eloszlás” („páreloszlás”):

$$d_2(K_1, K_2) = N^{-1} \sum_i [n_i(K_1)n_i(K_2) - \delta_{K_1 K_2} n_i(K_1)]. \quad (1.21)$$

$d_2(K_1, K_2)$  tehát a  $K_1$  és  $K_2$  cellában levő (rendezett) részecskepárok számának átlagértéke. A definícióból nyilvánvaló, hogy  $d_2$  kifejezhető a sűrűségmomentumokkal:

$$d_2(K_1, K_2) = \Delta_2(K_1, K_2) - \delta_{K_1 K_2} \Delta_1(K_1). \quad (1.22)$$

A fenti példákban a  $h$ -függvények speciális megválasztásával sok különböző, érdekes fizikai mennyiség képezhető. Ezenkívül lehet az  $F$  függvényeket másképpen is értelmezni. Ismét más jellegű fizikai mennyiségeket nyerünk, ha valamilyen kritérium alapján az eseménysorozatból kiválasztunk egy részt és az eloszlásokat ezen a részhalmazon definiáljuk. Erre egyszerű példa, ha kikötjük pl., hogy az eseményen az összrészecskeszám  $l$  legyen.

Gyakorlásképpen oldjuk meg a következő feladatot:

*Feladat.* Derítsük ki, hol a hiba a következő okoskodásban: Az átlagos részecskeszám (1.3) alapján

$$\langle n \rangle = \frac{n}{N} =: N^{-1} \sum_i n_i.$$



Tegyük fel, hogy minden eseményen az összenergia  $M$ , ekkor a részecskék átlag-energiája

$$\langle E \rangle = \frac{MN}{n} = \frac{M}{\langle l \rangle}.$$

Másrészt, ha  $p_l$  annak a valószínűsége, hogy egy eseményen  $l$  részecske legyen akkor nyilván

$$\langle E \rangle = \sum_l \frac{M}{l} p_l = M \left\langle \frac{1}{l} \right\rangle,$$

tehát (tetszőleges  $p_l$  eloszlás esetén)

$$\frac{1}{\langle l \rangle} = \left\langle \frac{1}{l} \right\rangle!?$$

Egy másik, kísérletileg fontos példa, ha azt kötjük ki, hogy az eseményen a *töltött* részecskék száma legyen meghatározott. Ilyenkor kapjuk az ún. „fél-inkluzív” (szemi-inkluzív) eloszlásokat. Ismét más példa, ha bizonyos típusú részecskéket (pl. a töltötteket) megfigyelünk, a többi típusút pedig nem figyeljük meg. Általánosabban, a  $K$  cellák halmazát két részre osztjuk, a  $K_1$  cellákat megfigyeljük, a  $K_2$  cellákat nem.

## 1.2. Kapcsolat az $S$ -mátrixszal

Annak a valószínűségét, hogy egy eseményen a cellák betöltési számait  $n(K)$  adja, az  $S$ -mátrixból lehet meghatározni. Ha az  $N$  számú eseményből az adott  $n(K)$  betöltési számok  $N[n(\cdot)]$  esetben következnek be, akkor ( $N \rightarrow \infty$  esetén) az  $n(\cdot)$  betöltés valószínűsége

$$w[n(\cdot)] = \frac{N[n(\cdot)]}{N}. \quad (1.23)$$

Ezt felhasználva az  $F$  fizikai mennyiség átlagértékét definiáló (1.4) egyenlet a következőképpen is írható:

$$\langle F \rangle = N^{-1} \sum_i F[n_i(K)] = \sum_{v(\cdot)} \frac{N[v(\cdot)]}{N} F[v(\cdot)] = \sum_{v(\cdot)} w[v(\cdot)] F[v(\cdot)]. \quad (1.24)$$

Innen látható, hogyha az adott  $n(\cdot)$  betöltés valószínűségét akarjuk mérni, akkor az  $F[v(\cdot)]$  függvénynek  $\delta_{v(\cdot), n(\cdot)}$ -t kell választanunk. Az így kapott  $w[n(\cdot)]$  ún. „exkluzív valószínűség” lehet az  $S$ -mátrix elemekkel kifejezni. Mielőtt azonban ezt a kifejezést felírnánk, bevezetünk egy másik valószínűséget, amely  $w[n(\cdot)]$ -ből származtatható. Ennek definíciójához képzeljük el, hogy minden eseményen a nyomokat *találomra* sorszámmal látjuk el, és meghatározzuk azon események  $N_l(K_1, \dots, K_l)$  számát, ahol az első részecske a  $K_1$  cellába, ..., az  $l$ -edik a  $K_l$  cellába esik. Ha a sorszámozás valóban találomra történt, és a  $(K_1, K_2, \dots, K_l)$  eloszlás az  $n(K)$  betöltési számokhoz tartozik, akkor

$$N_l(K_1, \dots, K_l) = \frac{\prod_K n(K)!}{l!} N[n(\cdot)]. \quad (1.25)$$



Hasonlóan, a  $K_1, \dots, K_l$  eloszlás valószínűsége:

$$w_l(K_1, \dots, K_l) = \frac{N_l(K_1, \dots, K_l)}{N} = \frac{\prod_K n(K)!}{l!} w[n(\cdot)]. \quad (1.26)$$

Fizikai mennyiségeket nemcsak (1.24) alapján a betöltés függvényében, tehát  $F[v(\cdot)]$  megadásával definiálhatunk, hanem megfelelő az is, ha megmondjuk, mi  $F_l(K_1, \dots, K_l)$ , tehát a  $(K_1, \dots, K_l)$  eloszlás esetén az illető mennyiség értéke. Az  $F$  átlagértéke ekkor

$$\langle F \rangle = \sum_l \sum_{K_1 \dots K_l} \frac{N_l(K_1 \dots K_l)}{N} F_l(K_1 \dots K_l) = \sum_l \sum_{K_1 \dots K_l} w_l(K_1 \dots K_l) F_l(K_1 \dots K_l). \quad (1.27)$$

Kísérleti szempontból nyilván a fizikai mennyiségek (1.24) alakja az egyszerűbb, hiszen az nem tartalmazza a nyomok mesterkéltnek tűnő, kötelezően véletlenszerű sorszámozását. Mint látni fogjuk azonban, az  $S$ -mátrix szempontjából (1.27) alak a könnyebben kezelhető.

Vegyünk néhány egyszerű példát fizikai mennyiségek (1.27)-tel való értelmezésére:

a) *Exkluzív valószínűségek*: ebben az esetben

$$F_l(K_1, \dots, K_l) = \delta_{l, l_0} \delta_{K_1, K_{10}} \dots \delta_{K_l, K_{l_0}}, \quad (1.28)$$

Az átlagérték pedig nyilván  $w_{l_0}(K_{10}, \dots, K_{l_0 0})$ .

b) *k-részecske eloszlás*: ez az előző pontban értelmezett egy- és kétrészecske eloszlások általánosítása.  $F$  értéke most  $l \geq k$  esetén nem zérus:

$$F_l(K_1 \dots K_l) = l(l-1) \dots (l-k+1) \delta_{K_1, K_{10}} \dots \delta_{K_k, K_{k0}}, \quad (1.29)$$

tehát az átlagérték (a „ $k$ -részecske eloszlás”):

$$d_k(K_{10}, \dots, K_{k0}) = \sum_l l(l-1) \dots (l-k+1) \sum_{K_{k+1} \dots K_l} w_l(K_{10}, \dots, K_{k0}, K_{k+1}, \dots, K_l). \quad (1.30)$$

c) *Exkluzív generátorfüggvény*: legyen a fizikai mennyiséget definiáló függvény

$$F_l(K_1, \dots, K_l) = z(K_1)z(K_2) \dots z(K_l), \quad (1.31)$$

ahol  $z(K)$  egy adott függvény. Ekkor  $F$  átlagértéke az „exkluzív generátorfüggvény”:

$$E[z(\cdot)] = \sum_l \sum_{K_1 \dots K_l} w_l(K_1 \dots K_l) z(K_1) \dots z(K_l). \quad (1.32)$$

A definícióból nyilvánvaló, hogy  $E[z(\cdot)]$  deriváltjaival kifejezhetők az exkluzív valószínűségek és az „inkluzív”  $k$ -részecske eloszlások is [8–9]:

$$w_l(K_1 \dots K_l) = \frac{1}{l!} \frac{\delta^l E[z(\cdot)]}{\delta z(K_1) \dots \delta z(K_l)} \Big|_{z(\cdot)=0}, \quad (1.33)$$

$$d_k(K_1 \dots K_k) = \frac{\delta^k E[z(\cdot)]}{\delta z(K_1) \dots \delta z(K_k)} \Big|_{z(\cdot)=1}.$$



A „ $k$ -részecske korrelációkat” (1.17) mintájára definiáljuk a generátorfüggvényből:

$$C_k(K_1, \dots, K_k) = \frac{\delta^k \log E[z(\cdot)]}{\delta z(K_1) \dots \delta z(K_k)} \Big|_{z(\cdot)=1}. \quad (1.34)$$

Ezek ugyanolyan összefüggésben vannak a  $k$ -részecske eloszlásokkal, mint (1.18)-ban  $G_k$  van a  $\Delta_k$ -kal.

Az  $S$ -mátrix elemekkel a kapcsolat felírására gondolatban térjünk át arra az idealizált határesetre, amikor a cellákat indexelő  $K$  „kvantumszám” lesz, tehát a mérés olyan pontos, hogy a cellába egyetlen kvantumállapot esik. A kvantumállapot keltő, ill. eltüntető operátora (az egyszerűség kedvéért Bose-részecskék esetén) a szokásos

$$[a_K, a_{K'}^\pm] = \delta_{K, K'} \quad (1.35)$$

cserelációval van definiálva. Ha az impulzustérben a szokásos relativisztikus normálást használjuk, akkor ezentúl a következő megfeleltetést kell tennünk:

$$\sum_K \longleftrightarrow \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 k}{2k_0};$$

$$\delta_{K, K'} \longleftrightarrow \delta_{\alpha\alpha'} 2k_0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1.36)$$

Ezek után felírhatjuk az  $n(\cdot)$  betöltés valószínűségét az  $S$ -mátrix segítségével:

$$w[n(\cdot)] = C |\langle 0 | \prod_K a_K^{n(K)} \frac{1}{\sqrt{n(K)!}} S | i \rangle|^2 =$$

$$= C \prod_K \frac{1}{n(K)!} \langle i | S^+ \prod_K a_K^{+n(K)} | 0 \rangle \langle 0 | \prod_K a_K^{n(K)} S | i \rangle. \quad (1.37)$$

Itt  $|i\rangle$  a kezdeti állapotot,  $|0\rangle$  a vákuumot jelöli és  $C$  egy kinematikai állandó. Mivel  $w$  az (exkluzív) differenciális hatáskeresztmetszet és a teljes hatáskeresztmetszet ( $\sigma_{\text{tot}}$ ) hányadosa, a hatáskeresztmetszet definíciójából

$$C^{-1} = (2\pi)^4 \delta^4(0) v \varrho_1 \varrho_2 \sigma_{\text{tot}}. \quad (1.38)$$

$v$  a bejövő részecskék relatív sebessége,  $\varrho_1$  és  $\varrho_2$  a térbeli sűrűségük.

(1.37) és (1.26)-ból felírhatjuk a  $(K_1, \dots, K_l)$  eloszlás valószínűségét is az  $S$ -mátrixszal:

$$w_l(K_1, \dots, K_l) = \frac{C}{l!} |\langle 0 | a_{K_1} \dots a_{K_l} S | i \rangle|^2 = \frac{C}{l!} \langle i | S^+ a_{K_1}^\dagger \dots a_{K_l}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{K_1} \dots a_{K_l} S | i \rangle. \quad (1.39)$$

A  $k$ -részecske eloszlás (1.30) alapján a következő:

$$d_k(K_1, \dots, K_k) = \sum_l l(l-1) \dots (l-k+1) \sum_{K_{k+1} \dots K_l} \frac{C}{l!} |\langle 0 | a_{K_1} \dots a_{K_l} S | i \rangle|^2 =$$

$$C \langle i | S^+ a_{K_1}^\dagger \dots a_{K_k}^\dagger a_{K_1} \dots a_{K_k} S | i \rangle. \quad (1.40)$$

Látható, hogy a  $k$ -részecske eloszlás egy egyszerű mátrixelemmel fejezhető ki, ezért



az elméleti számolásokban előnyös. (L. általánosított optikai tételek, Mueller—Regge analízis stb.) Az előző pontban bevezetett  $\Delta_k$  sűrűségmomentumok kifejezése nem ilyen egyszerű. Kísérletileg azonban talán azok a természetes mennyiségek. Mindenesetre, ha  $K_1, \dots, K_k$  mind különböző, akkor  $\Delta_k = d_k$ , a különbség csak akkor lép fel, ha az argumentumok közül néhány azonos.

## 2. Az egyrészecske eloszlás

### 2.1. Szokásos változók és alapvető tulajdonságok

A  $d(K) = d(k, \alpha)$  egyrészecske eloszlás a  $k$  hármassimpulzustól és az  $\alpha$  részecske-típus indextől függ. Ha az  $\alpha$  típusú részecske tömegét  $m_\alpha$ -val jelöljük, akkor az átlagmultiplicitás (1.3) és (1.36) alapján

$$\langle n \rangle = \sum_{\alpha} \langle n_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 k}{2k_0} d(k, \alpha) = \sum_{\alpha} \int d^3 k \theta(k_0) \delta(k^2 - m_{\alpha}^2) d(k, \alpha). \quad (2.1)$$

Itt  $\langle n_{\alpha} \rangle$  az  $\alpha$  típusú részecskék átlagmultiplicitása. A továbbiakban, ha külön nem hangsúlyozzuk az ellenkezőjét, akkor mindig egy meghatározott részecsketípust tekintünk, ezért az  $\alpha$  indexet az egyszerűség kedvéért ki sem írjuk.

A bejövő hadronok négyesimpulzusa (1.1) szerint  $p_L$ , ill.  $p_R$ . Az ütközés tömegközépponti energiájának négyzete

$$s = (p_L + p_R)^2. \quad (2.2)$$

Ha a spinbeállítást nem mérjük (a megfelelő  $\alpha$ -kra mindig összegezzünk), akkor (2.1)-ből láthatjuk, hogy a  $d(k)$  egyrészecske eloszlás egy invariáns függvény, tehát csak Lorentz-invariánsoktól függ. Független Lorentz-invariánsoknak választgatjuk ( $s$  mellett) pl.  $k \cdot p_L$  és  $k \cdot p_R$ -et. De választhatunk más változókat is, pl. a  $W^2 = (p_L + p_R - k)^2$ -et (az ún. „hiányzó tömeg” négyzetét) és  $t_L = (p_L - k)^2$ -et vagy  $t_R = (p_R - k)^2$ -et, a balra menő, ill. jobbra menő bejövő részecskékhez viszonyított négyesimpulzusátadás négyzetét.

Sokszor a fizikai folyamat megértéséhez előnyösebb a fenti Lorentz-invariánsok helyett más változókat használni. Ennek oka, hogy a két bejövő részecske iránya (a „longitudinális irány”) fizikailag kitüntetett. Az egymáshoz képest longitudinálisan mozgó koordináta-rendszerek (pl. a labor rendszer, a tömegközépponti rendszer, a bombázó részecske nyugalmi rendszere) között nincs alapvető különbség, a folyamat leírására bármelyik egyformán alkalmas. Éppen ezért célszerű „longitudinálisan invariáns” mennyiségeket használni, amelyek a longitudinálisan mozgó rendszereket összekötő Lorentz-transzformációkkal szemben invariánsak. Válasszuk a  $z$ -tengelyt a longitudinális irányban, ekkor az  $xy$ -síkban vannak a „transzverzális irányok”. A részecske  $k_{\mu}$  négyesimpulzusának transzverzális komponenseiből képezett 2 dimenziós vektort jelölje  $\vec{k}$ , ennek hosszát  $k_{\perp}$ . A  $k_0$  energia és a  $k_{\parallel} =: k_z$  longitudinális komponens helyett néha célszerű a

$$k_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (k_0 \pm k_{\parallel}) \quad (2.3)$$

„fényserű komponensek” használata.



A longitudinális Lorentz-transzformációk („búztok”) egyszerűen hatnak a részecske  $y$  „gyorsaságára” („rapiditására”), amelyet a következő összefüggések definiálnak ( $m$  a részecske tömege, tehát  $k^2 = 2k_+k_- - k_\perp^2 = m^2$ ):

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{k_+}{k_-} = \text{Arsh} \frac{k_\parallel}{\sqrt{m^2 + k_\perp^2}},$$

$$k_\parallel = \sqrt{m^2 + k_\perp^2} \operatorname{sh} y, \quad k_0 = \sqrt{m^2 + k_\perp^2} \operatorname{ch} y, \quad (2.4)$$

$$k_\pm = \sqrt{\frac{m^2 + k_\perp^2}{2}} e^{\pm y}.$$

A longitudinális Lorentz-transzformációk a  $\vec{k}$  transzverzális impulzust nem változtatják, így nem változik az  $m_{tr} = \sqrt{m^2 + k_\perp^2}$  „transzverzális tömeg” sem. Ezért az  $y$  gyorsaságok értéke egy additív állandóval változik, a longitudinális búztok  $y$ -ban egyszerű eltolások. Következésképpen a gyorsaság-különbségek longitudinális invariánsok.

Az egyszerűség kedvéért legyen a bejövő részecskék tömege is  $m$ . Jelöljük a tömegközépponti rendszerben  $p_R$  és  $p_L$  fényszerű komponenseit a következőképpen:

$$p_{L+} = p_{R-} = \frac{Q}{\sqrt{2}}, \quad p_{L-} = p_{R+} = \frac{m^2}{Q\sqrt{2}}. \quad (2.5)$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a (2.2)-beli  $s$ -sel az összefüggés:

$$\sqrt{s} = Q + \frac{m^2}{Q}, \quad Q = \frac{1}{2} (\sqrt{s} + \sqrt{s - 4m^2}) \cong \sqrt{s} - \frac{m^2}{\sqrt{s}} + \dots \quad (2.6)$$

(Ezentúl a  $\cong$  egyenlőség mindig  $s \rightarrow \infty$  esetén értendő.) Jelölje a balra mozgó bejövő részecske gyorsaságát  $Y_L$ , a jobbra mozgóét  $Y_R$ . A kettő (longitudinálisan invariáns) különbsége  $Y =: Y_L - Y_R$  az ütköző részecskék gyorsaságkülönbsége. Ez a nagy-energiájú ütközés fontos jellemzője. (2.5) és (2.4) összehasonlításából következik, hogy

$$Y = \log \frac{Q^2}{m^2} = 2 \log \frac{Q}{m} \cong \log \frac{s}{m^2}, \quad (2.7)$$

$$Q = m e^{Y/2}.$$

Ha a keletkezett részecskék  $y$  gyorsaságát a bejövőkéhez viszonyítjuk, akkor a kapott relatív gyorsaságok alkalmas, longitudinális invariáns változók:

$$y_L =: y - Y_L; \quad y_R =: y - Y_R. \quad (2.8)$$

Ezek helyett használhatjuk a fényszerű komponensek viszonyát is, amelyek definíciója:

$$\xi_L =: \frac{k_+}{p_{L+}} = \sqrt{1 + \frac{k_\perp^2}{m^2}} e^{y - Y_L},$$

$$\xi_R =: \frac{k_-}{p_{R-}} = \sqrt{1 + \frac{k_\perp^2}{m^2}} e^{Y_R - y}. \quad (2.9)$$



A  $d$  egyrészecske eloszlást ezek után (spintelen vagy polarizálatlan esetben) tekintetjük  $s$ ,  $k_{\perp}^2$  és  $y_{L(R)}$  vagy  $\xi_{L(R)}$  függvényeként. Az  $s$ -energiafüggést, mint magától értetődőt, ezek után nem mindig írjuk ki (vagy esetenként  $Y$ -nal vagy  $Q$ -val fejezzük ki). A differenciális egyrészecske-eloszlás ezekben a változókbán:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 k}{2k_0} d(k) &= d^2 \vec{k} \frac{dk_{\pm}}{2k_{\pm}} d(k_{\pm}, \vec{k}) = \frac{\pi}{2\xi_{L(R)}} dk_{\perp}^2 d\xi_{L(R)} d(\xi_{L(R)}, k_{\perp}^2) = \\ &= \frac{\pi}{2} dk_{\perp}^2 dy_{L(R)} d(y_{L(R)}, k_{\perp}^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Az egyrészecske eloszlásoknak nagy energián van néhány hamar szembe tűnő, általános tulajdonsága:

i) *Kis átlagmultiplicitások törvénye*: az átlagmultiplicitás (az egyrészecske-eloszlás integrálja) viszonylag lassan növekszik. A növekedés konzisztens az  $Y \left( \cong \log \frac{s}{m^2} \right)$ -nal arányos növekedéssel, míg az energiamegmaradás megengedne egy  $Q$ -val ( $\cong \sqrt{s}$ -sel) arányos növekedést is.

ii) *Kis transzverzális impulzusok törvénye*: a keletkezett részecskék átlagos transzverzális impulzusa kicsi ( $\cong 0,3$  GeV) a longitudinális impulzusokhoz képest. (Ez a „sugár szerkezet” vagy „jet structure”.)

iii) *Közelítő Feynman-skálázás*: a kísérletek tanulsága szerint, ha az egyrészecske eloszlásokat a transzverzális impulzussal és a relatív longitudinális impulzussal fejezzük ki, akkor különböző energiákon közelítőleg ugyanazt a függvényt kapjuk. Ha a Feynman-skálázás pontosan igaz lenne, akkor ez szükségtelenné tenné az egyre nagyobb gyorsítók építését, mivel a nagyobb energiás mérés eredménye pontosan megjósolható lenne az alacsonyabb energiás eredményekből. (A nagyobb energiájú gyorsító sem nyújtana több információt.)

A Feynman-skálázás pontos megfogalmazása a következő: legyen  $x$  a részecske longitudinális impulzushányada a tömegközépponti rendszerben, tehát (a tömegközépponti változókat egy  $*$ -gal megkülönböztetve):

$$x =: \frac{k_{*z}}{p_{L*z}} \cong \frac{2k_{*\parallel}}{\sqrt{s}}. \quad (2.11)$$

A tömegközépponti (tk) gyorsasággal kifejezve (mivel a  $p_L$ -hez tartozó tk. gyorsaság  $\frac{1}{2} Y$ ):

$$x = \sqrt{1 + \frac{k_{\perp}^2}{m^2}} \frac{\text{sh } y_*}{\text{sh } \frac{Y}{2}}. \quad (2.12)$$

A Feynman-skálázás [10] azt mondja, hogy van egy univerzális  $f(x, k_{\perp}^2)$  függvény, hogy  $s \rightarrow \infty$ , ( $x$  rögzített) esetén

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ k_{*\parallel} \rightarrow \infty}} d(s, k_{*\parallel}, k_{\perp}^2) = f(x, k_{\perp}^2). \quad (2.13)$$

Ez az összefüggés a tömegközépponti rendszerben van értelmezve, de természetesen



átvihető bármely más longitudinális rendszerbe, annál is inkább, mivel a fent definiált  $\xi_{L(R)}$  longitudinálisan invariáns változók aszimptotikusan nagyon egyszerűen fejezhetők ki  $x$ -szel. Például (2.12) és (2.9)-et összehasonlítva,  $s \rightarrow \infty$  esetén:

$$\begin{aligned}\xi_L &= x - \frac{m^2}{s} \left( x - \frac{m^2 + k_{\perp}^2}{xm^2} \right) + \dots \quad (\text{ha } x > 0), \\ \xi_R &= -x + \frac{m^2}{s} \left( x - \frac{m^2 + k_{\perp}^2}{xm^2} \right) + \dots \quad (\text{ha } x < 0).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Láthatjuk tehát, hogy  $x \neq 0$  esetén balra menő részecskékre ( $x > 0$ )  $\xi_L$ , jobbra menőkre pedig ( $-x > 0$ )  $\xi_R$  ugyanolyan jó skálaváltozó, mint  $x$ . Ezért (2.13)-mal egyenértékű az az állítás, hogy a  $\xi_L$  és a  $\xi_R$ -rel kifejezett egyrészecske eloszlás  $s \rightarrow \infty$  esetén  $s$ -től függetlenné válik:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(s, \xi_{L(R)}, k_{\perp}^2) = f_{L(R)}(\xi_{L(R)}, k_{\perp}^2).\tag{2.15}$$

Az  $f_{L(R)}$  határeloszlások jelentése különösen  $p_L$  (ill.  $p_R$ ) nyugalmi rendszerében szemléletes. Ha a balra (ill. jobbra) menő részecskéket a megfelelő bejövő részecskék „töredékeinek” („fragmentumának”) tekintjük, akkor (2.15) azt állítja, hogy a töredékek eloszlása  $s \rightarrow \infty$  esetén egy határeloszláshoz tart. Ez a „limiting-fragmentáció” („határfragmentáció”) hipotézise [11].

Külön figyelmet érdemel a Feynman-skálázás az  $x=0$  pontban. (2.12) miatt  $s \rightarrow \infty$ , azaz  $Y \rightarrow \infty$  esetén minden véges  $y_*$   $x \rightarrow 0$ -nak felel meg. Ha tehát (2.13)  $x=0$ -ra is fennáll, akkor az  $y_*$ -beli eloszlás  $Y \rightarrow \infty$  esetén  $y_*$ -tól függetlenné válik. Véges  $Y$  esetén ez abban tükröződik, hogy kialakul egy „plató” a rapiditásbeli eloszlásban. A platóhoz tartozó „centrális” részecskéket hívják „pionizációs termékeknek” is, mivel a kísérleti megfigyelés szerint ezek túlnyomó többsége pion.

A skálázás fizikai értelmezéséhez tartozik még, hogy (2.13)-ban, ha  $f(x, k_{\perp}^2)$  egy tartományban azonosan eltűnik, vagy pl.  $\delta$ -függvényeket tartalmaz, akkor nincs igazi skálázás.  $\delta(x-x_0)$  pl. fizikailag csak úgy valósulhat meg, hogy esetén a függvény mindenütt zérushoz tart, kivéve  $x=x_0$ -at, ahol végtelenhez tart. Ekkor az aszimptotikus információt tulajdonképpen nem a határfüggvény, hanem az ahhoz való tartás hordozza magában.

## 2.1. Tűzgolyók és az egyrészecske eloszlás

Modellek széles köre [12–15] épül arra a feltételezésre, hogy a részecskeeltetés két lépésben játszódik le. Az első lépésben az összeütköző hadronok erősen gerjesztett hadron-anyag darabokat, „tűzgolyókat” hoznak létre, amelyek egymástól eltávolodnak és statisztikus törvény szerint bomlanak el a megfigyelt, végállapotbeli hadronokká. Az egyrészecske eloszlás meghatározásához többek között szükség van a tűzgolyók bomlástermékeinek eloszlására a tűzgolyó nyugalmi rendszerében. Ha  $M$  a tűzgolyó tömege és  $E$  bomlástermékeinek energiája a tűzgolyó nyugalmi rendszerében, akkor ezt az eloszlást jelöljük  $d(M, E)$ -vel. A tapasztalat szerint a tűzgolyók transzverzális impulzusa kicsi és  $d(M, E)$  gyorsan csökken  $E$  függvényében. Ez magyarázza az előző pontban említett „kis transzverzális impulzusok tör-



vényét". A tűzgolyók tömegének, számának és longitudinális impulzusának eloszlására az egyes modellek más-más feltevéseket tesznek.

Legyen pl. egy balra mozgó,  $M_L$  tömegű tűzgolyó négyesimpulzusa  $p'_L$  és az egyszerűség kedvéért, transzverzális impulzusa  $\vec{p}'_L=0$ . Longitudinális mozgásának jellemzésére vezessük be a

$$\Xi_L =: \frac{p'_{L+}}{p_{L+}} \quad (2.16)$$

változót. Ekkor a tűzgolyó által létrehozott egyrészecske eloszlást célszerű a

$$\xi'_L =: \frac{k_+}{p'_{L+}} = \frac{\xi_L}{\Xi_L} \quad (2.17)$$

változóval leírni. Ezt a változót könnyű a tűzgolyó nyugalmi rendszerében  $E$ -vel kifejezni:

$$\begin{aligned} \xi'_L &= M_L^{-1}(E + \sqrt{E^2 - m^2 - k_\perp^2}), \\ E &= \frac{1}{2} \left( M_L \xi'_L + \frac{m^2 + k_\perp^2}{M_L \xi'_L} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Így a tűzgolyóból keletkezett egyrészecske eloszlás a következő:

$$\frac{\pi}{2\xi'_L} dk_\perp^2 d\xi'_L d \left[ M_L, \frac{1}{2} \left( M_L \xi'_L + \frac{m^2 + k_\perp^2}{M_L \xi'_L} \right) \right]. \quad (2.19)$$

A tényleges egyrészecske-eloszlást ebből megkapjuk, ha ezt megszorozzuk az  $M_L$  tömegű tűzgolyó keltésének valószínűségével és megmondjuk, hogyan függ össze  $\xi'_L$  a közvetlenül mérhető  $\xi_L$ -lel. (Ez utóbbi (2.17) alapján egyenértékű  $\Xi_L$  megadásával.)

Ha közvetlenül a rapiditásbeli eloszlásra vagyunk kíváncsiak, akkor  $\Xi_L$  és  $\xi'_L$ -et a következőképpen írjuk:

$$\Xi_L = \frac{M_L}{m} e^{y'_L - y_L}, \quad \xi'_L = \frac{\sqrt{m^2 + k_\perp^2}}{M_L} e^{y - y'_L}. \quad (2.20)$$

Legyen a tűzgolyóhoz viszonyított rapiditás  $y'_L =: y - Y'_L$ , ekkor a tűzgolyótól származó egyrészecske-eloszlás:

$$\frac{\pi}{2} dk_\perp^2 dy'_L d \left[ M_L, \sqrt{m^2 + k_\perp^2} \operatorname{ch} y'_L \right]. \quad (2.21)$$

Itt  $M_L$ -en kívül  $Y'_L$ -et kell megmondanunk ahhoz, hogy a megfigyelt rapiditásbeli egyrészecske-eloszlást megkapjuk.

Abban a speciális esetben, ha összesen két tűzgolyó keletkezik zérus transzverzális impulzussal (a másiknak a tömegét jelölje  $M_R$ ), akkor az impulzusmegmaradás egyértelműen meghatározza  $\Xi_L$ -et.  $s \rightarrow \infty$  esetén, ha  $\lambda_{L,R}^2 =: \frac{M_{L,R}^2}{s}$ , akkor

$$\Xi_L \cong \frac{1}{2} \left\{ 1 - \lambda_R^2 + \lambda_L^2 + \sqrt{1 + \lambda_L^4 + \lambda_R^4 - 2\lambda_L^2 - 2\lambda_R^2 - 2\lambda_L^2 \lambda_R^2} \right\}. \quad (2.22)$$



Rögzített tömegek esetén tehát:  $\lambda_L, \lambda_R \rightarrow 0$  és így  $\Xi_L \rightarrow 1$ . Ekkor (2.17) szerint  $\xi'_L \rightarrow \xi_L$ . Ugyanez a képlet alkalmazható a (kísérletileg megfigyelt) ún. „vezető részecske” effektus esetén is, amikor az egyik tűzgolyó helyett a megfelelő irányba menő bejövő részecskével azonos típusú részecske keletkezik.

### 3. A multiplicitás eloszlás tulajdonságai

#### 3.1. Szokásos változók és alapvető tulajdonságok

Annak a valószínűsége, hogy a szóráásban összesen  $n$  részecske keletkezzen az (1.26)-beli  $w_n(K_1, \dots, K_n)$  valószínűség összege:

$$w_n = \sum_{K_1, \dots, K_n} w_n(K_1, \dots, K_n). \quad (3.1)$$

A  $w_n$  eloszlás a „multiplicitás eloszlás”. Ennek a binomiális momentumai (1.30) felhasználásával a  $k$ -részecske eloszlás összegével fejezhető ki:

$$\begin{aligned} \langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle &=: g_k =: \sum_n n(n-1) \dots (n-k+1) w_n = \\ &= \sum_{K_1, \dots, K_k} d_k(K_1, \dots, K_k). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Speciálisan, a  $k=1$  esetben  $g_1 = \langle n \rangle$  az átlagmultiplicitás, amelyről már (1.3) alapján tudjuk, hogy az egyrészecske-eloszlás összegével egyenlő. Az (1.10)-ben definiált  $\Delta_k$   $k$ -adik sűrűségmomentum összege a multiplicitás eloszlás (közönséges) momentuma:

$$c_k \langle n \rangle^k =: \langle n^k \rangle =: \sum_n n^k w_n = \sum_{K_1, \dots, K_k} \Delta_k(K_1, \dots, K_k) \quad (3.3)$$

( $c_k$  a momentumok relatív értéke).

A valószínűségszámítás fontos segédeszköze az eloszlások tárgyalására az eloszlás „generátorfüggvénye”. Ennek definíciója:

$$\psi(z) = \sum_n w_n z^n. \quad (3.4)$$

Ez speciális esete az (1.32)-ben levezetett  $E[z(\cdot)]$  generátorfüggvénynek, éspedig abban az esetben, ha  $E[z(\cdot)]$  változója, a  $z(K)$  függvény állandó. A generátorfüggvény deriváltjaival minden eddigi mennyiség kifejezhető:

$$w_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \psi(z=0)}{dz^n}, \quad g_k = \frac{d^k \psi(z=1)}{dz^k}, \quad (3.5)$$

$$\langle n^k \rangle = c_k \langle n \rangle^k = \left( z \frac{d}{dz} \right)^k \psi(z) \Big|_{z=1}.$$

Bebizonyítható, hogy az (1.34)-ben bevezetett  $k$ -részecske korrelációk integrálja szintén kifejezhető  $\psi(z)$ -vel:

$$f_k =: \sum_{K_1 \dots K_k} C_k(K_1, \dots, K_k) = \frac{d^k}{dz^k} \log \psi(z) \Big|_{z=1}. \quad (3.6)$$



Az  $f_k$  „korrelációs paraméterek” tehát a következőképpen határozzák meg  $\psi(z)$ -t:

$$\psi(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{(z-1)^k}{k!} \right\}. \quad (3.7)$$

Az eddig bevezetett különböző paraméter csoportok egymással kifejezhetők. Példaként megadunk néhány ilyen összefüggést:

$$\begin{aligned} f_2 &= g_2 - g_1^2, \\ f_3 &= g_3 - 3g_1g_2 + 2g_1^3, \\ g_2 &= f_2 + f_1^2, \\ g_3 &= f_3 + 3f_1f_2 + f_1^3, \\ \langle n^2 \rangle &= f_1 + f_2 + f_1^2 = g_1 + g_2, \\ \langle n^3 \rangle &= f_1 + 3f_1^2 + 3f_2 + f_3 + 3f_2f_1 + f_1^3 = g_1 + 3g_2 + g_3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A multiplicitás eloszlás egyik fontos érdekessége abban rejlik, hogy mint azt (3.6)-ból is láthatjuk, a  $k$ -részcseke korrelációk integráljáról ad felvilágosítást. Ily módon a részecskék közötti korrelációk vizsgálatánál az egyik kiindulási pont a multiplicitás eloszlás meghatározása.

Kísérletileg pontos adatok elsősorban a töltött részecskék multiplicitás eloszlására vannak. A mérési adatok egyik lényeges vonása a  $D = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$  diszperzió univerzális viselkedése [16], mely szerint proton—proton és pion—proton szórásban egyaránt

$$D \sim \frac{1}{2} \langle n \rangle, \text{ vagyis}$$

$$\frac{D}{\langle n \rangle} = \sqrt{\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} - 1} = \sqrt{c_2 - 1} \quad (3.9)$$

energiafüggetlen állandó. Ennek az összefüggésnek az általánosítása a Koba—Nielsen—Olesen-féle (KNO) skálaviselkedés [17]. Eszerint nagy energián a multiplicitás eloszlás tart egy univerzális eloszláshoz:

$$w_n \rightarrow \frac{1}{\langle n \rangle} \Psi \left( \frac{n}{\langle n \rangle} \right). \quad (3.10)$$

A  $\Psi$  skálafüggvény egy energiafüggetlen, univerzális alakot definiál, amelyhez a multiplicitás eloszlás tart, ha  $n$ -et az  $\langle n \rangle$  átlagmultiplicitáshoz viszonyítva mérjük. Ha  $\langle n \rangle$  elég nagy (3.10)-ben  $\Psi$ -t tekinthetjük a folytonos  $v =: n/\langle n \rangle$  változó függvényének. A definícióból nyilvánvaló, hogy  $\Psi$ -nek teljesítenie kell a következő normálási feltételeket:

$$\int_0^{\infty} dv \Psi(v) = \int_0^{\infty} dv v \Psi(v) = 1. \quad (3.11)$$

(Megjegyezzük, hogy ha  $n$  a töltött részecskék számát jelöli, akkor a töltésmegmaradás



miatt  $n$ -nek csak páros értékei jöhetnek szóba. Ekkor (3.11) jobb oldalán 1 helyett 2 áll.) Számítsuk ki (3.10)-ből a (3.3)-ban definiált  $c_k$  relatív momentumokat:

$$c_k = \frac{\langle n^k \rangle}{\langle n \rangle^k} = \sum_n n^k w_n \rightarrow \int_0^\infty dv \Psi(v) v^k. \quad (3.12)$$

Innen látjuk, hogy a KNO skálázás ekvivalens megfogalmazása lehet a következő: létezik egy  $\Psi(v)$  függvény, melynek a (3.12)-ben definiált momentumai megadják a  $c_k$  relatív momentumok aszimptotikus (energiafüggetlen) értékét.

A kísérletek tanulsága szerint proton—proton szórásban, a töltött részecskék eloszlása az 50—300 GeV/c<sup>-s</sup> tartományban teljesíti a KNO skálázást. A  $\Psi(v)$  függvény közelítőleg leírható [18] a *Bozóki* és munkatársai korábbi [19] empirikus formulájából következő

$$\Psi(v) = \pi v e^{-\frac{\pi}{4} v^2} \quad (3.13)$$

alakkal.

### 3.2. Tűzgolyók és a multiplicitás eloszlás

Ha a részecskeeltés közbenső tűzgolyó állapotokon keresztül történik, akkor a multiplicitáseloszlás meghatározásához egyrészt tudnunk kell annak a  $W_k(Y; M_1, \dots, M_k)$  valószínűségét, hogy az ütközésben  $M_1, M_2, \dots, M_k$  tömegű tűzgolyók keletkezzenek. Másrészt szükség van a tűzgolyó bomlástermékeinek multiplicitás eloszlására.

Tekintsük egy  $M$  tömegű tűzgolyó bomlását, és jelöljük  $V_l(M)$ -mel annak a valószínűségét, hogy a tűzgolyó  $l$  részecskére bomoljon. Ekkor a tűzgolyó bomlás multiplicitás eloszlásának generátorfüggvénye

$$V(M, z) =: \sum_{l=1}^{\infty} V_l(M) z^l. \quad (3.14)$$

A tűzgolyó nyugalmi rendszerében a bomlástermékek átlagenergiája  $M$ -től független, ezért átlagos számuk  $M$ -mel arányos. A tűzgolyó statisztikus bomlásáról feltételezzük, hogy a keletkezett részecskék közötti korreláció gyenge. Pontosabban, a bomlástermékek közötti korrelációs paraméterekről, tehát az

$$F_k(M) =: \frac{d^k}{dz^k} \log V(M, z)_{z=1} \quad (3.15)$$

mennyiségekről feltesszük, hogy szintén  $M$ -mel (tehát az átlagmultiplicitással!) arányosak:

$$F_k(M) = M \gamma_k. \quad (3.16)$$

Ebben az esetben a  $V(M, z)$  generátorfüggvény a következő alakú:

$$V(M, z) = e^{M \gamma(z)}; \quad \gamma(z) =: \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{(z-1)^k}{k!}. \quad (3.17)$$



Írjuk fel az  $Y$  gyorsaságú ütközés multiplicitás eloszlásának  $\psi(Y, z)$  generátorfüggvényét  $V(M, z)$  segítségével. Miután a keletkezett tűzgolyók bomlásuk során már nem hatnak kölcsön egymással, ez a következő:

$$\psi(Y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \int dM_1 \dots dM_l W_l(Y; M_1, \dots, M_l) V(M_1, z) \dots V(M_l, z). \quad (3.18)$$

Felhasználva  $V(M, z)$  (3.17)-beli alakját láthatjuk, hogy a multiplicitás eloszlás szempontjából a tűzgolyók számának eloszlása nem érdekes, hanem csak a tűzgolyók  $M$  össztömegének eloszlása, tehát

$$W(Y; M) = \sum_{l=1}^{\infty} \int dM_1 \dots dM_l \delta(M - M_1 - \dots - M_l) W_l(Y; M_1, \dots, M_l) \quad (3.19)$$

számít.  $W(Y; M)$  segítségével a  $\psi(Y, z)$  generátorfüggvény a következőképpen írható:

$$\psi(Y, z) = \int_{M_0}^{\infty} dM W(Y; M) e^{M \gamma(z)}. \quad (3.20)$$

Itt  $M_0$  a tűzgolyók tömegének alsó határát jelöli. A felső határ helyére  $\infty$ -t írtunk, mert feltettük, hogy  $W(Y; M)$   $M$ -nek gyorsan csökkenő függvénye, ezért a nagy  $M$ -ek az integrálban úgysem számítanak.

Számoljuk ki (3.20)-ból a  $c_k$  relatív momentumokat. Legyen  $M_Y$  a tűzgolyók össztömegének átlagértéke az  $Y$  gyorsaságú ütközéskor, tehát

$$\langle n \rangle = \left. \frac{\partial \psi(Y, z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \gamma_1 \int_{M_0}^{\infty} dM M W(Y; M) = \gamma_1 M_Y. \quad (3.21)$$

Ha az  $Y$  gyorsaság igen nagy, akkor  $M_Y$  is igen nagy, és a (3.3)-ban definiált  $c_k$  relatív momentum értéke tart a

$$c_k \rightarrow M_Y^{-k} \int_{M_0}^{\infty} dM M^k W(Y; M) \quad (3.22)$$

értékhez. A KNO skálázás (3.12) alakja tehát megköveteli, hogy a tűzgolyók össztömegének eloszlása aszimptotikusan

$$W(Y; M) \rightarrow \frac{1}{M_Y} W\left(\frac{M}{M_Y}\right) \quad (3.23)$$

legyen. A KNO skálázás maga után vonja a tűzgolyók össztömegének (3.23) skálázását [20].

Ha figyelembe vesszük a KNO skálafüggvény (3.13)-beli empirikus, közelítő alakját, akkor  $W(M/M_Y) = \Psi(M/M_Y)$  miatt azt látjuk, hogy  $\mu \sim 0$  esetén  $W(\mu)$  eltűnik, van egy maximuma, majd nagyobb  $\mu$  értékekre igen gyorsan csökken. *Buras, Koba* [18] és *Barshay* [21] ezt a viselkedést az inelasztikus hadron ütközés geometrikus elképzelésével hozta kapcsolatba. Eszerint adott rálövési paraméter (inpakt paraméter) esetén a multiplicitás — azaz a keletkezett tűzgolyók össztömege — arányos az ütköző hadronok anyagának „átfedésével”. Ez az elképzelés azért vonzó, mert így egyszerű összefüggést teremtünk az elasztikus és inelasztikus ütközések között is.



## IRODALOM

1. *L. Van Hove*, Physics Reports 1 C. 347, 1971.
2. *M. Jacob*: les Houches lecture notes. 1971.
3. *E. Berger*, Proceedings of the Helsinki Conference, 1971.
4. *W. Frazer et al.*, Rev. Mod. Phys. 44, 284, 1972.
5. *D. Horn*, Physics Reports, 4C, 1, 1972.
6. *Montvay I., Gombosi T.*: A sokrészececskekeltés fenomenológiája, KFKI jegyzet. 1971.
7. *D. Weingarten*: Density correlations and multiplicity scaling, Copenhagen preprint, NBI-HE-73-5, 1973.
8. *L. S. Brown*, Phys. Rev. D.5, 748, 1972.
9. *K. J. Biebl, J. Wolf*, Nucl. Phys. B44, 301, 1972.
10. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. Letters 23, 1415, 1969.
11. *J. Benecke, T. T. Chou, C. N. Yang, E. Yen*, Phys. Rev. 188, 2159, 1969.
12. *R. C. Hwa*, Phys. Rev. Letters 26, 1143, 1971.
13. *M. Jacob, R. Slansky*, Phys. Letters, 37B, 408, 1971.
14. *R. K. Adair*, Phys. Rev. D5, 1105, 1972.
15. *R. Hagedorn, J. Ranft*, Nuovo Cimento Suppl. 6, 169, 1968.
16. *O. Czyzewski, K. Rybicki*, Nucl. Phys. B47, 633, 1972.
17. *Z. Koba, H. B. Nielsen, P. Olesen*, Nucl. Phys. B40, 317, 1972.
18. *A. J. Buras, Z. Koba*: Lettere Nuovo Cimento 6. 629, 1973.
19. *G. Bozoki, E. Gombosi, M. Posch, L. Vanicsek*, Nuovo Cimento 64A, 881, 1969.
20. *F. Csikor, Z. Katona, I. Montvay*: Lettere Nuovo Cimento 8. 99, 1973.
21. *S. Barshay*, Phys. Letters 42B, 457, 1972.



# KÖNYVISMERTETÉS

---

**Fodor Judit: A determinizmus koncepció fejlődése és kapcsolatai a kvantummechanikával.  
Akadémiai Kiadó. Budapest 1972.**

A szerző a determinizmus fogalom tartalmi vizsgálatából indul ki. Kimutatja az ontológiai és ismeretelméleti determinizmus-koncepció összefonódását (esetenként összekeveredését), majd részletesen elemzi a mechanisztikus materializmus determinizmus felfogását. Kimutatja, hogy a mechanisztikus determinizmusból a dialektikus determinizmusba való átmenet a kvantummechanika „kényszerítette rá” a marxista filozófiára, abban az értelemben, hogy a mechanisztikus felfogás általánosságban vett kritikáján túl megnyitotta az utat új filozófiai általánosítás felé. A szerző a kvantummechanika idealista interpretációi racionális magvának elemzésén keresztül dialektikus determinizmus-modell kidolgozásához jut el. (B. G.)

**Antal Müller: Quantum Mechanics: A Physical World Picture.  
Akadémiai Kiadó. Budapest. Pergamon Press Oxford 1974.**

A szerző először történeti áttekintést ad a kvantummechanika értelmezésének főbb irányzatairól, majd olyan fizikai (és filozófiai) interpretációt fejt ki, amely a Fok-féle felfogás továbbfejlesztése, következetes végigvitele. A könyv a mikrofizikában szereplő kölcsönhatás típusok vizsgálatán belül részletesen elemzi a mérési kölcsönhatást. Ennek eredményeképpen jut arra a következtetésre, hogy a mérési kölcsönhatás nem oka a mikroobjektumok határozatlanságának, hanem ellenkezőleg: csökkenti ezen objektumoknak a klasszikus állapotfogalom értelmében fennálló határozatlanságát.

A könyv különös érdeme, hogy nemcsak a mikrofizikai megismerés során kialakult új ismeretelméleti szituáció maradéktalan figyelembevételére törekszik, hanem adalékot nyújt a részecskefizika filozófiai problematikájának megközelítéséhez is. (B. G.)



# A PROTON ELEKTROMÁGNESES SZERKEZETE ÉS A HIDROGÉNSPEKTRUM HIPERFINOM-FELHASADÁSA\*

GNÁDIG PÉTER

ELTE, Atomfizikai Tanszék, Budapest

## TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés .....	529
2. A hidrogénspektrum hiperfinom-felhasadása, protonszerkezeti korrekciók .....	530
3. Pozitívítási egyenlőtlenségek .....	534
4. Felső és alsó korlát a hiperfinomszerkezet protonpolarizálhatósági korrekciójára .....	538
5. Numerikus eredmények .....	546
6. Hiperfinom-felhasadás az elektromágneses + gyenge kölcsönhatás egységes elméletében ....	550
7. Pozitívítási egyenlőtlenségek és a Fritsch—Gell-Mann-féle fénykúpalgebra .....	555
8. Összefoglalás .....	560
Függelék .....	562

## 1. Bevezetés

Az elemi részek fizikájának legjobban kidolgozott és legjobban működő elmélete a kvantumelektrodinamika. Törvényeit kis és nagy energiákon egyaránt sokszorosan ellenőrizték. Nagypontosságú spektroszkópiai mérésekkel igazolták, hogy az elmélet és a kísérlet között legfeljebb csak a hatodik jegyben lehet eltérés. Pl. a müon anomális mágneses momentuma  $3 \times 10^{-6}$  pontossáig egyezik a számított értékkel. A másik nagypontosságú mérés — talán a világ eddigi legpontosabb mérése — 14 értékes jegyre adja meg a hidrogénatom alapállapotú energiájának hiperfinom-felhasadását! Az elmélet 7 nagyságrenddel pontatlanabb és a legnagyobb problémát az erős kölcsönhatási korrekciók okozzák. A mérés nagy pontossága miatt még olyan folyamatok is szerephez jutnak, melyeknél a néhány eV kötési energiájú hidrogénatomban a proton virtuálisan — nagyon kis valószínűséggel — több GeV energiájú gerjesztett állapotba kerül. Ez a folyamat kapcsolatot teremt két különböző terület — a nagyenergiájú fizika és a nagy precizitású atomi spektroszkópia között.

Doktori disszertációm témájaként azt a kérdést választottam, hogy miként lehet a nagyenergiájú elektron—proton szórás adatai és néhány általánosan elfogadott elméleti módszer segítségével modell-független abszolút korlátot adni a hiperfinom-felhasadás protonszerkezeti korrekciójára. Miért érdekes és fontos ez a kérdés és mit tudunk meg az eredményből? Nem a kvantumelektrodinamika törvényeit akarjuk ellenőrizni egy újabb helyen, sokkal inkább a proton szerkezetéről szeretnénk információt kapni. Másrészt, ha sikerül elég szűk korlátot adni a hiperfinom-frekvencia számított értékének egyetlen kérdéses tagjára, akkor ezzel egyben felső

\* Egyetemi doktori disszertáció. Érkezett 1973. június 20.



korlátot is adtunk egy esetleges nem elektromágneses eredetű elektron—proton kölcsönhatásra. Ilyen lehet pl. a gyenge kölcsönhatás magasabbrendű járuléka, vagy müonhidrogénnél (müon-proton kötött állapot) egy esetleges anomális  $\mu$ — $p$  kölcsönhatás. A müonhidrogén esete azért is jelentős, mert a hiperfinom-felhasadás nukleáris korrekciója arányos a leptontömeggel és így a nehéz müon különösen érzékeny a proton szerkezetére. A tervek szerint néhány éven belül Los Alamosban a „mezongyárban” meg fogják mérni a müonhidrogén  $2s$  nivójának hiperfinom-felhasadását. Ez a mérés — mivel a hadronikus korrekció valószínűleg a mérési hibahatárnál nagyobb — értékes információt fog adni a proton dinamikus tulajdonságairól.

A disszertáció felépítése a következő. Először áttekintjük a hiperfinomszerkezet eddig figyelembe vett tagjait és megadjuk a kiszámítandó protonszerkezeti járulék integrál előállítását. A számítást a fellépő ismeretlen függvények miatt nem lehet elvégezni, ezért a 3. fejezetben egyenlőtlenségeket vezetünk le a kérdéses függvények és ismert mennyiségek között. A 4. fejezetben alkalmazzuk ezeket az egyenlőtlenségeket a hiperfinom-felhasadásra és modell-független korlátokat adunk a protonszerkezeti járulékra. A 6. fejezet a gyenge kölcsönhatások szerepével foglalkozik, konkrétan a Weinberg-elmélet által semleges vektoráram figyelembevételével. Végül egyenlőtlenségeket vezetünk le a Fritsch—Gell—Mann-féle fénykúpalgebra felhasználásával a neutrino—nukleon és elektron—nukleon szórás adatai között és ezzel megadjuk a lehetőséget a hiperfinom-felhasadás magasabb rendű gyenge korrekcióinak becslésére.

Disszertációmban igyekeztem bemutatni, hogy ameddig az erős kölcsönhatásnak nincs részletes elmélete, addig a kisebb információ-tartalmú, de nagyobb megbízhatóságú összefüggések származtatása legalább annyira hasznos, mint a többször állító, de erősen modellfüggő kijelentéseké. Az előbbire pedig — az áramalgebra összesszabályai mellett — éppen a disszertációban sokat alkalmazott egyenlőtlenségek mutatnak példát.

## 2. A hidrogénspektrum hiperfinom-felhasadása. Protonszerkezeti korrekciók

A hidrogénatom spektrumának hiperfinomszerkezete az elektron és a proton mágneses momentumának kölcsönhatásából származik. Az elektron a Dirac-egyenlet szerint

$$\vec{M}_e = \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma}_e \quad (2.1)$$

mágneses momentummal rendelkezik. A proton mágneses momentuma  $2.79$  magneton, azaz

$$\vec{M}_p = \frac{e\hbar}{2Mc} \vec{\sigma}_p (1 + \kappa), \quad (2.2)$$

ahol  $\kappa=1.79$  az anomális mágneses momentum.

A kvantummechanikai perturbációs számítás szerint a  $|\psi_0\rangle$  alapállapot energiája  $\Delta\hat{H}$  perturbáló energia hatására első közelítésben

$$\Delta E = \langle \psi_0 | \Delta\hat{H} | \psi_0 \rangle \quad (2.3)$$



értékkel tolódik el. Jelen esetben ez a Fermi-képletet eredményezi

$$\Delta E = \frac{2\pi\alpha(1+\kappa)}{3mM} (\vec{\sigma}_e \sigma_p) |\Phi(0)|^2, \quad (2.4)$$

ahol a spinekre nézve még nem végeztük el a várhatóérték képzést. Mivel az elektron és proton  $1/2$  spinjei szingulett és tripllett állapotokká csatolódnak össze, az energiaeltolódást ezen állapotokban számolva a hidrogénatom alapállapotára

$$\delta_{v_F} = \Delta E_t - \Delta E_s = \frac{8\pi\alpha}{3} \frac{1+\kappa}{mM} |\Phi(0)|^2 = 1421,159 \text{ MHz}. \quad (2.5)$$

Fermi-frekvenciát kapjuk.

A hiperfinom-felhasadást maser technikával nagyon nagy pontossággal megmérték [1] és a következő értéket kapták:

$$\delta v_{\text{exp}} = 1420.405751786417 \pm 1, 2 \times 10^{-12} \text{ MHz}. \quad (2.6)$$

A mérés pontossága 7 nagyságrenddel felülmúlja a legjobb elméleti számítás pontosságát. Az utóbbiban a finomszerkezeti állandó ( $\alpha$ ) mérési hibája okozza a legnagyobb bizonytalanságot.

A Fermi-képlet és a mérési eredmények között  $0,75 \text{ MHz}$  azaz  $530 \text{ ppm}$  ( $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$ ) eltérés van, ezért az elméleti számítást tovább kellett finomítani. A perturbációs számítás magasabb közelítései egyrészt  $\alpha \approx 1/137$ , másrészt az elektron és a proton  $m/M = 1/1836$  tömegaránya szerinti sorfejtést adnak.

A proton véges tömegét a  $m/M$ -mel arányos „visszalökődési” korrekció veszi figyelembe. Legegyszerűbben a nemrelativisztikus Schrödinger-egyenletben számolhatunk a redukált tömeg bevezetésével, a visszalökődési korrekció következetes meghatározásához azonban a Bethe—Salpeter-egyenlet szükséges [2].

További járulékot jelentenek a sugárzási korrekciók, valamint a Breit-egyenlet és a Schrödinger-egyenlet közti különbséget figyelembe vevő relativisztikus járulék. A teljes hiperfinom-felhasadást a következő kifejezés adja meg [3]:

$$\delta E = \Delta E_{\text{FERMI}} \cdot \left( \frac{M}{M+m} \right)^3 \left\{ 1 + \delta + \frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \right. \quad (2.7)$$

$$\left. + \left( \log 2 - \frac{5}{2} \right) \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{\pi} \left[ -\frac{2}{3} \log^2 \frac{1}{\alpha^2} + \left( \frac{37}{72} + \frac{4}{15} - \frac{8}{3} \log 2 \right) \log \frac{1}{\alpha^2} + (18,36 \pm 5) \right] + \dots \right\}.$$

A fenti képlet egyetlen ismeretlen kifejezést tartalmaz,  $\delta$ -t. Ez a tag a kiterjedt, szerkezettel rendelkező proton és a pontszerű, szerkezet nélküli eset közti különbséget írja le.

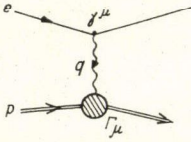
Salpeter megmutatta [4], hogy a relativisztikus kötött állapotot leíró Bethe—Salpeter-egyenlet keretei között a következő módon lehet perturbációs számítást végezni. Ha valamilyen  $I_0$  magfüggvényhez  $\psi_0(p)$  hullámfüggvény és  $E_0$  energia tartozik, akkor a kicsit módosított  $I_0 + \Delta I$  magfüggvényhez első közelítésben

$$\Delta E = \int \int d^4 p d^4 p' \bar{\psi}_0(p) \Delta I(p, p') \psi(p') \quad (2.8)$$

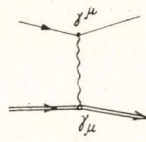


energiaeltolódás tartozik. Mivel a hidrogénatomban a proton és az elektron viszonylag kicsiny relatív sebességgel mozognak, a  $\psi(p)$  impulzustérbeli hullámfüggvény csak  $p < p_B$  tartományban különbözik lényegesen nullától, ahol  $p_B = \alpha m$  a Bohr-impulzus (itt és a továbbiakban a  $\hbar = c = 1$  egységrendszert használjuk). Ez az impulzus elhanyagolhatóan kicsiny az erős kölcsönhatás GeV-es skáláján, márpedig a vizsgálni kívánt protonszerkezeti korrekció az erős kölcsönhatásból származik. Emiatt a perturbáló  $\Delta I$  magfüggvényt elegendő a  $p = p' = 0$  helyen, vagy annak szűk környezetében vizsgálni.

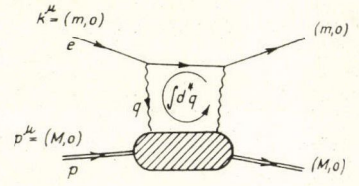
Az  $\alpha$ -ban elsőrendű egyfotoncserés diagram (2.1. ábra) járuléka ugyanakkora, mint a pontszerű proton esetében (2.2. ábra), hiszen a különbség  $F(q^2) - 1$  kifejezéssel arányos, a nukleon rugalmas alakfaktorai  $F(q^2)$  Bohr-momentumnyi impulzusátadásnál még nem változnak számottevően. Pontosabban mondva a különbség  $\alpha^2 m^2 / M^2$  nagyságrendű, vagyis a vizsgált pontosság mellett elhanyagolható.



2.1. ábra



2.2. ábra



2.3. ábra

A következő tag a sorfejtésben a kétfotoncserés diagram (2.3 ábra). A fenti okokból az elektron és a proton egyaránt állónak tekinthető, így a folyamat egy a kvantumelektrodinamikából ismert leptonrészből és az erős kölcsönhatás miatt ismeretlen virtuális előreszórási Compton-amplitúdóból áll. Mivel hiperfinomszerkezetet akarunk számolni, elegendő az amplitúdónak csupán a spinfüggő részével foglalkoznunk. Kihasználva a  $T$  és  $P$  invarianciát a következő kovariáns kifejtést írhatjuk fel:

$$C_{\mu\nu}^A = \frac{1}{2i} \int d^4x e^{iqx} \langle p, \alpha | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | p, \alpha \rangle - (\alpha \leftrightarrow -\alpha) =$$

$$= \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} q^\sigma \alpha^\tau \cdot D(q^2, \nu) + (\alpha q) \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} q^\sigma p^\tau \cdot G(q^2, \nu), \quad (2.9)$$

ahol  $q^\mu$  a kicserélt foton impulzusa,  $\alpha^\mu$  a proton kovariáns spinje,  $D$  és  $G$  pedig a spinfüggő invariáns amplitúdók.  $\nu = pq/M$  a foton laborrendszerbeli energiáját,  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$  pedig a teljesen antiszimmetrikus tenzort jelöli el  $\epsilon_{0123} = +1$  előjelkonvencióval.

A kétfotoncserés folyamat járuléka a hiperfinom-felhasadáshoz [5]:

$$\delta_{2\gamma} = \frac{2\alpha m}{8i\pi^2(1+\kappa)} \int \frac{d^4q}{q^6} \{ (2q^2 - q_0^2) (D + \nu MG) - 3q^2 q_0 MG \}. \quad (2.10)$$

Ha levonjuk a korábban már figyelembe vett pontszerű járulékot, a különbség

$$\delta_{2\gamma} - \delta_{2\gamma}^{\text{pontszerű}} = \delta_B + \delta_{\text{pol}} \quad (2.11)$$



alakba írható, ahol  $\delta_B$  a Born-tagot jelöli, a sarokrészeket a Pauli—Dirac-féle alakfaktorokkal számolva (2.4. ábra),  $\delta_{\text{pol}}$  pedig a többreszecske közbenső állapotok járuléka, amit gyakran proton-polarizálhatósági korrekciónak is hívnak.

A Born-tagot Iddings meghatározta [6] és egy a már pontoszerű esetben is meglevő (önmagában divergens) ún. visszalökődési tagot hozzáadva

$$\delta_{\text{v.l.}} + \delta_B = -34,6 \pm 0,9 \text{ ppm} \quad (2.12)$$

értéket kapott. Figyelembe véve, hogy a (2.7)-ben szereplő

$$\delta = \delta_{\text{v.l.}} + \delta_B + \delta\delta_{\text{pol}}$$

tagokból tevődik össze, a hiperfinom szerkezet elméleti számításánál ( $\alpha^2$  és  $(m/M)^2$  rendig számolva) már csak egyetlen ismeretlen tagot,  $\delta_{\text{pol}}$ -t kell meghatározni.

Nézzük meg, hogy egyeznek a numerikus értékek! (2.6) és (2.7) alapján

$$\frac{\delta v_{\text{exp}} - \delta v_{\text{elm}}}{\delta v_{\text{exp}}} = (2,6 \pm 4,0) \text{ ppm} - \delta_{\text{pol}}. \quad (2.13)$$

A  $\pm 4,0$  ppm határozatlanság jelen esetben nem kísérleti, hanem elméleti eredetű: részben az  $\alpha$ , részben a rugalmas alakfaktorok bizonytalanságából adódik.

A  $2s$  energiaszint hiperfinom-felhasadására

$$\delta v_{2s}^{\text{exp}} = 177,55686(5) \text{ MHz} \quad (2.14)$$

érték adódott a mérésekből, melyet az elméleti formulákkal összevetve

$$\frac{\delta v_{2s}^{\text{exp}} - \delta v_{2s}^{\text{elm}}}{\delta v_{2s}^{\text{exp}}} = (2,6 \pm 4,0) \text{ ppm} - \delta_{\text{pol}}. \quad (2.15)$$

Elég meggyőző, hogy a polarizálhatósági járulékra két független mérésből és számításból egyaránt

$$\delta_{\text{pol}} = (2,6 \pm 4,0) \text{ ppm} \quad (2.16)$$

adódott. Ez azt mutatja, hogy a sugárzási korrekciókat megbízhatóan tudjuk számítani és

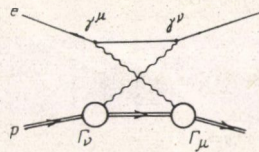
$$-2 \text{ ppm} < \delta_{\text{pol}} < 7 \text{ ppm}. \quad (2.17)$$

Iddings megmutatta [5], hogy a Wick-forgatás (másnéven Cottingham-transzformáció) jogosságának, továbbá  $D$ , illetve  $D + \nu M$   $G$ -re levonás nélküli diszperziós reláció érvényességének feltételezésével a polarizálhatósági járulék átírható a következő alakra:

$$\delta_{\text{pol}} = \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \left[ \frac{9\pi\kappa^2}{2M} F_2^2(-Q^2) + \int_{(Q^2)}^\infty \frac{dv^2}{v^2} \left\{ \right\} \right],$$

$$\left\{ \right\} = (3\theta - 2\theta^2 - 2(2-\theta)\sqrt{\theta+\theta^2})(d + \nu Mg) +$$

$$+ 6(1+2\theta - 2\sqrt{\theta(\theta+1)})\nu Mg, \quad (2.18)$$



2.4 ábra.



ahol a következő jelöléseket használtuk:

$$Q^2 = -q^2 \geq 0; \quad \theta = \frac{v^2}{Q^2};$$

$$d(Q^2, v) = \text{Im } D(Q^2, v),$$

$$g(Q^2, v) = \text{Im } G(Q^2, v),$$

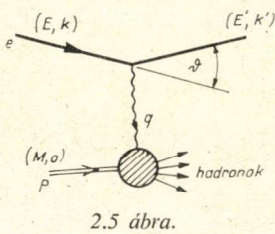
$$t(Q^2) = \frac{Q^2 + m_\pi^2}{2M} + m_\pi \quad \text{az első pion—nukleon küszöb.}$$

Ez az átírás azért nagyon jelentős, mert az invariáns amplitúdóknak csak az imaginárius részét tartalmazza és ezt is csak térszerű fotonokra — vagyis elvben mérhető fizikai mennyiségek szerepelnek (2.18) jobb oldalán. Rugalmatlan  $e-p$  szórás spinfüggő differenciális hatáskeresztmetszetét ugyanis

$$\frac{d^2 \sigma^{\uparrow\uparrow}}{dE' d\Omega'} - \frac{d^2 \sigma^{\uparrow\downarrow}}{dE' d\Omega'} = \frac{\alpha^2 E'}{M\pi E Q^2} \times$$

$$\times \{(E + E' \cos \vartheta) d + (E - E' \cos \vartheta) (E + E') Mg\}, \quad (2.19)$$

módon számíthatjuk [7], ahol  $\uparrow\uparrow$ , illetve  $\uparrow\downarrow$  az elektron és a proton relatív spinbeállítására utal, egyéb jelöléseket a 2.5. ábra mutatja.



2.5. ábra.

A spinfüggő hatáskeresztmetszet (mint  $Q^2 > 0$ ,  $v > t(Q^2)$  függvénye) elvben — és a közeljövőben gyakorlatban is — kimérhető és így  $d$  és  $g$  meghatározható. Jelenleg azonban még nincs lehetőség (2.18) jobb oldalának kiértékelésére.

Jóllehet  $\delta_{\text{pol}}$ -t nem tudjuk numerikusan kiszámítani, hasznos információt jelentene, ha szigorú alsó és felső korlátot sikerülne találni a lehetséges megengedett értékeire. Ebben az esetben ugyanis egyben felső korlátot kapnánk — a meglévő kísérleti értékekre támaszkodva — az esetleges nem-elektromágneses kölcsönhatások erősségére a hiperfinomszerkezetre gyakorolt hatásukon keresztül. Hasonlóan a müonhidrogén hiperfinomfelhasadásának megmérése után korlátot tudunk adni egy esetleges anomális müon—proton kölcsönhatásra.

A disszertáció további részében korlátokat vezetünk le  $\delta_{\text{pol}}$  értékére. A levezetésnél részben kinematikai (pozitivitási) egyenlőtlenségeket használunk — melyek szigorúan érvényesek — részben pedig az erős kölcsönhatások néhány általánosan elfogadott tulajdonságát (Regge-aszimptotika, áramalgebra, alacsonyenergiás tételek) hívjuk segítségül.

### 3. Pozitivitási egyenlőtlenségek

Az előreszórási Compton-amplitúdó hadron tagjának képzetes része mátrixelemek abszolútérték négyzetösszegeként áll elő, ezért nyilvánvalóan nemnegatív mennyiség. Bármely komplex  $c_\mu$  polarizációs vektorra érvényes, hogy

$$c_\mu W^{\mu\nu} c_\nu^* = \sum_n |\langle p | J_\mu(0) | n \rangle c^\mu|^2 \delta^4(p + q - p_n) (2\pi)^4 \geq 0. \quad (3.1)$$



Ennél többet is állíthatunk, ha figyelembe vesszük, hogy a proton  $\alpha^\mu$  spinállásának két lineárisan független megengedett értéke van:

$$\sum_{\alpha, \alpha'} c^{(\alpha)}_\mu W_{\mu\nu}^{(\alpha, \alpha')} c^{(\alpha')}_\nu =$$

$$= \sum_{\alpha, n} |\langle p, \alpha | J_\mu(0) | n \rangle c^{(\alpha)}_\mu|^2 \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta^4(p + q - p_n) \cong 0. \quad (3.2)$$

Ezt az összefüggést azért tudjuk hasznosítani, mert jóllehet a

$$W_{\mu\nu}^{(\alpha, \alpha')} \equiv \sum_n \langle p, \alpha | J_\mu(0) | n \rangle \langle n | J_\nu(0) | p \alpha' \rangle (2\pi)^4 \delta^4(\dots) \quad (3.3)$$

kifejezés szigorúan véve nem előreszórási amplitúdó a különböző  $\alpha \neq \alpha'$  spinállás miatt, mégis kifejezhető a  $W_{\mu\nu}^{(\alpha, \alpha')}$  előreszórási amplitúdóban fellépő  $W_1, W_2, d$  és  $g$  szerkezeti függvényekkel. A redukciós technika szerint ugyanis a proton polarizációja explicit módon Dirac-spinorokban jelenik meg és érvényes a következő előállítás:

$$W_{\mu\nu}^{(\alpha, \alpha')}(p, q) = \bar{u}(p, \alpha) C_{\mu\nu}(p, q) u(p, \alpha'). \quad (3.4)$$

$C_{\mu\nu}(p, q)$   $4 \times 4$ -es mátrix kifejezhető Dirac-mátrixok szerint és az árammegmaradást,  $T$  és  $P$  invarianciát figyelembe véve a legáltalánosabb alak:

$$C_{\mu\nu}(p, \alpha) = 4M\pi \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) W_1(q^2, \nu) +$$

$$+ \frac{4\pi}{M} W_2 \left( p_\mu - \frac{\nu M}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{\nu M}{q^2} q_\nu \right) + i d \epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} q^\varrho \gamma^\sigma \gamma^5 + i g \cdot \gamma^\lambda q_\lambda \gamma^5 \cdot \epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} q^\varrho p^\sigma. \quad (3.5)$$

Ezt a kifejezést (3.2), illetve (3.4)-be helyettesítve megszorításokat kapunk  $W_1, W_2, d$  és  $g$  között. A  $c_{\mu\nu}^{(\alpha)}$  komplex 4-vektorokat célszerű  $p^\mu, q^\mu, \alpha^\mu, \epsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} q_\varrho p_\sigma \alpha_\nu$  bázisban kifejezni. Az árammegmaradás miatt a  $q^\mu$ -vel arányos tagok kiesnek és így az  $\alpha^\mu$  polarizáció kétféle beállításának figyelembevételével  $2 \times 3 = 6$  dimenziós kvadratikusan alakot kapunk.

$$\sum \lambda_i M_{ij} \lambda_j^* \cong 0,$$

ahol

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} 4M\pi W_1 \cdot & & & & & \\ \cdot R \left( 1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) & -id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & 0 & 0 & 0 & id \sqrt{\nu^2 + Q^2} \\ id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & 4M\pi W_1 & 0 & 0 & 0 & -vd - Mg(\nu^2 + Q^2) \\ 0 & 0 & 4M\pi W_1 & -id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & vd + Mg(\nu^2 + Q^2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & \cdot R \left( 1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) & id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & 0 \\ 0 & 0 & vd + Mg(\nu^2 + Q^2) & -id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & 4M\pi W_1 & 0 \\ -id \sqrt{\nu^2 + Q^2} & -vd - Mg(\nu^2 + Q^2) & 0 & 0 & 0 & 4M\pi W_1 \end{bmatrix}$$



A longitudinális és transzverzális polarizációjú foton teljes hatáskeresztmetszetének arányára bevezettük a gyakran használt

$$R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{-W_1 + \left(1 + \frac{v^2}{-q^2}\right) W_2}{W_1}$$

jelölést.

A lineáris algebra elemeiből ismert, hogy egy kvadratikuss alak akkor pozitív szemidefinit, ha mátrixának valamennyi sarokdeterminánsa nemnegatív. Mielőtt ezt a tételt alkalmaznánk (3.6)-ra, a sorok és oszlopok megfelelő cserélgetésével és lineáris kombinációk képzésével visszavezetjük a feladatot alacsonyabb dimenziós mátrixok vizsgálatára:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4M\pi W_1 \cdot & & & & & \\ \cdot R \left(1 + \frac{v^2}{Q^2}\right) & -id \sqrt{v^2 + Q^2} & 0 & 0 & 0 & id \sqrt{v^2 + Q^2} \\ id \sqrt{v^2 + Q^2} & 4M\pi W_1 & 0 & 0 & 0 & -vd - \\ & & & -id \sqrt{v^2 + Q^2} & vd + & -Mg(v^2 + Q^2) \\ 0 & 0 & 4M\pi W_1 & & +Mg(v^2 + Q^2) & 0 \\ \hline & & & 4M\pi W_1 \cdot & & \\ 0 & 0 & id \sqrt{v^2 + Q^2} & \cdot R \left(1 + \frac{v^2}{Q^2}\right) & id \sqrt{v^2 + Q^2} & 0 \\ 0 & 0 & vd + & -id \sqrt{v^2 + Q^2} & 4M\pi W_1 & 0 \\ & +Mg(v^2 + Q^2) & & & & \\ -id \sqrt{v^2 + Q^2} & -vd - & 0 & 0 & 0 & 4M\pi W_1 \\ & -Mg(v^2 + Q^2) & & & & \end{array} \right] \equiv 0$$

†

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4M\pi W_1 & -ivd & -vd - & 0 & 0 & 0 \\ & & -Mg(v^2 + Q^2) & & & \\ ivd & 4M\pi R \frac{v^2 W_1}{Q^2} & -ivd & 0 & 0 & 0 \\ \hline -vd - & & & & & \\ -Mg(v^2 + Q^2) & ivd & 4M\pi W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4M\pi W_1 & -ivd & -vd - \\ & & & & & -Mg(v^2 + Q^2) \\ 0 & 0 & 0 & ivd & 4M\pi R \frac{v^2 W_1}{Q^2} & -ivd \\ \hline 0 & 0 & 0 & -vd - & & \\ & & & -Mg(v^2 + Q^2) & ivd & 4M\pi W_1 \end{array} \right] \equiv 0$$

†



$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc}
 4M\pi W_1 & -ivd & -vd - Mg(v^2 + Q^2) \\
 \hline
 ivd & 4M\pi W_1 \cdot R \frac{v^2}{Q^2} & -ivd \\
 \hline
 -vd - Mg(v^2 + Q^2) & ivd & 4M\pi W_1
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftrightarrow \\ \\ \cong 0 \end{array} \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 4M\pi W_1 - vd - Mg(v^2 + Q^2) & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & R \frac{v^2}{Q^2} \cdot 4M\pi W_1 & vd \\
 \hline
 0 & vd & 2M\pi W_1 + \frac{vd}{2} + \frac{1}{2} Mg(v^2 + Q^2)
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftrightarrow \\ \\ \cong 0 \end{array} \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cc}
 4M\pi W_1 R \frac{v^2}{Q^2} & vd \\
 \hline
 vd & \frac{1}{2} (4M\pi W_1 + vd + v^2 Mg + Q^2 Mg)
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftrightarrow \\ \\ \cong 0 \text{ és } [4M\pi W_1 - vd - Mg(v^2 + Q^2)] \cong 0. \end{array}
 \end{array}$$

Ez utóbbi akkor teljesül, ha fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

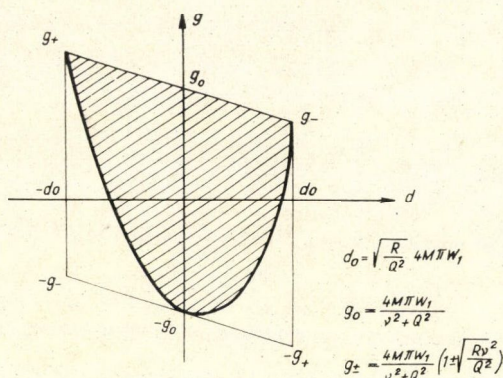
$$vd + Mg(v^2 + Q^2) \cong 4M\pi W_1, \quad (3.7)$$

$$2d^2 \cong 4M\pi \frac{RW_1}{Q^2} \{4M\pi W_1 + vd + Mg(v^2 + Q^2)\}. \quad (3.8)$$

Grafikusan ez a következőt jelenti. Adott  $W_1$  és  $W_2$  mellett  $Q^2$  és  $v$  minden értékére a  $d-g$  síkon csupán egy zárt tartomány pontjai megengedettek (3.1. ábra). Ez automatikusan biztosítja, hogy valamennyi hatáskeresztmetszet pozitív legyen, de még többet is, hiszen (3.2)-ben spinfordító amplitúdók is felléptek, melyek nem hozhatók kapcsolatba hatáskeresztmetszetekkel. Pontosabb vizsgálat azt mutatja, hogy a hatáskeresztmetszetek pozitívitásából csupán a 3.1. ábrán látható tágabb paralelogramma adódik, a nemlineáris határvonalnak, amely (3.8) megfelelője — nincs közvetlen szemléletes jelentése.

Megjegyezzük, hogy (3.8)-ból az következik, hogy amennyiben  $R$  egzaktul zérus lenne, úgy  $d(Q^2, v)$ -nek is el kellene tűnni. Azonban ha  $R$  csak bizonyos határesetben





3.1 ábra.

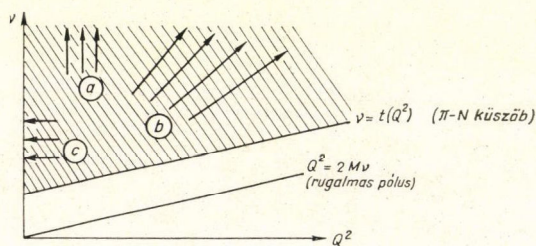
válí nullává (pl. a partonmodellben  $R \approx \frac{1}{v} \xrightarrow{Bj.\lim} 0$ ), akkor  $d$  feltételezett skála-invarianciájánál csak a skálakitevőre kapunk megszorítást [7, 8].

A fenti egyenlőtlenségek általános érvényűek, speciális modellektől függetlenül kinematikai megszorításokat fejeznek ki.

#### 4. Felső és alsó korlát a hiperfinomszerkezet protonpolarizálhatósági korrekciójára

Az előző fejezet eredményét a (3.7–8) egyenlőtlenségeket arra fogjuk felhasználni, hogy felső és alsó korlátot vezessünk le a hiperfinom-felhasadás protonpolarizálhatósági korrekciójára, vagyis (2.18) jobb oldalára.

Vizsgáljuk először a (2.18) integrál konvergenciáját! A  $Q^2-v$  síkon a 4.1. ábrának megfelelő tartományra kell integrálnunk.



4.1. ábra

Az integrál konvergenciájával három helyen lehet probléma:

a) *Regge-limesz*: Rögzített  $Q^2$  mellett  $v \rightarrow \infty$ . A Regge-elmélet szerint [7]

$$d + vMg \rightarrow \beta(Q^2) \frac{1}{v} \log^{-2} \left( \frac{v}{M} \right), \quad (4.1)$$

$$g \rightarrow \tilde{\beta}(Q^2) \log^{-k} \left( \frac{v}{M} \right) \quad (k \geq 1). \quad (4.2)$$



Felhasználjuk, hogy a kinematikai okokból megjelenő

$$\beta_1(x) \equiv 3x - 2x^2 - 2(2-x)\sqrt{x^2+x} \quad (4.3)$$

és

$$\beta_2(x) \equiv 1 + 2x - 2\sqrt{x^2+x} \quad (4.4)$$

függvények  $x \rightarrow \infty$  határesetben a következő aszimptotikus alakkal rendelkeznek:

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= -\frac{9}{4} + O\left(\frac{1}{x}\right), \\ \beta_2(x) &= \frac{1}{4x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ennek megfelelően a (2.18)-ban fellépő integrál, melyet célszerű

$$\delta_1 = \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \left\{ \frac{9\pi\kappa^2}{2M} F_2^2(Q^2) + \int_{\tau(Q^2)}^\infty \frac{dv^2}{v^2} \beta_1\left(\frac{v^2}{Q^2}\right) (d + vMg), \right. \quad (4.6)$$

$$\left. \delta_2 = \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} 6 \cdot \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \int_{\tau(Q^2)}^\infty \frac{dv^2}{v^2} \beta_2\left(\frac{v^2}{Q^2}\right) vMg \right. \quad (4.7)$$

módon kétfelé bontani, Regge-limeszben

$$\delta_{1\infty} \int \frac{dv}{v^2} \log^{-2} v < \infty, \quad (4.8)$$

$$\delta_{2\infty} \int \frac{dv}{v^2} \log^{-k} v < \infty. \quad (4.9)$$

b) *Bjorken-limesz*:  $Q^2 \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$ , de  $\omega = \frac{2Mv}{Q^2}$  rögzített.

Fénykúpalgebra, partonmodell stb. modellek egyaránt skálainvarianciát jósolnak [7], vagyis hogy

$$vd + v^2 Mg \rightarrow \gamma(\omega), \quad (4.10)$$

illetve

$$v^2 Mg \rightarrow \beta(\omega). \quad (4.11)$$

A megfelelő integrálok rögzített  $\omega$  mellett

$$\delta_{1\infty} \int \frac{d\omega}{\omega^2} \gamma(\omega) \int \frac{dQ}{Q^3} < \infty, \quad (4.12)$$

$$\delta_{2\infty} \int \frac{d\omega}{\omega^3} \beta(\omega) \int \frac{dQ}{Q^3} < \infty. \quad (4.13)$$



c) Valódi fotonprodukción, azaz  $Q^2 \rightarrow 0$ :

$$\delta_2 \propto \int_0^\infty dQ^2 \cdot \int \frac{dv}{v^2} g < \infty \quad (4.14)$$

$$\delta_1\text{-ben } \int \frac{dQ}{Q} F_2^2(Q^2) \text{ és } \int \frac{dQ}{Q} (d + vMg) \quad (4.15)$$

egyenként logaritmikusan divergens, mivel  $Q^2=0$ -ban sem  $F_2$ , sem  $d + vMg$  nem tűnik el. Ha azonban figyelembe vesszük a Drell—Hearn—Gerasimov-féle összegszabályt [9], vagyis hogy

$$\int_{t(0)}^\infty \frac{dv^2}{v^2} (d + vMg)_{Q^2=0} = \frac{2\pi\kappa^2}{M}, \quad (4.16)$$

akkor  $\delta_1$  a következő alakba írható

$$\begin{aligned} \delta_1 = & \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \left\{ \frac{g\pi\kappa^2}{2M} [F_2^2(Q^2) - 1] + \int_{t(Q^2)}^\infty \frac{dv^2}{v^2} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \beta_1 \left( \frac{v^2}{Q^2} \right) (d + vMg) - \beta_1 \left( \frac{v^2}{Q^2} \right) (d + vMg)_{Q^2=0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A szögletes zárójelben álló kifejezések  $Q^2=0$ -ra eltűnnek, ezért  $Q^2$ -ben analitikus-ságot (Taylor-sorba fejthetőséget) feltételezve

$$\delta_1 \propto \int_0^\infty dQ^2 < \infty. \quad (4.18)$$

Azt találtuk tehát, hogy (2.18) jobb oldala egy jóldefiniált, minden kritikus határesetben konvergens integrál.

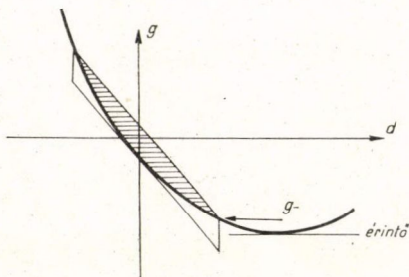
Használjuk fel a kinematikai egyenlőtlenségeket  $\delta_1$  és  $\delta_2$  lehetséges értékeinek korlátozására! Kezdjük  $\delta_2$ -vel, melyben a két spinfüggő alakfaktor közül csak  $g$  szerepel. A 3.1. ábráról leolvashatjuk, hogy  $g < g_+$ , vagyis tetszőleges  $Q^2$  és  $v$  mellett

$$v^2 Mg \leq 4M\pi W_1 \cdot \frac{v^2}{v^2 + Q^2} \left( \sqrt{\frac{Rv^2}{Q^2}} \right) \equiv 4M\pi W_1 \cdot (1 + \sqrt{R\theta}). \quad (4.19)$$

Alsó korlátot a (3.8) által megadott parabola érintőjének meghatározásából kapunk:

$$v^2 Mg \leq -4M\pi W_1 \cdot \frac{\theta}{1+\theta} \left( 1 + \frac{R\theta}{8} \right). \quad (4.20)$$

Ez az egyenlőtlenség azonban csak akkor adja meg a 3.1. ábrán látható tartomány legalsó pontját, ha a parabola vízszintes érintője a megengedett tartományhoz ténylegesen csatlakozik. Ha azonban a 4.2. ábrán látható



4.2. ábra



eset áll fenn, akkor a parabola érintőjénél élesebb korlátot jelent a  $g > g_-$  egyenlőtlenség, vagyis

$$v^2 M g > -4M\pi W_1 \frac{\theta}{\theta+1} (\sqrt{R\theta}-1). \quad (4.21)$$

A két egyenlőtlenség határesetben azonos korlátot kell adjon, ez pedig  $R\theta=16$  esetben következik be. Tehát általánosan a legélesebb korlát  $v^2 M g$ -re:

$$v^2 M g \cong -4M\pi W_1 \frac{\theta}{\theta+1} \begin{cases} 1 + \frac{R\theta}{8} & \text{ha } R\theta \leq 16, \\ \sqrt{R\theta}-1 & \text{ha } R\theta \geq 16. \end{cases} \quad (4.22)$$

Behelyettesítve (4.19) és (4.22) kifejezéseket (4.7)-be

$$\delta_2 \cong + \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} 12M^2 \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^2} \int_{t(Q^2)}^\infty \frac{\theta W_1}{\theta+1} \beta_2(\theta) (1+\sqrt{R\theta}) \frac{dv}{v^2}, \quad (4.23)$$

illetve

$$\delta_2 \cong - \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} 12M^2 \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^2} \int_{t(Q^2)}^\infty \frac{dv}{v^2} \frac{\theta W_1}{\theta+1} \beta_2(\theta) \times \begin{cases} 1 + \frac{R\theta}{8} & \text{ha } R\theta \leq 16 \\ \sqrt{R\theta}-1 & \text{ha } R\theta \geq 16 \end{cases} \quad (4.24)$$

adódik. Közvetlenül ellenőrizhetjük, hogy a fenti integrálok konvergensek a korábban vizsgált három kritikus limeszben:

a) *Regge-limesz*:

$$W_1(Q^2, v) \rightarrow v\beta(Q^2) \quad (4.25)$$

$$R(Q^2, v) \rightarrow \tilde{\beta}(Q^2) \quad (4.26)$$

$$\delta_2 < \int \frac{dv}{v^2} < \infty \quad (4.27)$$

$$\delta_2 > - \int \frac{dv}{v^2} > -\infty. \quad (4.28)$$

Amennyiben (4.22) helyett a gyengébb, bár mindig érvényes (4.20) egyenlőtlenséget vettük volna, úgy  $\sqrt{R\theta}$  helyett  $R\theta$ -val kellett volna számolnunk. Ez viszont egy  $v$  hatvánnyal nagyobb Regge-aszimptotikával rendelkezik és az alsó korlátot divergensé tenné. Ezt a hibát követte el [10] szerzője.

b) *Bjorken-limesz*:

$$W_1 \rightarrow F_1(\omega), \quad (4.29)$$

$$R \rightarrow \frac{1}{v} F_R(\omega), \quad (4.30)$$

$$|\delta_2| < \int \frac{d\omega}{\omega} F_1(\omega) \int \frac{dQ^2}{Q^6} < \infty. \quad (4.31)$$



c) Valódi foton határeset:

$$Q^2 \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0, \quad (4.32)$$

$$R/Q^2 \rightarrow \text{konstans}, \quad (4.33)$$

$$W_1 \rightarrow \text{konstans} \quad (4.34)$$

$$|\delta_2| < \int_0^\infty dQ^2 < \infty. \quad (4.35)$$

A következő feladat egyenlőtlenségek felírása  $\delta_1$ -re. (3.7) és (3.8) felhasználásával kapható, hogy

$$\begin{aligned} |d + vMg| &\leq d_0 + vMg = \\ &= \frac{4M\pi W_1}{v(1+\theta)}(\sqrt{R\theta} + \theta) = \frac{4M\pi W_2}{1+R} \left( \sqrt{\frac{R}{Q^2}} + \frac{v}{Q^2} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Megjegyezzük, hogy (4.36)-nál élesebb alsó korlátot is kaphattunk volna  $d + vMg$ -re, ennek azonban nincs gyakorlati jelentősége. Behelyettesítve  $\delta_1$  (4.6) kifejezésébe (4.36)-ot

$$\begin{aligned} |\delta_1| &\geq \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \cdot \left\{ \frac{9\pi\kappa^2}{2M} F_2^2(Q^2) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \int_{r(Q^2)}^\infty \frac{dv^2}{v^2} \beta_1(\theta) \frac{4M\pi W_1}{v(1+\theta)} (\sqrt{R\theta} + \theta) \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

becslést kaphatjuk. Vizsgáljuk meg ennek az integrálnak is a konvergenciáját a kérdéses határesetekben!

a) Regge-limesz:

$$\int_0^\infty \frac{dv^2}{v^2} \beta_1 \left( \frac{v^2}{Q^2} \right) \frac{W_1}{v(1+\theta)} (\sqrt{R\theta} + \theta) \propto \int_0^\infty \frac{dv}{v} \quad (4.38)$$

logaritmikusan divergens!

b) Bjorken-limesz:

$$|\delta_1| < \int_1^\infty F(\omega) d\omega \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^4} < \infty. \quad (4.39)$$

c) Valódi foton:

$$|\delta_1| < \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} F_2^2 + \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \times \text{konstans} \quad (4.40)$$

két logaritmikusan divergens kifejezés összege, melyek általában nem ejtik ki egymást!

Azt tapasztaltuk, hogy a (4.37) becslés túl gyenge, a Regge-tartomány és a valódi foton határeset divergenciája miatt csak a semmitmondó  $|\delta_1| < \infty$  egyenlőtlenségre vezet.

A probléma oka abban van, hogy a (4.36) becslés felhasználásával lényeges dinamikai információkat veszítettünk el, nevezetesen a Drell—Hearn—Gerasimov-



féle összesszabályt és a  $d + \nu Mg$  függvény kedvező Regge-viselkedését! Ez a felismerés a megoldás egy lehetséges útját is sugallja:

Bontsuk fel az integrációs tartományt — vagyis a  $Q^2 - \nu$  síkot — a 4.3. ábrán látható részekre!

I.  $1 < \omega < \omega_0$ ;  $Q^2 > Q_0^2$ :

Ebben a tartományban a (4.38) és (4.40) divergenciák nem lépnek fel, a tartomány nyitott oldalán pedig (4.39) miatt konvergens a (4.37) integrál. Itt tehát változatlan formában használhatjuk korábbi becslésünket.

II.  $\omega > \omega_0$ ;  $Q^2 > Q_0^2$ :

Ebben a tartományban a Regge-limesz okoz problémát. Szükségünk van valamilyen dinamikai információra, ez pedig a  $d + \nu Mg$  függvény (4.1)-ben megadott aszimptotikája:

$$d + \nu Mg \xrightarrow[Q^2 \text{ fix}]{\nu \rightarrow \infty} \beta(Q^2) \frac{1}{\nu} \log^{-2} \left( \frac{\nu}{M} \right). \quad (4.41)$$

A  $\beta(Q^2)$  reziduum-függvényre nem tételezünk fel semmilyen konkrét alakot, értékét kinematikai egyenlőtlenségekkel korlátozzuk.

Válasszuk  $\omega_0$  értékét olyan nagyra, hogy a II. tartományban már mindenhol jó közelítés legyen a (4.41) aszimptotikus alak. Ekkor (4.36) miatt a  $\beta(Q^2)$  függvényre

$$\nu W_2 \log^2 \left( \frac{\nu}{M} \right) \frac{\sqrt{\frac{R}{Q^2} + \frac{\nu}{Q^2}}}{1 + R} \quad (4.42)$$

monoton  $\nu$ -beli növekedését figyelembe véve a legélesebb korlátot az  $\omega = \omega_0$  határon, vagyis  $\nu_0 = \frac{\omega_0 Q^2}{2M}$  értéknél adja:

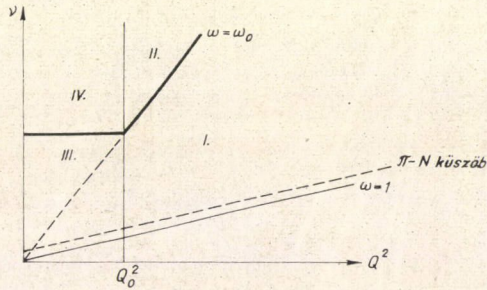
$$|\beta(Q^2)| \leq \frac{2\pi\omega_0 Q^2 W_2(Q^2, \nu_0)}{R(Q^2, \nu_0) + 1} \log^2 \left( \frac{\nu_0}{M} \right) \left( \sqrt{\frac{R(Q^2, \nu_0)}{Q^2} + \frac{\omega_0}{2M}} \right). \quad (4.43)$$

Ekkor tehát

$$|d + \nu Mg| \leq \frac{4M\pi W_2(Q^2, \nu_0)}{R(Q^2, \nu_0) + 1} \left( \sqrt{\frac{R(Q^2, \nu_0)}{Q^2} + \frac{\nu_0}{Q^2}} + \frac{\nu_0}{Q^2} \right) \frac{\nu_0}{\nu} \frac{\log^2 \left( \frac{\nu_0}{M} \right)}{\log^2 \left( \frac{\nu}{M} \right)}. \quad (4.44)$$

A fenti egyenlőtlenség már figyelembe veszi a pozitivitási egyenlőtlenségek mellett a dinamikai információt jelentő Regge-kifejtést is.

III. Ezt a tartományt  $Q^2 < Q_0^2$  és  $\nu < \nu_0 = \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M}$  határozza meg.



4.3. ábra



Válasszuk  $Q_0$  értékét olyan kicsinek, hogy a  $Q^2 < Q_0^2$  tartományban a szerkezeti függvények  $Q^2$  szerinti Taylor-sorában elegendő legyen az első két tagot kiírni és a  $Q^4$ -nel arányos kifejezéseket már elhanyagolhassuk. Ekkor

$$d + vMg = (d + vMg)_{Q^2=0} + Q^2 \cdot f(v) \quad \text{ha} \quad Q^2 < Q_0^2. \quad (4.45)$$

Alkalmazva (4.36) egyenlőtlenséget az  $f(v)$  együttható függvényre az

$$f(v) \geq \frac{1}{Q^2} \left\{ -(d + vMg)_{Q^2=0} \pm \frac{4M\pi W_2}{R+1} \left( \sqrt{\frac{R}{Q^2}} + \frac{v}{Q^2} \right) \right\} \quad (4.46)$$

megszorítást kapjuk. Másrészt  $(d + vMg)_{Q^2=0}$ -ra érvényes

$$|(d + vMg)_{Q^2=0}| \equiv \frac{4M\pi W_1}{1 + \frac{v^2}{Q^2}} \left( \sqrt{\frac{R}{Q^2}} + \frac{v}{Q^2} \right) \Big|_{Q^2=0} = \frac{4M\pi}{v} W_1(Q^2 = 0, v), \quad (4.47)$$

ahonnan

$$|f(v)| \equiv \frac{1}{Q^2} \left\{ \frac{4M\pi W_1(Q^2=0, v)}{v} + \frac{4M\pi W_1(Q^2, v)}{1 + v^2/Q^2} \left( \sqrt{\frac{R}{Q^2}} + \frac{v}{Q^2} \right) \right\}. \quad (4.48)$$

Ez minden  $Q^2 < Q_0^2$ -re teljesül, de a jobb oldal monoton csökken  $Q^2$ -tel, ezért a legélesebb korlátot  $Q^2 = Q_0^2$  pont adja. Tehát

$$|f(v)| < f^{\max}(v) \equiv \frac{4M\pi W_1(0, v)}{vQ_0^2} + \frac{4M\pi W_1(Q_0^2, v)}{v^2 + Q_0^2} \left( \sqrt{\frac{R}{Q_0^2}} + \frac{v}{Q_0^2} \right). \quad (4.49)$$

A  $\delta_1$ -t előállító integrál korlátai a III. tartományban

$$\begin{aligned} \delta_1^{\text{III}} \geq & \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^{Q_0^2} \frac{dQ}{Q} \left\{ \frac{9\kappa^2 F_2^2(Q^2)\pi}{2M} + \right. \\ & \left. + \int_{t(Q^2)}^{\omega_0 Q_0^2/2M} \frac{dv^2}{v^2} \beta_1(\theta) [(d + vMg)_{Q^2=0} FQ^2 f^{\max}(v)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ez az integrál nem divergens  $Q^2=0$ -ban a Drell—Hearn-összegszabály miatt, másrészt a pozitivitási egyenlőtlenségeken keresztül mérhető mennyiségekkel korlátozza  $\delta_1$  értékét. Vonjuk ki ugyanis az első tagból és a másodikból ugyanazt a számot:

$$\begin{aligned} \delta_1^{\text{III}} \geq & \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^{Q_0^2} \frac{dQ}{Q} \left\{ \frac{9\kappa^2 \pi (F_2^2 - 1)}{2M} + \int_{t(Q^2)}^{\omega_0 Q_0^2/2M} \frac{dv^2}{v^2} \times \right. \\ & \times \left( \beta_1(\theta) + \frac{9}{4} \right) [(d + vMg)_{Q^2=0} \mp Q^2 f^{\max}(v)] \Big\} + \\ & + \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \int_0^{Q_0^2} \frac{dQ}{Q} \int_{\omega_0 Q_0^2/2M}^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \frac{9}{4} (d + vMg)_{Q^2=0}. \end{aligned} \quad (4.51)$$



Az integrál  $\{ \}$ -es része arányos  $Q^2$ -tel, ezért konvergens, az utolsó tag pedig kiesik a IV. tartomány megfelelő kifejezésével.

$$\text{IV. } Q^2 < Q_0^2 \text{ és } v > v_{00} = \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M}.$$

Ebben a tartományban  $Q^2 \rightarrow 0$  és  $v \rightarrow \infty$  egyaránt problémát okoz, ezért a II. és III. tartományban alkalmazott módszereket egyszerre kell használnunk. Feltételezzük, hogy  $Q^2$  elég kicsiny, illetve  $\omega_0$  elég nagy ahhoz, hogy

$$d + vMg = (d + vMg)_{Q^2=0} + C \frac{Q^2}{v} \log^{-2} \left( \frac{v}{M} \right) \quad (4.52)$$

érvényes a teljes IV. tartományban. A pozitivitási egyenlőtlenségek akkor adják a legélesebb megszorítást a  $C$  számra, ha a  $Q^2 = Q_0^2$ ,  $v = \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M}$  pontban írjuk fel ezeket.

Ekkor

$$|C| \leq \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M} \log^2 \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M^2} f^{\max} \left( \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M} \right) \quad (4.53)$$

korlátot kapjuk, vagyis

$$\begin{aligned} d + vMg &\geq (d + vMg)_{Q^2=0} + Q^2 \cdot \frac{\omega_0 Q_0^2}{2Mv} \times \\ &\times \frac{\log^2 \left( \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M^2} \right)}{\log^2 \left( \frac{v}{M} \right)} f^{\max} \left( \frac{\omega_0 Q_0^2}{2M} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

A megfelelő integrál

$$\begin{aligned} \delta_1^{\text{IV}} &\geq \frac{\alpha m}{2\pi^2(1+\kappa)} \left[ \int_0^{Q_0^2} \frac{dQ}{Q} \cdot \int_{v_{00}^2}^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \left\{ \left( \beta_1(\theta) + \frac{9}{4} \right) (d + vMg)_{Q^2=0} \pm \right. \right. \\ &\left. \left. \pm \beta_1(\theta) Q^2 \cdot \frac{v_{00}}{v} \frac{\log^2 \left( \frac{v_{00}}{M} \right)}{\log^2 \left( \frac{v}{M} \right)} f^{\max}(v_{00}) \right\} - \int_0^{Q_0^2} \frac{dQ}{Q} \cdot \int_{v_{00}^2}^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \frac{9}{4} (d + vMg)_{Q^2=0} \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Az utolsó tag valóban kiejti (4.51) megfelelő divergens kifejezését, a többi integrál pedig konvergens. Ez a konvergencia akkor is megmarad, ha (4.55)-ben és hasonlóan (4.51)-ben kihasználjuk a (4.47) egyenlőtlenséget.



Mindent összevetve  $\delta_1$ -re a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi^2(1+\kappa)}{\alpha m} \delta_1 \geq & \int_{Q_0}^{\infty} \frac{dQ}{Q} \left\{ \frac{9\pi\kappa^2 F_2^2}{2M} \pm \int_{t(Q^2)}^{\omega_0 Q^{2/2M}} \frac{dv^2}{v^2} \beta_1(\theta) \frac{4M\pi W_1}{v(1+\theta)} (\sqrt{R\theta} + \theta) \right\} \pm \\
 & \pm \int_{Q_0}^{\infty} \frac{dQ}{Q} \int_{\frac{\omega_0 Q_0^2}{2M}}^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \beta_1(\theta) \left[ \frac{4M\pi W_1}{v(1+\theta)} (\sqrt{R\theta} + \theta) \right]_{v=v_0} \frac{\omega_0 Q^2}{2Mv} \frac{\log^2 \left( \frac{\omega_0 Q^2}{2M^2} \right)}{\log^2(v/M)} + \\
 & + \int_0^{Q_0} \frac{dQ}{Q} \frac{9\pi\kappa^2 \pi (F_2^2 - 1)}{2M} \pm \int_0^{Q_0} \frac{dQ}{Q} \int_{t(Q^2)}^{\frac{\omega_0 Q_0^2}{2M}} \frac{dv^2}{v^2} \beta_1(\theta) \cdot Q^2 \cdot f^{\max}(v) \pm \\
 & \pm \int_0^{Q_0} \frac{dQ}{Q} \int_{v_{30}^2}^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \beta_1(\theta) Q^2 \cdot \frac{\omega_0 Q_0^2}{2Mv} \frac{\log^2(v_{00}/M)}{\log^2(v/M)} f^{\max}(v_{00}) \pm \\
 & \pm \int_0^{Q_0} \frac{dQ}{Q} \int_{t(Q^2)}^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \left( \beta_1(\theta) + \frac{9}{4} \right) \frac{4M\pi}{v} W_1(Q^2=0, v). \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Ezzel elértük célunkat,  $\delta_1$ -re olyan korlátot tudtunk adni, amely csak mérhető (és már megmért) mennyiségeket tartalmaz és a fellépő integrálok jóldefiniált véges értékkel rendelkeznek. Az általános érvényű pozitívítási egyenlőtlenségeken kívül a Regge-aszimptotika és a Taylor-sorba fejthetőség tényét használtuk ki. A reziduumfüggvények, illetve a sorfejtési együtthatók nagyságára nem volt szükségünk, lehetséges értékeiket szintén pozitívítási egyenlőtlenségek korlátozták.

Arra a kérdésre, hogy mekkora  $Q_0^2$ , illetve  $\omega_0$  mellett jogos a fenti számítás, az 5. fejezetben, a numerikus eredmények tárgyalásánál fogunk választ adni.

## 5. Numerikus eredmények

Az előző fejezetben megadtuk a proton-polarizálhatóság hiperfinom-felhasadásához adódó járulékanak alsó és felső korlátját. A (4.24) és (4.56) egyenlőtlenségek jobb oldalán  $W_1(Q^2, v)$  és  $R(Q^2, v)$  (vagy ami ezzel egyenértékű:  $W_1(Q^2, v)$  és  $W_2(Q^2, v)$ ) azaz a spinre átlagolt rugalmatlan  $e-p$  szórásban mérhető függvények szerepelnek. A mérések [11] a  $Q^2-v$  sík jelentős részén megadták ezeket a függvényeket. A kérdés az, hogyan extrapoláljuk ezeket az adatokat a még hiányzó tartományokra?

Az integrálok numerikus számításánál a következő módon jártunk el. Az integrációs tartományt 4 részre vágtuk az 5.1. ábrának megfelelően.

I. A  $Q^2 > Q_0^2$ ;  $\omega < \omega_0$  tartomány egyrészt a rezonanciákat foglalja magába  $[(p+q)^2 = W^2 < (2 \text{ GeV})^2]$ , másrészt azt a területet, ahol a mért függvények skálarinvarianciát mutatnak. Felhasználtuk *M. Breidenbach* és *J. Kuti* által adott [14]

$$vW_2(Q^2, v) = F_2(\omega') [R(W) + BG(W)] \quad (5.1)$$



előállítás, ahol  $\omega' = 1 + \frac{W^2}{Q^2} = \frac{2Mv + M^2}{Q^2} = \omega + \frac{M^2}{Q^2}$  a módosított skálaváltozó (ebben a változóban nézve már sokkal kisebb  $Q^2$  értékeknél teljesül a skálainvariancia).

$$F_2(\omega') = c_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega'}\right)^3 + c_2 \left(1 - \frac{1}{\omega'}\right)^4 + c_3 \left(1 - \frac{1}{\omega'}\right)^5 \quad (5.2)$$

a skálafüggvény [12]

$$c_1 = 0,6752,$$

$$c_2 = 1,810,$$

$$c_3 = -2,278.$$

értékekkel,  $R(W)$  és  $BG[W]$  módosító tényezők a rezonanciákat és a háttérrel veszik figyelembe és csak az invariáns tömegtől  $W^2 = (p+q)^2$  függenek.

$$R(W) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i BW(M_i; \Gamma_i; W), \quad (5.3)$$

ahol  $\alpha_1 = 0,7004$ ,  $\alpha_2 = 0,3996$ ,  $\alpha_3 = 0,3155$  és  $\alpha_4 = 0,0690$ ,  $BW$  pedig a Breit—Wigner-rezonanciaformula

$$BW(M_i; \Gamma_i, W) = G \frac{q_*^{03}}{q_*^3} \frac{\Gamma_R^2 M_i^2}{(W - M_i)^2 + \Gamma_i^2 M_i^2}. \quad (5.4)$$

A küszöbviselkedést a

$$G = \begin{cases} \frac{(W - M)(W^2 - M^2)(1 + M/W)}{(M_i - M)(M_i^2 - M^2)(1 + M/M_i)} & W < M_i \\ 1 & W > M_i \end{cases} \quad (5.5)$$

tényező biztosítja, ezenkívül

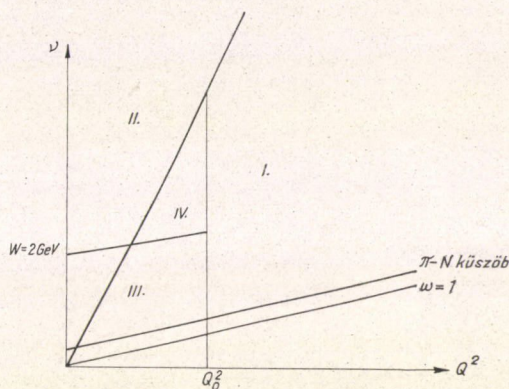
$$\Gamma_R = \Gamma_i \frac{V}{V_0} \frac{q_*}{q_*^0}, \quad (5.6)$$

ahol

$$q^{*2} = Q^2 + \left( \frac{W^2 - M^2 - Q^2}{2M_i} \right)^2, \quad q_0^{*2} = Q^2 + \left( \frac{M_i^2 - M^2 - Q^2}{2M_i} \right)^2,$$

$$V_i = \frac{(Rq^*)^2}{1 + (Rq^*)^2}, \quad V_{0i} = \frac{R^2 q_0^{*2}}{1 + R^2 q_0^{*2}}, \quad (5.7)$$

$$R = 4,05 \text{ GeV}^{-1}.$$



5.1. ábra



A megfelelő rezonancia-tömegek és szélességek

$M_i$	$\Gamma_i$	
1,226	0,115	$i = 1$
1,508	0,080	$i = 2$
1,705	0,085	$i = 3$
1,920	0,220	$i = 4$

(5.8)

A háttérét a  $BG(W)$  függvény veszi figyelembe, melyre a következő háromparaméteres alakot vettük

$$BG(W) = 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{(1+W-W_T)^i}, \quad (5.9)$$

ahol  $W_T = 1,077$  a pion—nukleon küszöb, a paraméterek pedig

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -0,3282, \\ \beta_2 &= 0,5369, \\ \beta_3 &= 0,7419. \end{aligned} \quad (5.10)$$

$R(Q^2, \nu)$  értékét az egész tartományban egységesen 0,18-nak választottuk — a kísérleti adatokkal összhangban.

II. A  $W > 2$  GeV,  $\omega > \omega_0$  tartományban Regge-illesztést használtunk

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = c_1 \frac{Q^2}{Q^2 + Q_1^2} + c_2 \sqrt{\frac{Q^2}{Q^2 + Q_1^2}} \omega^{-1/2}, \quad (5.11)$$

ahol  $c_1 = 0,24$ ,  $c_2 = 0,36$  és  $Q_1^2 = 0,26$ .

$$2MW_1 = D_1 \frac{Q^2}{Q^2 + Q_2^2} + D_2 \sqrt{\frac{Q^2}{Q^2 + Q_2^2}} \omega^{1/2}. \quad (5.12)$$

Abból a feltételből, hogy

$$R = \frac{(1 + \nu^2/Q^2)W_2 - W_1}{W_1} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} 0 \quad (5.13)$$

a következő megszorítás adódik:

$$c_1 Q_2^2 = D_1 Q_1^2 \quad (5.14)$$

és

$$c_2 Q_2 = D_2 Q_1.$$

Ha azt akarjuk, hogy  $R$  nagy  $\omega$ -ra 0,18-hoz tartson, akkor

$$\frac{c_1}{D_1} - 1 = 0,18 \quad (5.15)$$

összefüggésnek kell teljesülnie.

III.  $W < W_0 = 2$  GeV,  $Q^2 < Q_0^2$  tartományban  $R$ -t lineárisan interpoláljuk rögzített  $W$  mellett  $Q^2 = 0$  és  $Q^2 = Q_0^2$  között.

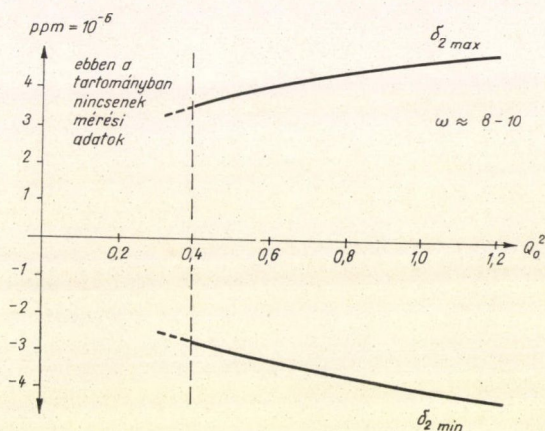


$W_2$  kinematikai okokból  $Q^2 \rightarrow 0$ -ra eltűnik, általában  $W_2 \propto Q^2 \cdot f(Q^2)$  alakú, ahol  $f(Q^2)$  alakfaktor jellegű függvény. Felhasználva, hogy valódi foton—proton szórás teljes hatáskeresztmetszetét

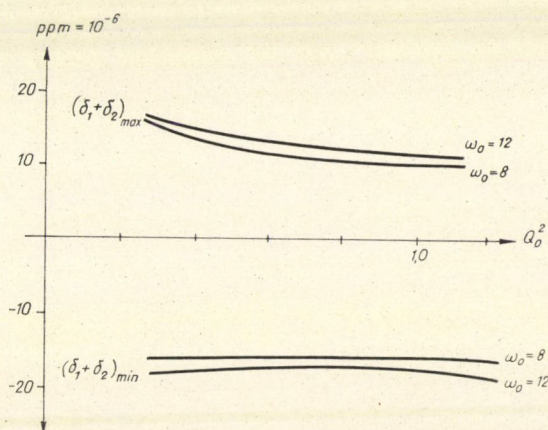
$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{vW_2(Q^2, \nu)}{Q^2} = \frac{M^2}{4\pi^2\alpha} \sigma_T \quad (5.16)$$

módon kaphatjuk meg  $W_2$ -ből, lineárisan interpoláljuk  $W_2/Q^2$  függvényt  $Q^2=0$  és  $Q^2=Q_0^2$  között adott  $W$  mellett.

IV. A  $W < W_0$ ,  $Q^2 < Q_0^2$ ,  $\omega < \omega_0$  háromszög alakú tartományban szintén lineáris interpolálást alkalmaztunk  $Q^2$ -ben rögzített  $W$  mellett.



5.2. ábra



5.3. ábra



A numerikus integrálásokat a Magyar Tudományos Akadémia CDC 3300 számítógépén végeztük el. A  $Q_0^2$  és  $\omega_0$  paraméterek értékeit

$$0,4 (\text{GeV})^2 < Q_0^2 < 1,2 (\text{GeV})^2$$

$$8 < \omega_0 < 12 \quad (5.17)$$

tartományban változtattuk. Az alsó és felső korlátra adódó numerikus eredmények az 5.2. és 5.3. grafikonokon látható.

A számítógép-program egyik változatát a Függelékben mellékelem.

## 6. Hiperfinom-felhasadás az elektromágneses + gyenge kölcsönhatás egységes elméletében

Az előző fejezetekben meghatároztuk a hidrogén hiperfinom-felhasadásának protonszerkezeti korrekcióját az elektrodinamika alapján. Láttuk, hogy a kísérlet és az elmélet közti eltérés nem lehet nagyobb, mint kb. 16 ppm. Amennyiben valamilyen eddig figyelmen kívül hagyott kölcsönhatás szintén járulékot adna a hiperfinom szerkezethez, ennek értéke sem lehet nagyobb, mint 16 ppm. Ilyen kölcsönhatás elsősorban a gyenge kölcsönhatás lehet.

A gyenge kölcsönhatás két modelljét vizsgáljuk a hiperfinom felhasadás kapcsán.

S. Weinberg 1967-ben a leptonok gyenge és elektromágneses kölcsönhatására olyan egységes elméletet javasolt, amely az eddigi vizsgálatok szerint renormálható [13.] Az elmélet magába foglalja a kvantumelektrodinamikát és a gyenge kölcsönhatás „klasszikus” V—A elméletét, lehetőséget ad magasabb rendű folyamatok divergencia-mentes számítására, ezenkívül új típusú kölcsönhatásokat is tartalmaz. Ezek közül leglényegesebb a semleges vektoráram megjelenése, amely lehetőséget nyit arra, hogy egyes rugalmas folyamatok (pl.  $\nu + \nu \rightarrow \nu + \nu$ ;  $e^- + \nu \rightarrow e^- + \nu$ ) már elsőrendben fel-lépjenek. Ezenkívül a hidrogén hiperfinom szerkezetéhez egy nem elektromágneses eredetű korrekciót szolgáltat, amely a gyenge kölcsönhatás  $G$  csatolási állandójában elsőrendű.

Jelenleg világszerte erős kísérleti és elméleti erőfeszítéseket tesznek a Weinberg-elmélet igazolása, vagy cáfolása érdekében. A mérési adatok éppen a határon vannak, nem erősítik, de nem is mondanak ellent az elméletnek. A modell ellenőrzésére vagy olyan területen nyílik lehetőség, ahol más elméletek nem jöhetnek számításba (pl. a már említett rugalmas lepton-szórások), vagy ott, ahol a mérés nagy pontossága miatt a meglevő elmélettől — pl. a kvantum-elektrodinamikától — való kicsiny eltérés is kimutatható. Ilyen eset állhat elő a hidrogén hiperfinom szerkezeténél.

A Weinberg-elmélet egy speciális esete a gauge-modelleknek nevezett általánosabb osztálynak. Ezeket a következő lépéseken keresztül konstruálják meg:

a) Olyan Lagrange-függvényt választunk, amely valamilyen transzformációs csoportra nézve egzakt másodfajú (lokális) mértékinvarianciával rendelkezik. Az ilyen Lagrange-függvény zérus tömegű Yang—Mills-terek kölcsönhatását írja le skalár multiplettekkel és más részecskékkkel.

b) Olyan mértéket választunk, amelyben a skalár terek komponensei egy-néhány valós tér kivételével eltűnnek.



c) Megengedjük a gauge-csoport spontán szimmetria-törését a megmaradt skalár terek nullától különböző  $\lambda$  vákuum-várhatóértékén keresztül.  $\lambda$  levonásával átdefiniált terek már zérus vákuum-értékkel rendelkeznek. A vektorbozonok a Higgs-jelenségen keresztül tömeget kapnak, kivéve azokat, amelyek a törés nélküli szimmetriához kapcsolódnak.

A Weinberg-modellben a kiindulási gauge-csoport az  $SU(2)_L \times Y$ , amely a leptonikus izospinhez és leptonikus hipertöltéshez kapcsolódik.

A „balkezes” leptonok dublettet

$$L = \frac{1+\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

a „jobbkezes” elektron pedig  $SU(2)$  szingulettet alkot

$$R = \frac{1-\gamma_5}{2} \cdot e. \quad (6.2)$$

A Lagrange-függvényt olyannak választjuk, hogy a  $T$  izospint és az  $Y = N_R + N_L/2$  hipertöltést megőrizze ( $N_R$  és  $N_L$  a megfelelő leptonszámok).

A gauge-csoportnak megfelelő Yang—Mills-terek az  $\vec{A}_\mu$  triplett és  $B_\mu$  szingulett, melyek lineáris kombinációja

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad (6.3)$$

a közbenső töltött vektorbozon,

$$A_\mu = (g^2 + g'^2)^{-1/2} (-g' A_\mu^3 + g B_\mu) \quad (6.4)$$

az elektromágneses tér,

$$Z_\mu = (g^2 + g'^2)^{-1/2} (g A_\mu^3 + g' B_\mu) \quad (6.5)$$

pedig egy semleges vektorbozon téroperátora ( $g$  és  $g'$  csatolási állandók).

Ahhoz, hogy a modell visszadja az elektrodinamikát, teljesülnie kell az

$$e = \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \quad (6.6)$$

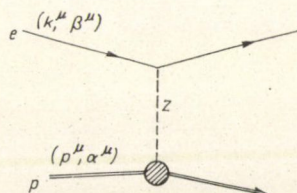
összefüggésnek. A két csatolási állandó viszonyát, melyet szokás a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{g'}{g} \quad (6.7)$$

keveredési szöggel jellemezni — szabad paraméternek hagyjuk. Megjegyezzük, hogy amennyiben egy  $SU(3) \times SU(3)$  invariáns Lagrange-függvényből indulunk ki, úgy  $\theta = 30^\circ$  adódik. Ez arra utal, hogy  $\operatorname{tg} \theta$  általában 1 nagyságrendű szám.

A hidrogén hiperfinom-felhasadás gyenge korrekcióját akarjuk kiszámítani a Weinberg-modellben. Legalacsonyabb rendben a 6.1. ábra járuléka jelenik meg.

Ha a 2. fejezetben szereplő érvelést ismét alkalmazzuk, látható, hogy elegendő az előreszóródási



6.1. ábra



amplitúdót ( $q^\mu=0$ , vagyis sztatikus határeset) meghatározzunk. Amennyiben (2.8)-ban az integrálásokat elvégezzük

$$\Delta E = \frac{\alpha\pi}{4mM} |\Phi(0)|^2 A(q=0) \quad (6.8)$$

összefüggést kapjuk, ahol  $\Phi(\vec{r})$  a nemrelativisztikus Schrödinger-hullámfüggvény.

A 6.1. ábra járulékának kiértékeléséhez ismernünk kell az elektron-Z bozon és proton-Z bozon csatolásokat, továbbá a közbenső semleges vektorbozon tömegét.

Az  $e-Z$  csatolás Lagrange-függvénye a modellben

$$L_{ez} = \frac{i}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \bar{\psi}_e(x) \gamma_\lambda \left( \frac{3g'^2 - g^2}{g'^2 + g^2} - \gamma_5 \right) \psi_e(x) Z^\lambda(x). \quad (6.9)$$

A semleges vektorbozon tömegét a modell nem rögzíti, csak  $M_W$ -hez viszonyított arányát, hiszen mindkét tömeg ugyanannak a spontán szimmetriatörésnek következménye:

$$M_W = \frac{g\lambda}{2}, \quad M_Z = \frac{\lambda}{2} (g^2 + g'^2)^{1/2}, \quad (6.10)$$

ahol  $\lambda = \langle 0 | \varphi | 0 \rangle$  a szimmetriatörés paramétere. Másrészt viszont ismerjük a gyenge kölcsönhatás csatolási állandóját

$$G_W = 1,0 \times 10^{-5} M^{-2}, \quad (6.11)$$

amely a  $W$  bozon tömegétől

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (6.12)$$

módon függ. (6.6—7) és (6.10—12) összevetéséből

$$M_Z = \frac{74,6 \text{ GeV}}{\sin 2\theta} \quad (6.13)$$

adódik.

Hátra van még a proton-Z mezon csatolás meghatározása. A zérus ritkaságú hadronok beépítését az elméletbe Weinberg 1971-ben megoldotta [15]. (A ritka részek figyelembevétele csak nagyon erőltetetten sikerült és valószínűleg nem jelentí végleges megoldását a kérdésnek.)

Az  $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  nukleon dublettből elég természetes módon tudunk  $SU(2)_L$  „balkezes izodubletet konstruálni:

$$N_L = \frac{1 + \gamma_5}{2} N \quad (6.14)$$

és ezekből a  $T_L$  és  $Q$ -hoz tartozó áramok:

$$\vec{J}^\lambda = i\bar{N} \vec{t} \gamma^\lambda (1 + \gamma_5) N \quad + \text{ mezon tagok} \quad (6.15)$$

$$J_{\text{elm}}^\lambda = i\bar{N} \left( \frac{1}{2} + t_3 \right) \gamma^\lambda N \quad + \text{ mezon tagok} \quad (6.16)$$



ahol  $\vec{t}$  az izospinmátrix  $\left(\vec{t} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}\right)$ ,  $J_{\text{elm}}$  az elektromágneses,  $\vec{J}$  pedig a  $\beta$  bomlás hagyományos  $V-A$  árama.

A hadronok az  $\vec{A}$  és  $B$  gauge terekkel

$$L_h = \frac{1}{2} g A_\lambda J_{\text{elm}}^\lambda + \frac{1}{2} g' B_\lambda (J_3^\lambda - 2J_{\text{elm}}^\lambda) \quad (6.17)$$

módon hatnak kölcsön, ahol  $g$  és  $g'$  azonosak a leptonoknál fellépő csatolási állandókkal. Ha (6.3—5) alapján áttérünk az  $\vec{A}_\mu$  és  $B_\mu$  terekről a  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  és  $A_\mu$  terekre

$$L_h = -e A_\mu J_{\text{elm}}^\mu + \frac{1}{2\sqrt{2}} g (W_\mu J_W^{\mu+} + W_\mu^+ J_W^{\mu-}) + \frac{1}{2} (g^2 + g'^2)^{1/2} Z_\mu J_Z^\mu, \quad (6.18)$$

ahol

$$J_W^{\pm\mu} = J_1^\mu \mp iJ_2^\mu, \quad (6.19)$$

$$J_Z^\mu = J_3^\mu - \frac{2g'^2}{g^2 + g'^2} J_{\text{elm}}^\mu. \quad (6.20)$$

(6.18) első két tagja a hagyományos elektromágneses és gyenge kölcsönhatásoknak felel meg, az utolsó kifejezés pedig a semleges vektorbozont csatolja a hadronokhoz.

Nagyon lényeges, hogy (6.20)-n keresztül a semleges hadronáram mátrixelemei kifejezhetők az elektromágneses és az izovektor áram mátrixelemeivel, tehát kimért, ismert mennyiségekkel.

A teljes előreszórási amplitúdó — figyelembe véve, hogy az anomális mágneses momentummal arányos tag  $q=0$  közelítés miatt nem lép fel:

$$A(q^\mu=0) = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2)^{1/2} \bar{u}(k, \beta) \gamma_\lambda \left( \frac{3g'^2 - g^2}{g'^2 + g^2} - \gamma_5 \right) u(k, \beta) \cdot \\ \cdot \frac{g^{\lambda\sigma} - \frac{q^\lambda q^\sigma}{M_Z^2}}{q^2 - M_Z^2} \cdot \frac{1}{2} (g'^2 + g^2)^{1/2} \bar{U}(p, \alpha) \Gamma_\sigma U(p, \alpha) \Big|_{q=0}, \quad (6.21)$$

ahol az elektron, illetve proton-spinorok normálása

$$\bar{u}(k, \beta) u(k, \beta) = 2m; \quad \bar{U}(p, \alpha) U(p, \alpha) = 2M, \quad (6.22)$$

a proton sarokrész pedig (6.15—16), illetve (6.20)-nak megfelelően

$$\Gamma_\sigma = \gamma_\sigma (1 + \gamma_5) F_1^V(q^2=0) - \frac{2g'^2}{g^2 + g'^2} \gamma_5 F_1^P(q^2=0). \quad (6.23)$$

Az izovektor áram várható értéke protonállapotok között  $F^V(0) = \frac{1}{2} (F^p(0) - F^n(0)) = 1/2$ .

(6.21) lepton és hadron része egyaránt vektor- és axiálvektor tagok összege. A vektorrész

$$\text{Tr} \left\{ (\hat{p} + M) \frac{1 + \gamma_5 \hat{\alpha}}{2} \gamma_\sigma \right\} = 2p_\sigma \quad (6.24)$$



független a polarizációtól, ezért a spinfüggő effektusokból adódó hiperfinomszerkezethez nem adhat járulékot. Az axiálvektor rész:

$$\text{Tr} \left\{ (\hat{p} + M) \frac{1 + \gamma_5 \hat{\alpha}}{2} \gamma_\sigma \gamma_5 \right\} = 2M\alpha_\sigma \quad (6.25)$$

arányos a polarizációval. Az előreszórási amplitúdó:

$$A(q=0) = \frac{mM}{2M_Z^2} (g^2 + g'^2) (\alpha_\mu \beta^\mu). \quad (6.26)$$

Felhasználva, hogy  $M_Z = \frac{74,6 \text{ GeV}}{\sin 2\theta}$ ,  $g = \frac{e}{\sin \theta}$ ,  $g' = \frac{e}{\cos \theta}$ ,

$$A = -\frac{2e^2 mM}{(74,6 \text{ GeV})^2} (\vec{\alpha} \vec{\beta}). \quad (6.27)$$

Figyelemre méltó, hogy (6.27)-ben nem szerepel a  $\theta$  keveredési szög, a modell egyetlen szabad paramétere.

A gyenge korrekció járuléka az energiaeltolódáshoz

$$\Delta E_Z = \frac{e^2}{8(74,6 \text{ GeV})^2} |\Phi(0)|^2 \cdot (\vec{\sigma}_e \vec{\sigma}_p), \quad (6.28)$$

ahol a polarizációs vektorokat helyettesítettük a megfelelő spinmátrixokkal, hogy könnyebben összehasonlíthassuk az eredményt a (2.4) Fermi-képlettel. A relatív korrekció:

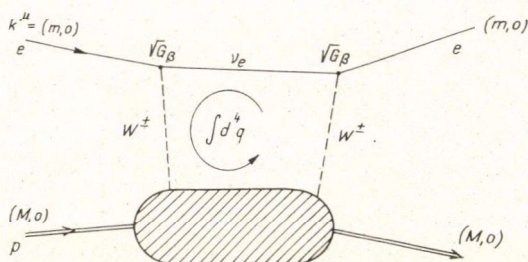
$$\frac{\Delta E_Z}{\Delta E_{\text{Fermi}}} = \frac{3}{4(1+\kappa)} \frac{mM}{(74,6 \text{ GeV})^2} = 0,02 \text{ ppm}. \quad (6.29)$$

Azt kaptuk, hogy a Weinberg-modell — annak ellenére, hogy a gyenge kölcsönhatás csatolási állandójában elsőrendű korrekciót ad a semleges vektoráram következtében, nem szolgáltat akkorá anomális hiperfinom-felhasadást, amekkora a protonpolarizálhatósági taggal (néhány ppm) összemérhető lenne.

Mivel (6.29) jobb oldala arányos a leptontömeggel, müonhidrogén esetében a fent számolt járuléka kb. 200-szorosára növekszik. Azonban ebben az esetben sem

mérhető össze a megfelelő kétfoton-cserés elektromágneses folyamattal, mert az éppen ilyen arányban megnövekszik.

A másik modell, amely számítható korrekciót ad a hiperfinom szerkezethez az, amelyben a közbelső vektorbozon-párok és a többi hadron között erős kölcsönhatás van [16]. Ebben a modellben a 6.2. ábrán látható diagrammal kell számolnunk — legáltalánosabb rendben.



6.2. ábra



A folyamat  $G$ -ben elsőrendű és a  $W^\pm$  pár felfogható úgy, mint egy effektív semleges áram. Ezért azt várhatjuk, hogy a Weinberg-modellhez hasonlóan 0,1 ppm nagyságrendű járulékot kapunk a hiperfinom frekvenciához. A konkrét számolást az teszi nehezzé, hogy egy hurokintegrált kell meghatározni a  $W$ -bozon 4-impulzusa szerint. A hadronrészt leíró

$$\int d^4x e^{iqx} \langle p | TJ_\mu^+(x) J_\nu^-(0) | p \rangle \quad (6.30)$$

mátrixelemet elvben meg lehet határozni a rugalmatlan neutrínó—proton szórás adataiból, ezenkívül számítható korlátokat lehetne adni — legalábbis a mélyen rugalmatlan tartományra — a 7. fejezetben leírt módon, ez azonban már túlnyúlik a disszertáció témakörén.

## 7. Pozitivitási egyenlőtlenségek és a Fritsch—Gell-Mann-féle fénykúpalgebra

A disszertáció korábbi fejezeteiben azzal foglalkoztunk, hogy pozitivitási egyenlőtlenségek segítségével megszorítást adjunk a spinfüggő  $e-p$  szórás szerkezeti függvényeire és ezek következményeit vizsgáltuk. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogyan terjeszthető ki a módszer  $e-p$  szórásról egyrészt  $e-n$  szórásra, tehát a nukleon izodublett másik tagjára, másrészt az elektromágneses áramról a nukleonok gyenge áramának mátrixelemeire.

Tekintsük a

$$W_{\mu\nu, \alpha\beta}^{ab, ij} = \int d^4x \langle N_i; p\alpha | [J_\mu^a(x) J_\nu^b(0)] | N_j; p\beta \rangle \quad (7.1)$$

mátrixelemet, ahol  $N_i$  ( $i=1, 2$ ) a kétféle nukleonállapot,  $a, b=0, 1, \dots, 8$  SU(3) indexek,  $\alpha^\mu$  és  $\beta^\nu$  a kovariáns spin vektorai,  $p^\mu$  pedig a nukleon impulzusa.

A mátrixelem kovariáns kifejtése a Lorentz-indexek és spinvektorok szerint

$$\frac{1}{\pi} W_{\mu\nu, \alpha\beta} = \bar{u}(p, \alpha) C_{\mu\nu} u(p, \beta), \quad (7.2)$$

ahol

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} = & \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \left( W_1 + \frac{(pq)^2}{M^2 q^2} W_2 \right) + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho \gamma^\sigma \gamma_5 \cdot d + \\ & + i \hat{q} \gamma_5 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho p^\sigma \cdot g - i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho p^\sigma W_3 + \\ & + M^{-2} q^{-2} \cdot W_2 (p_\mu p_\nu q^2 + M^2 v^2 g_{\mu\nu} - M v [p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu]). \end{aligned} \quad (7.3)$$

A fenti kifejtésben az elhagyott rész  $\gamma_5$ -tel arányos pszeudotenzor részeket tartalmaz, melyek csak a spinfüggő gyenge folyamatokban fordulnak elő. A  $W_1, W_2, W_3, d$  és  $g$  természetesen még izospin és SU(3) indexeket is hordoznak.

A (7.1) mátrixelem értelmezésénél fogva pozitív szemidefinit kifejezés, azaz

$$\sum_{\mu\nu, ab, ij, \alpha\beta} W_{\mu\nu, \alpha\beta}^{ab, ij} c^{\mu, \alpha i} c^{* \nu, \beta b j} \geq 0 \quad (7.4)$$

tetszőleges komplex  $c^\mu$  vektorra. Ha  $W_{\mu\nu}$  kovariáns kifejtését behelyettesítenénk (7.4)-be, akkor a 3. fejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan egyenlőtlenségeket kapnánk



$W_i$ ,  $d$  és  $g$  között. Ezek azonban nem jelentenének hasznos információkat, mert az izospin és  $SU(3)$  indexek miatt nagyon sok új ismeretlen mennyiség fordulna bennük elő. A továbbhaladás útja csak az lehet, hogy valamilyen dinamikai információt viszünk be az elméletbe.

*M. Gell-Mann* és *M. Fritzsche* feltételezte [17], hogy a fizikai áramok kommutátorai a fénykúp közelében ugyanolyan algebrai összefüggéseknek tesznek eleget, mint a szabad kvark-terekből felépülő áramok. Ez annyit jelent, hogy

$$[J_\mu^i(x), J_\nu^j(y)] \cong [J_{5\mu}^i(x) J_{5\nu}^j] \cong \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_\sigma} [\epsilon(z^0) \delta(z^2)] \times$$

$$\times \{if_{ijk}[s_{\mu\nu\varrho\sigma} S_k^{\varrho}(x, y) - i\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} A_k^{5\varrho}(x, y) +$$

és hasonlóan

$$+ d_{ijk}[s_{\mu\nu\varrho\sigma} A_k^{\varrho}(x, y) - i\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} S_k^{5\varrho}(x, y)] \quad (i, j = 0, 1, \dots, 8)$$

$$[J_\mu^i(x), J_{5\nu}^j(y)] \cong [J_{5\mu}^i(x) J_\nu^j(y)] \cong \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_\sigma} [\epsilon(z^0) \delta(z^2)] \times$$

$$\times \{\text{mint fent, de } S \leftrightarrow S^5, A \leftrightarrow A^5\}.$$

A fenti kifejezésben  $z = x - y$ ,  $s_{\mu\nu\varrho\sigma} = \frac{1}{4} \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varrho \gamma_\sigma\}$ , a  $\cong$  jel pedig a fénykúp körüli aszimptotikus egyenlőséget jelenti, vagyis hogy  $z^2$ -ben magasabbrendű tagok elhagyása megengedett.

A bilokális operátorok előreszórási mátrixelemei a következő alakba írhatók:

$$\langle p, \alpha | S_\mu(x, 0) | p, \alpha \rangle = p_\mu \tilde{S}(px) + x_\mu \tilde{S}_1(px) + \dots$$

$$\langle p, \alpha | S_{5\mu}(x, 0) | p, \alpha \rangle = \alpha_\mu M \tilde{S}_d(px) + x_\mu (\alpha x) M^3 \tilde{S}_h(px) +$$

$$+ p_\mu \frac{(\alpha x)}{(px)} M [\tilde{S}_g(px) - \tilde{S}_d(px)] + \dots,$$

ahol az elhagyott tagok eltűnnek a fénykúpon.

Képezve a Fourier transzformáltat azt kapjuk, hogy Bjorken-limeszben  $\left( q^2 \rightarrow \infty, \right.$

$$\left. \zeta = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{1}{\omega} \text{ rögzített} \right)$$

$$\frac{1}{\pi} W_{\mu\nu}^{ij} \rightarrow \frac{s_{\mu\nu\varrho\sigma} p^\varrho q^\sigma}{(pq)} A^{ij}(\zeta) + \frac{M q_\mu q_\nu}{(pq)^2} [C^{ij}(\zeta) - A^{ij}(\zeta)] -$$

$$- i\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \frac{\alpha^\varrho q^\sigma}{(pq)} M D^{ij}(\zeta) - i\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \frac{p^\varrho q^\sigma}{(pq)^2} \frac{M(\alpha q)}{(pq)^2} [G^{ij}(\zeta) - D^{ij}(\zeta)].$$

$$\frac{1}{\pi} W_{5\mu\nu}^{ij} \rightarrow -i \frac{\epsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} p^\varrho q^\sigma}{(pq)} B^{ij}(\zeta) + \frac{s_{\mu\nu\varrho\sigma} \alpha^\varrho q^\sigma}{(pq)} M \cdot H^{ij}(\zeta) +$$

$$+ \frac{s_{\mu\nu\varrho\sigma} p^\varrho q^\sigma}{(pq)^2} (\alpha q) M \cdot (E^{ij}(\zeta) - H^{ij}(\zeta)) + \frac{(\alpha q)}{(pq)^3} M^3 q_\mu q_\nu \cdot (F + 2H - E)^{ij},$$



ahol

$$\begin{aligned}
 A &= if_{ijk} S^k(\zeta) + d_{ijk} A^k(\zeta), \\
 B &= if_{ijk} A^k(\zeta) + d_{ijk} S^k(\zeta), \\
 C - A &= 2i[if_{ijk} S_1^k(\zeta)' + d_{ijk} A_1^k(\zeta)'], \\
 D &= if_{ijk} A_d^k(\zeta) + d_{ijk} S_d^k(\zeta), \\
 E &= if_{ijk} S_g^k(\zeta) + d_{ijk} A_g^k(\zeta), \\
 F &= 2H(\zeta) - E(\zeta) = -2[if_{ijk} S_h^k(\zeta)'' + d_{ijk} A_h^k(\zeta)''], \\
 G &= if_{ijk} A_g^k(\zeta) + d_{ijk} S_g^k(\zeta), \\
 H &= if_{ijk} S_d^k(\zeta) + d_{ijk} A_d^k(\zeta).
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Összehasonlítva (7.3)-t (7.8–9)-cel a következő skálainvariáns viselkedést kapjuk

$$\begin{aligned}
 MW_1 &\rightarrow F_1(\zeta), \\
 vW_2 &\rightarrow F_2(\zeta), \\
 vW_3 &\rightarrow F_3(\zeta), \\
 vd &\rightarrow \alpha(\zeta), \\
 vd + v^2 Mg &\rightarrow \gamma(\zeta).
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

A longitudinális skálafüggvény

$$W_1 + \frac{v^2}{q^2} W_2 \rightarrow 0, \tag{7.12}$$

de

$$v \left( W_1 + \frac{v^2}{q^2} W_2 \right) = vW_2 - vW_L \rightarrow 2\zeta F_1(\zeta) - F_L(\zeta). \tag{7.13}$$

Ez annyit jelent, hogy  $R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T} \xrightarrow{B_j \text{ lim}} \frac{1}{v} F_R(\zeta)$ .

A mérhető mennyiségek és a bilokális operátorok mátrixelemeinek kapcsolata

$$\begin{aligned}
 F_1^{\gamma p} &= \frac{1}{3} (A^e + A^3), \\
 F_1^{\gamma n} &= \frac{1}{3} (A^e - A^3), \\
 F_1^{\nu p} &= 2(A^v + S^3), \\
 F_1^{\nu n} &= 2(A^v - S^3), \\
 F_3^{\nu p, \nu n} &= 2(-S^v \pm A^3),
 \end{aligned} \tag{7.14}$$



ahol

$$\begin{aligned} A^e &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} A^8 + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} A^0, \\ A^v &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} A^8 + \sqrt{\frac{2}{3}} A^0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Hasonlóan a spinfüggő kifejezésekre

$$\begin{aligned} \nu d^{\gamma p, \gamma n} &\rightarrow \alpha^{p, n} = \frac{1}{3} (S_d^e \pm S_d^3), \\ (\nu d + \nu^2 M g)^{\gamma p, \gamma n} &\rightarrow \gamma^{p, n} = \frac{1}{3} (S_g^e \pm S_g^3). \end{aligned} \quad (7.16)$$

A fentiekben a nagyszámú szerkezeti függvényt — legalábbis skálalimeszben — ki tudtuk fejezni a bilokális operátorok mátrixelemeivel, összesen 10 függvénnyel. Most már érdemes felírni a pozitivitási egyenlőtlenségeket és összefüggéseket származtatni ezen függvények között.

Lorentz- és polarizációs indexek miatt  $2 \times 3 = 6$  dimenziós mátrixot kapunk, ugyanis 2 spinállás és 3 lineárisan független négyesvektor jön számításba (a negyedik  $q^\mu$  az árammegmaradás miatt kiesik).

$$\begin{bmatrix} A & G & D & B & E & H \\ G & A & D & E & B & H \\ D & D & C & H & H & F \\ B & E & H & A & G & D \\ E & B & H & G & A & D \\ H & H & F & D & D & C \end{bmatrix} \cong 0. \quad (7.17)$$

A fenti mátrix minden eleme még izospin és SU(3) indexeket hordoz. A sorok és oszlopok megfelelő cserélgetésével és lineáris kombinációk képzésével (7.17) redukálódik 2 db  $2 \times 2$ -es és 2 db  $1 \times 1$ -es mátrixra:

$$\begin{bmatrix} A+G & 2D \\ 2D & 2C \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} B+E & 2H \\ 2H & 2F \end{bmatrix} \cong 0, \quad (7.18)$$

$$(A-G) \pm (B-E) \cong 0. \quad (7.19)$$

Ha nem vagyunk kíváncsiak  $\nu d \rightarrow D$  korlátaira, melyet az úgyis nehezen mérhető  $\nu R \rightarrow C$  adna csak meg, úgy (7.18) szintén szétesik lineáris kifejezésekre:

$$(A+G) \pm (B+E) \cong 0, \quad (7.20)$$

$$C \pm F \cong 0. \quad (7.21)$$

Kihasználva az izospin invarianciát és a Wigner—Eckart-tételt a belső szim-



metria szerint elegendő külön tekinteni az 1 db  $I=3/2$  és 3 db  $I=1/2$  izospinű állapotot:

$$I = 3/2: \quad J^+|p\rangle \quad (7.22)$$

$$I = 1/2: \quad J^0|p\rangle, J^8|p\rangle, J^3|p\rangle + J^+|p\rangle. \quad (7.23)$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy csak izospin, azaz SU(2) invarianciát tételeztünk fel, SU(3) szimmetriáról nem tettünk feltevéseket. Csupán az áramok SU(3) szerinti transzformációs tulajdonságát használjuk, nem pedig azt, hogy az erős kölcsönhatás Hamilton-operátora SU(3) skalár lenne.

A megfelelő izospin-mátrixok:

$$I = 3/2: \quad \langle p|J^-J^+|p\rangle \cong 0. \quad (7.24)$$

$$I = 1/2: \quad \begin{bmatrix} \langle p|3J^3J^3 - J^8J^8|p\rangle & \langle p|J^3J^8|p\rangle & \langle p|J^3J^0|p\rangle \\ \langle p|J^8J^3|p\rangle & \langle p|J^8J^8|p\rangle & \langle p|J^8J^0|p\rangle \\ \langle p|J^0J^3|p\rangle & \langle p|J^0J^8|p\rangle & \langle p|J^0J^0|p\rangle \end{bmatrix} \cong 0. \quad (7.25)$$

Behelyettesítve (7.19–20)-ba, a megfelelő  $f_{ijk}$  és  $d_{ijk}$  csoportállandók felhasználásával és (7.10) figyelembevételével 12 lineáris egyenlőtlenség kapható

$$\begin{aligned} (3A^e - 5A^v) + p(3S^e - 5S^v) + pq(3S_g^e - 5S_g^v) + q(3A_g^e - 5A_g^v) &\cong 0 \\ (A^v - S^3) + p(S^v - A^3) + pq(S_g^v - A_g^3) + q(A_g^v - S_g^3) &\cong 0 \\ (A^v + 3S^3) + p(S^v + 3A^3) + pq(S_g^v + 3A_g^3) + q(A_g^v + 3S_g^3) &\cong 0 \\ p = \pm 1, \quad q = \pm 1. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Ha  $q=0$ -t írunk, úgy 6 spinfüggetlen egyenlőtlenséget kapunk, melyek megegyeznek O. Nachtmann partonmodellbeli egyenlőtlenségeivel [18].

A spinfüggő neutrínó szórásra jellemző mennyiségek kiküszöbölésével

$$\begin{aligned} F_1^{\gamma p + \nu n} &\cong \frac{18}{5} F_1^{\gamma p + \gamma n}; \\ |18F_1^{\gamma p - \gamma n} - F_3^{\nu p + \nu n}| &\leq 4F_1^{\nu n} - 2F_1^{\gamma p}; \\ |6F_1^{\gamma p - \gamma n} + F_3^{\nu p + \nu n}| &\leq 2F_1^{\gamma p}; \\ |4\gamma^p - \gamma^n| &\leq 4F_1^{\gamma p} - F_1^{\gamma n}; \\ |4\gamma^n - \gamma^p| &\leq 4F_1^{\gamma n} - F_1^{\gamma p}; \\ |\gamma^p - \gamma^n| &\leq \frac{1}{6} F_1^{\nu n}; \\ |3\gamma^p - \gamma^n| &\leq \frac{1}{2} F_1^{ep + en} + \frac{5}{36} (2F_1^{\nu p} - F_1^{\nu p} + 2F_3^{\nu p} - F_3^{\nu n}); \\ |3\gamma^n - \gamma^p| &\leq \frac{1}{2} F_1^{ep + en} + \frac{5}{36} (2F_1^{\nu n} - F_1^{\nu p} - 2F_3^{\nu p} + F_3^{\nu n}). \end{aligned} \quad (7.27)$$

adódik, ahol  $F^{a+b} = F^a + F^b$  jelölést alkalmaztuk.



Amennyiben (7.21)-et vizsgáljuk, úgy a  $\nu W_L \rightarrow F_{1L}(\zeta)$  longitudinális skálafüggvényekre

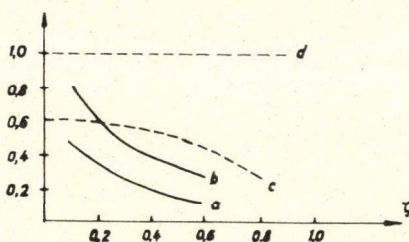
$$\frac{1}{4} F_{1L}^p \equiv F_{1L}^n \equiv 4 F_{1L}^p$$

adódik, amely összeköti a proton és a neutron  $R = \sigma_L / \sigma_T$  hányadosát:

(7.26) első három egyenlőtlensége lehetőséget nyújt arra, hogy neutrínó kísérletekkel ellenőrizzék a fénykúpalgebrát; a további kettő pedig arra, hogy spinfüggő elektronprodukciónal tegyék ugyanezt. Pl. a spinaszimmetria proton–neutron különbségre

$$\frac{1}{2} |A^p - A^n| \equiv \frac{(4F_1^{\gamma p} - F_1^{\gamma n})(4F_1^{\gamma n} - F_1^{\gamma p})}{15F_1^{\gamma n} F_1^{\gamma p}} < 0,6 \quad (7.30)$$

adódik. A 7.1. ábra mutatja a korlát  $\zeta$  függését és látható, hogy a tisztán kinematikai



7.1. ábra.

$\frac{1}{2} |A^p - A^n| < 1$ -nél mindig élesebb feltétel különösen  $\zeta \approx 1$  körül mond sokat.

(7.26) utolsó három sora alsó korlátot adhat a neutrínó folyamatok hatáskeresztmetszetére — miután adataink lesznek a polarizált  $e-p$  szórásban.

Említettük, hogy az egyenlőtlenségek spinfüggetlen része ekvivalens a partonmodellből kapható egyenlőtlenségrendszerrel, ha a partonok impulzuseloszlását szabadon hagyjuk és csak a megfelelő belső kvantum-

számokkal rendelkező pontszerű objektumok tényét fogadjuk el. Megmutatható [19], hogy ez a megfeleltetés spinfüggő esetben is érvényes marad, legalábbis ameddig lineáris (7.19—21) kifejezésekkel dolgozunk. A  $\nu d$ -t és vele együtt  $\nu R$ -t tartalmazó nemlineáris egyenlőtlenségek (ld. a parabolát 3.1. ábrán) a fénykúpalgebrából következnek, másrészt a parton modell — legalábbis az eredeti Bjorken—Paschos-féle értelemben —  $R$ -ről nem állít semmit. Ezért úgy tűnik, hogy amennyiben fenn akarjuk tartani azt az álláspontot, miszerint egy teljesen általános impulzuseloszlású partonmodell minden tekintetben egyenértékű a fénykúpalgebrával, úgy a partonmodellt általánosítani, módosítani kell, mint pl. a nem-perturbatív partonmodell [22].

## 8. Összefoglalás

A disszertációban tárgyaltak röviden a következőkben foglalhatók össze:

a) A hidrogénatom hiperfinom frekvenciáját nagy pontossággal megmérték. Az elméleti számítások bizonytalanságának legnagyobb része a proton ismeretlen szerkezetéből adódik. A protonszerkezeti korrekció egyik felére egzakt alsó és felső korlátot tudtunk adni a spinre átlagolt rugalmatlan  $e-p$  szórás adatainak ismeretében — tisztán kinematikai (pozitivitási) egyenlőtlenségek felhasználásával. A numerikus eredmény

$$-2,8 \text{ ppm} < \delta_2 < 3,5 \text{ ppm}.$$



A korrekció másik tagja csak akkor szorítható korlátok közé, ha további dinamikai feltevésekkel élünk. Az erős kölcsönhatás néhány általánosan elfogadott módszerét (áramalgebra, Regge-kifejtés) felhasználva, de továbbra sem szorítkozva konkrét modellre

$$-13 \text{ ppm} < \delta_1 < 10 \text{ ppm}$$

adódik.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az erős kölcsönhatás járuléka a hiperfinom-felhasadáshoz összességében nem lehet nagyobb, mint  $\approx 13,5$  ppm, illetve kisebb, mint  $-16$  ppm.

b) A gyenge + elektromágneses kölcsönhatás Weinberg típusú modelljében megvizsgáltuk a semleges áram járulékát a hiperfinom-felhasadáshoz és kisebbnek találtuk  $0,1$  ppm-nél. Várható, hogy a gyenge kölcsönhatás más modelljei (pl. páronként erősen kölcsönható  $W$ -bozon elmélet) hasonló nagyságrendű korrekciót adnak és így teljes mértékben figyelmen kívül hagyhatók.

c) Egyenlőtlenségeket származtattunk a Fritzs—Gell-Mann-féle fénykúp-algebrából kiindulva a gyenge és elektromágneses áramok nukleon állapotok közti mátrixelemeire és ezzel összekapcsoltuk a polarizált  $e-p$  és  $e-n$ , illetve  $\nu-p$  és  $\nu-n$  rugalmatlan szórások hatáskeresztmetszeteit. Ezek az összefüggések egyrészt a fénykúpalgebra neutrínókísérletekkel történő ellenőrzésére nyújtanak lehetőséget, másrészt alsó korlátot adnak — polarizált  $e-N$  szórás megmérése után — mélyen rugalmatlan neutrínó—nukleon szórás hatáskeresztmetszetére.

A disszertáció 2—6. fejezetei részét képezik a *dr. Kuti Gyulával* készített közös munkának [22], a 7. fejezet pedig *dr. Niedermayer Ferenc*cel közösen készített munkánkhoz [19] kapcsolódik. Közreműködésükért és állandó segítségükért köszönetet mondok. Köszönettel tartozom továbbá *dr. Kuti Gyulának* mindkét téma felvetéséért és a munka figyelemmel kíséréseért, továbbá *dr. Marx György* egyetemi tanárnak, hogy az ELTE Atomfizikai Tanszékén lehetőséget biztosított és segítséget nyújtott a disszertáció elkészítéséhez.

#### IRODALOM

1. Részletes hivatkozást ld. *S. J. Brodsky, S. D. Drell*, Annual Review of Nuclear Science 20, 147, 1970.
2. *W. Newcomb, E. E. Salpeter*, Phys. Rev. 97, 1146, 1955.
3. *S. J. Brodsky, G. W. Erickson*, Phys. Rev. 148, 26, 1966.
4. *E. E. Salpeter*, Phys. Rev. 87, 328, 1952.
5. *C. K. Iddings*, Phys. Rev. 138B., 446, 1965.
6. *C. K. Iddings, P. M. Platzman*, Phys. Rev. 113, 192, 1959.
7. *L. Gálfi, P. Gnädig, J. Kuti, F. Niedermayer, A. Patkós*, Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae, 31, 85, 1972.
8. *Gnädig Péter*: Szakdolgozat, ELTE Budapest, 1971.
9. *S. D. Drell, A. C. Hearn*, Phys. Rev. Letters 16, 908, 1966.  
*S. B. Gerasimov*, Sov. J. Nuc. Phys. 2, 403, 1966.
10. *E. de Rafael*, Physics Letters 37B, 201, 1971.
11. *H. W. Kendall*: Invited talk in the Proceedings of the 1971 International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Cornell University, Ithaca, August 23—27. 1971.
12. *S. Weinberg*, Phys. Rev. Letters 19, 1264, 1967.
13. *M. Breidenbach, J. Kuti*, Physics Letters 41B, 345, 1972.
14. *S. Weinberg*, MIT Preprint No. 246. 1971. december.
15. *R. E. Marshak, Riazuddin, C. P. Ryan*: Theory of Weak Interactions in Particle Physics. Wiley-Interscience, New-York, 1969.
16. *M. Fritzsche—M. Gell-Mann*, Cal. Tech. Preprint CALT 68—297.



18. O. Nachtmann, Orsay, preprint LPTHE 71/29.
19. P. Gnädig, F. Niedermayer, ITP-Budapest Report 305, 1972.
20. J. D. Bjorken, E. A. Paschos, SLAC-PUB.-572.
21. P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne, R. D. Short, DAMTP 70/32. University of Cambridge.
22. P. Gnädig, J. Kuti, Physics Letters B. 1972.

## Függelék

### Jelölések, definíciók

■ Az alábbiakban összefoglaljuk a disszertációban szereplő jelöléseket, definíciókat és normálási konvenciókat.

Négyesvektorok:  $p^\mu = (p^0; \mathbf{p})$ .

Metrikus tenzor:  $-g^{00} = g^{ii} = -1$ .

Skalárszorzat:  $ab = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

Állapotok kovariáns normálásúak:  $\langle p | p' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ .

Spinornormálás:  $\bar{u}u = 2M$ .

$m$  = elektrontömeg,  $M$  = protontömeg.

Dirac-mátrixok:  $\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ ,  $\{\gamma_\mu \gamma_5\} = 0$ ,

konkrét reprezentációjuk:  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ ,  $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ ,

Pauli-mátrixok:  $\sigma$ ;  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Teljesen antiszimmetrikus tenzor előjelkonvenciója:

$$\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = +1.$$

Rugalmatlan  $e-p$  szórás hadronrészének kovariáns kifejtése:

$$W_{\mu\nu}^\alpha(p, q) = \int d^4x e^{iqx} \langle p\alpha | J_\mu(x) J_\nu(0) | p\alpha \rangle = 4M\pi W_1 \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \\ + \frac{4\pi}{M} W_2 \left( p_\mu - \frac{Mv}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{Mv}{q^2} q_\nu \right) + id \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho \alpha^\sigma + ig (\alpha q) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho p^\sigma,$$

ahol

$$Mv = pq, \quad q^2 = -Q^2 < 0.$$

$\alpha^\mu$  = kovariáns spin, a nyugalmi rendszerben  $\alpha^\mu = (0, \boldsymbol{\alpha})$ ,

$\boldsymbol{\alpha}$  a polarizáció irányába mutató egységvektor.

Rugalmas  $e-p$  szórás kovariáns kifejtése:

$$\langle p'\alpha' | J_\mu(0) | p\alpha \rangle = \frac{1}{2M} \bar{u}(p'\alpha') \Gamma_\mu u(p\alpha),$$

ahol

$$\Gamma_\mu = F_1(q^2) \gamma_\mu - \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} \kappa F_2(q^2), \quad q_\mu = p'_\mu - p_\mu, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu \gamma_\nu], \\ F_1(0) = F_2(0) = 1.$$

A proton anomális mágneses momentuma:

$$\kappa = \mu - 1 = 1,79.$$



```

LN 0001      PROGRAM FOE
LN 0002      COMMON R,PM
LN 0003      10 (FORMAT (3F7.2,2I7)
LN 0004      12 READ 10,Q2N,OMN,R,M,N
LN 0005      13 FORMAT (//)
LN 0006      17 FORMAT (2E20.2)
LN 0007      18 FORMAT (4E20.2)
LN 0008      19 FORMAT (2I10,3F15.2)
LN 0009      IF (N-1)20,20,21
LN 0010      21 PM=.938
LN 0011      PRINT 13
LN 0012      PRINT 19,M,N,R,Q2N,OMN
LN 0013      EM=FLOAT (M)
LN 0014      EN=FLOAT (N)
LN 0015      AA=0.
LN 0016      BB=0.
LN 0017      CC=0.
LN 0018      AA1=0.
LN 0019      AA2=0.
LN 0020      BB1=0.
LN 0021      BB2=0.
LN 0022      CC1=0.
LN 0023      CC2=0.
LN 0024      DD1=0.
LN 0025      DD=0.
LN 0026      AA3=0.
LN 0027      AA4=0.
LN 0028      BB3=0.
LN 0029      BB4=0.
LN 0030      CC3=0.
LN 0031      CC4=0.
LN 0032      D1=1./PM/PM/EM
LN 0033      X = -D1/2.
LN 0034      97 X=X+D1
LN 0035      A=0.
LN 0036      B=0.
LN 0037      C=0
LN 0038      A1=0.
LN 0039      A2=0.
LN 0040      BA=0.
LN 0041      BC=0.
LN 0042      C1=0.
LN 0043      C2=0.
LN 0044      Q2=1./X-PM*PM
LN 0045      PZ=OMN*Q2N/2./PM
LN 0046      PN=OMN*Q2/PM/2.
LN 0047      A3=0.
LN 0048      A4=0.
LN 0049      B3=0.
LN 0050      B4=0.
LN 0051      C3=0.
LN 0052      C4=0.
LN 0053      CALL ADAT (W1N,W2N,RRN,PN,Q2)
LN 0054      TN=PN*PN/Q2
LN 0055      HN=SQRT (ABS(RRN)/TN)
LN 0056      S=.149+Q2/2./PM
LN 0057      D2=1./EN
LN 0058      Y = -D2/2.
LN 0059      95 Y=Y+D2
LN 0060      PNU=S/Y

```



```

LN 0061 CALL ADAT (W1,W2,RR,PNU,Q2)
LN 0062 TZ=PNU * PNU/Q2N
LN 0063 TZZ=PZ * PZ/Q2N
LN 0064 PMA=PNU + (Q2N-Q2)/2./PM
LN 0065 TM=PMA * PMA/Q2N
LN 0066 CALL ADAT (W10,W20,R0,PNU-Q2/2./PM,.001)
LN 0067 CALL ADAT (W1ZZ,W2TT,RRZZ,PZ,Q2N)
LN 0068 RRZ=ABS(RRZ)
LN 0069 RRZZ=ABS(RRZZ)
LN 0070 T=PNU/Q2 * PNU
LN 0071 G=2. * SQRT(T+T * T)
LN 0072 B1=-3. * T+2. * T * T+(2.-T) * G
LN 0073 B2=1.+2. * T-G
LN 0074 RR=SQRT(RR * RR)
LN 0075 H=SQRT(RR * T)
LN 0076 IF (H-4.) 90,90,91
LN 0077 91 Z=1.-H
LN 0078 GO TO 92
LN 0079 90 Z=-1.-H * H/8.
LN 0080 92 U=-1.-H * H/8.
LN 0081 V=W1 * B2 * T/Y/(T * 1.)/PNU * PM * PM
LN 0082 A=A+V * (1.+H)
LN 0083 B=B+V * Z
LN 0084 C=C+V * U
LN 0085 H1=B1+3. * B2
LN 0086 H2=B1-3. * B2 * 1
LN 0087 H3=SQRT (ABS (RR)/T * H2/H1)
LN 0088 IF (H3=4.)103,103,104
LN 0089 103 Z1=-1.-H3 * H3/8.
LN 0090 GO TO 105
LN 0091 104 Z1=1.-H3
LN 0092 105 Z2=-1.-H3 * H3/8.
LN 0093 Z3=B1 * (1.+SQRT (ABS (RR)/T))+3. * B2 * (1.-H)
LN 0094 V1=W1 * T/(T+1.)Y/PNU * 4. * PM * PM
LN 0095 IF (PNU-PN) 106,106,107
LN 0096 106 A1=A1+V1 * Z3
LN 0097 BA=BA+V1 * Z1 * H1
LN 0098 C1=C1+V1 * Z2 * H1
LN 0099 107 CONTINUE
LN 0100 IF (HN-4.) 110,110,111
LN 0101 110 Z8=-1.-HN * HN/8.
LN 0102 GO TO 112
LN 0103 111 Z8=1.-HN
LN 0104 112 Z7=-1.-HN * HN/8.
LN 0105 Z6=1.+HN
LN 0106 IF (PNU-PN) 113,113,114
LN 0107 114 A2=A2+V1 * 3. * B2 * (1.+H)+B1 * 4. * PM * PM * TN/(TN+1.) *
      * (1.+HN) * W1N * PNU/PN *
LN 0108 1PN/PNU/Y/PNU
LN 0109 2 * (ALOG (TN))/(ALOG(T)) * * 2
LN 0110 V2=4. * PM * PM * W1N * TN/(TN+1) * B1/Y/PNU * (ALOG(TN)/
      ALOG(T)) * * 2
LN 0111 BC=BC+V2 * Z8+Z * V * 12.
LN 0112 C2=C2+V2 * Z7+U * V * 12.
LN 0113 113 CONTINUE
LN 0114 CALL ADAT (W1Z,W2Z,RRZ,PMA,Q2N)
LN 0115 CALL ADAT (W100,W20,R0,PZ,.001)
LN 0116 IF (PNU-PZ) 130,130,131
LN 0117 130 V3=W1Z * TM/(TM+1.)Y/PNU * PM * PM/3. * B1
LN 0118 V4=W10 * PM * PM/3./Y/PNU * B1

```



```

LN 0119      A3=A3+V3*(1.+SQRT(RRZ)/TM))+V4
LN 0120      B3=B3-V3*(1.+RRZ/8./TM)-V4
LN 0121      GO TO 132
LN 0122 131 V5=WIZZ*TZZ/(1.+TZZ)/Y/PNU*PM*PM/3.*B1*(ALOG(TZZ)/
                                ALOG(TZ))*2
LN 0123      V6=W100*PM*PM/3./Y/PNU*B1*(ALOG(TZZ)/ALOG(TZ))*2
LN 0124      A4=A4+V5*(1.+SQRT(RRZZ/TZZ))+V6
LN 0125      B4=B4-V5*(1.+RRZZ/8./TZZ)-V6
LN 0126 132 C3=C3+V*(1.+H)
LN 0127      C4=C4+V*Z
LN 0128      IF (Y+D2-1.) 95,95,96
LN 0129 96 AA=AA+A/X/X/Q2
LN 0130      BB=BB+B/X/X/Q2
LN 0131      CC=CC+C/X/X/Q2
LN 0132      PO=1.79/(1.+Q2/4./PM/PM)/(1.+Q2/0.71))*2
LN 0133      D3=(PO*PO-1.79*1.79)*2.25*D1*.00051/6.28/137/2.97/PM
LN 0134      IF (Q2-Q2N) 200,200,201
LN 0135 200 DD1=DD1+D3/X/X/Q2
LN 0136 201 CONTINUE
LN 0137      IF (Q2-Q2N) 100,100,101
LN 0138 100 GO TO 102
LN 0139 101 AA1=AA1+A1/X/X/Q2
LN 0140      BB1=BB1+BA/X/X/Q2
LN 0141      CC1=CC1+C1/X/X/Q2
LN 0142      AA2=AA2+A2/X/X/Q2
LN 0143      BB2=BB2+BC/X/X/Q2
LN 0144      CC2=CC2+C2/X/X/Q2
LN 0145      D=PO*PO*2.25*D1*.00051/6.28/137/2.79/PM
LN 0146      DD=DD+D/X/X/Q2
LN 0147 102 CONTINUE
LN 0148      IF (Q2-Q2N) 140,140,141
LN 0149 140 CONTINUE
LN 0150      SZ=6./PM*.00051/6.28/137/2.79*D1*D2*2.
LN 0151      AA3=AA3+A3/X/X/Q2N*SZ
LN 0152      BB3=BB3+B3/X/X/Q2N*SZ
LN 0153      AA4=AA4+A4/X/X/Q2N*SZ
LN 0154      BB4=BB4+B4/X/X/Q2N*SZ
LN 0155      CC3=CC3+C3/X/X/Q2*SZ
LN 0156      CC4=CC4+C4/X/X/Q2*SZ
LN 0157 141 CONTINUE
LN 0158      IF (X+D1-1./PM/PM) 97,98,98
LN 0159 98 CONTINUE
LN 0160      SZ=6./PM*.00051/6.28/137/2.79*D1*D2*2.
LN 0161      AA=SZ*AA
LN 0162      BB=SZ*BB
LN 0163      CC=SZ*CC
LN 0164      AA1=SZ/12.*AA1
LN 0165      AA2=SZ/12.*AA2
LN 0166      BB1=SZ/12.*BB1
LN 0167      BB2=SZ/12.*BB2
LN 0168      CC1=SZ/12.*CC1
LN 0169      CC2=SZ/12.*CC2
LN 0170      AA5=AA1+AA2+AA3+AA4+DD1+DD+CC3
LN 0171      BB5=BB1+BB2+BB3+BB4+DD1+DD+CC4
LN 0172      PRINT 17,AA,BB
LN 0173      PRINT 17,CC3,CC4
LN 0174      PRINT 17,AA1,BB1
LN 0175      PRINT 17,AA2,BB2
LN 0176      PRINT 17,AA3,BB3
LN 0177      PRINT 18,AA4,BB4,DD1,DD

```



```

LN 0178      PRINT 17,AA5,BB5
LN 0179      GO TO 12
LN 0180      20 STOP
LN 0181      END

LN 0001      FUNCTION F (OM,Q2)
LN 0002      DIMENSION GA (4),AL(4),BETA (3),EM(4),G(4),QST(4),QNST(4),V(4)
LN 0003      1,VN(4),GR(4),BW(4),SKW2(6)
LN 0004      R=4.05
LN 0005      AL (1)=.7004
LN 0006      AL (2)=.3996
LN 0007      AL (3)=.3155
LN 0008      AL (4)=.0690
LN 0009      BETA (1)= -.3282
LN 0010      BETA (2)=.5369
LN 0011      BETA (3)=.7419
LN 0012      EM (1)=1.226
LN 0013      EM (2)=1.508
LN 0014      EM (3)=1.705
LN 0015      EM (4)=1.920
LN 0016      GA (1)=.115
LN 0017      GA (2)=.080
LN 0018      GA (3)=.085
LN 0019      GA (4)=.220
LN 0020      PM= .93828
LN 0021      WT=1.077
LN 0022      OMV=OM
LN 0023      W=SQRT (Q2*(OMV-1.))
LN 0024      A=0.
LN 0025      DO 8 K=1,4
LN 0026      IF (W-EM (K))205,206,206
LN 0027      205 G (K)=(W-PM)*(W*W-PM*PM)*(1.+PM/W)/(EM(K)-PM)/(EM(K)*
LN 0028      11.+PM/EM(K))
LN 0029      GO TO 207
LN 0030      206 G (K)=1.
LN 0031      207 CONTINUE
LN 0032      QST (K)=SQRT(Q2+((W*W-PM*PM-Q2)**2)/4./EM(K)**2)
LN 0033      QNST (K)=SQRT(Q2+((EM(K)*EM(K)-PM*PM-Q2)**2)/4./
LN 0034      V (K)=(QST (K)*R)**2/(1.+(QST (K)*R)**2)
LN 0035      VN (K)=(QNST (K)*R)**2/(1.+(QNST (K)*R)**2)
LN 0036      GR (K)=GA (K)*V (K)/VN (K)*QST (K)/(QNST (K)
LN 0037      BW (K)=G (K)*(QNST (K)/QST (K))**3*GR(K)*GR(K)*EM(K)*
LN 0038      1*EM(K)**2+GR(K)*GR(K)*EM(K)*EM(K))
LN 0039      A=A+AL(K)*BW(K)
LN 0040      8 CONTINUE
LN 0041      DO 4 K=1,3
LN 0042      A=A-BETA(K)/(1.+W-1.077)**K
LN 0043      4 CONTINUE
LN 0044      C3=.6752
LN 0045      C4=1.81
LN 0046      C5=-2.278
LN 0047      X1=1.-1./OMV
LN 0048      F2=X1**3*(C3+C4*X1+C5*X1*X1)
LN 0049      F=F2*(A+1.)
LN 0050      RETURN
LN 0051      END

```



```

LN 0001 SUBROUTINE FR(OM,Q2,W1,W2,RR)
LN 0002 COMMON R,PM
LN 0003 C1=.24
LN 0004 C2=.36
LN 0005 Q21=.26
LN 0006 F=C1*Q2/(Q21+Q2)+C2*SQRT(Q2/OM/(Q21+Q2))
LN 0007 PNU=OM*Q2/PM/2.
LN 0008 W2=F/PNU
LN 0009 D1=C1/(1.+R)
LN 0010 Q22=D1*Q21/C1
LN 0011 D2=C2*SQRT(Q22/Q21)
LN 0012 W1=(D1*Q2*OM/(Q22+Q2)+D2*SQRT(OM*Q2/(Q22+Q2)))/PM/2.
LN 0013 RR=W2*(1.+PNU*PNU/Q2)/W1-1.
LN 0014 RETURN
LN 0015 END

```

```

LN 0001 SUBROUTINE ADAT (W1,W2,RR,PNU,Q2)
LN 0002 COMMON R,PM
LN 0003 OMN=8.
LN 0004 Q2N=1.
LN 0005 WN=PM*PM+2.*PM*PNU-Q2
LN 0006 W=SQRT(WN)
LN 0007 OM=2.*PM*PNU/Q2
LN 0008 OMV=OM+PM*PM/Q2
LN 0009 OMVN=OMN+PM*PM/Q2N
LN 0010 IF (Q2-Q2N) 10,10,11
LN 0011 11 IF (OMV-OMVN) 1,1,2
LN 0012 10 IF (W-2.) 4,4,12
LN 0013 12 IF(OM-OMN) 3,3,2
LN 0014 1 W2=F(OMV,Q2)/PNU
LN 0016 W1=W2*(1.+PNU*PNU/Q2)/(RR+1.)
LN 0015 RR=R
LN 0017 GO TO 77
LN 0018 2 CALL FR(OM,Q2,W1,W2,RR)
LN 0019 W1=W2*(1.+PNU*PNU/Q2)/(RR+1.)
LN 0020 GO TO 77
LN 0021 3 W2F=F(WN/Q2N*1,Q2N)/(WN-PM*PM+Q2N)*2.*PM
LN 0022 Q2A=(WN-PM*PM)/(OMN-1.)
LN 0023 CALL FR(OMN,Q2A,W1,W2A,RA)
LN 0024 W2=W2A+(W2F-W2A)*(Q2-Q2A)/(Q2N-Q2A)
LN 0025 RR=RA+(R-RA)*(Q2-Q2A)/(Q2N-Q2A)
LN 0026 W1=W2*(1.+PNU*PNU/Q2)/(RR+1.)
LN 0027 GO TO 77
LN 0028 4 RR=R*Q2/Q2N
LN 0029 W2F=F(WN/Q2N+1.0,Q2N)/(WN-PM*PM+Q2N)*2.*PM
LN 0030 W2=W2F*Q2/Q2N
LN 0031 W1=W2*(1.+PNU*PNU/Q2)/(RR+1.)
LN 0032 77 CONTINUE
LN 0033 RETURN
LN 0034 END

```



# KÖNYVISMERTETÉS

E. Zwicker—E. Terhardt (Editors): *Facts and Models in Hearing (Communication and Cybernetics 8)*. Springer, Berlin 1974, XI+360 sokszorosított oldal, ára 39 DM

Az ismertetésre kerülő könyv több szempontból is nevezetesség. A hasonló című, Tutzingban 1976. április 22—24. között tartott szimpozion anyagát tartalmazza és már a nyáron kereskedelmi forgalomba került. A sokszorosítási technika az oldalankinti 10 pf eladási árat tette lehetővé. Az egy évvel előbb megjelent hasonló témájú nyomtatott kiadványok ugyanennél a Kiadónál 18 pf/oldal áron kerültek piacra. Végül egy érdekes biofizikai témában, a hallásmechanizmus kutatásában elért kiemelkedően újszerű, szinte izgalmas új eredményeket tárja a világ elé.

A szimpozion 35 résztvevővel, a legfrissebb eredmények ismertetésével és élénk megvitatásával zajlott le. A világ több helyén, elsősorban az Egyesült Államokban, Hollandiában és a Német Szövetségi Köztársaságban (angol, francia és svéd résztvevők is voltak) párhuzamosan folyó kutatásokról adtak számot. A szimpozion módszere az volt, hogy az előre elkészített előadásszövegeket körözték a meghívott résztvevők között, így a hozzászólások tárgyszerűek és átgondoltak voltak. A kötetben azonban a szerkesztők ezek között is szelektáltak, miáltal a szöveggyűjtemény tudományos értéke tovább növekedett.

A könyv öt témakörben 33 cikket tartalmaz. A témakörök a következők:

- I. A belső fül szerkezete és neurobiológiája
- II. A csiga mechanizmusa
- III. A hallás frekvencia-elemzése
- IV. A hallás ideőlemzése
- V. Nemlineáris hatások

A hasonló vagy közel hasonló témájú cikkek különböző szempontok szerint vannak feldolgozva, úgy hogy ugyanannak a jelenségszoportnak több oldalát is megvilágítják. A közölt eredmények bámolatos kísérleti technikai haladásról tanúskodnak. Békésy sokszor megcsodált percíz mérései, amelyekre egyébként sűrűn — és majdnem mindig pozitívan — hivatkoznak, sokszorosán túlhaladtak. Az alaphártya elmozdulását és mozgási sebességét optikai módszerek helyett Mössbauer technikával (gamma sugárzás Doppler eltolódásából) vagy lézer megvilágítással vizsgálják. Ezekkel a módszerekkel többek közt 0,2 mm/s sebességek mérhetők és a kis intenzitású hangjelek nemlineáris hatásai is vizsgálhatók. Másrészt, amióta Goldstein és Kiang (1968) a hallóideg kötegből egyetlen szálát izolálni tudott, számos elektrofiziológiai probléma tisztázódott. Ezek segítségével új modellek keletkeztek a belső fül idegvégkészülékének indító mechanizmusára. Új technikájú elektronmikroszkóp felvételekkel számos anatómiai ( $10^{-8}$  m nagyságrendű) finomszerkezeti probléma új megvilágításba került stb. Mennyiségileg is megváltoztak a belső fül adatai (beidegzési sűrűség, keresztkapcsolatok száma, különféle típusú ganglion sejtek száma stb). Nagy kár, hogy Békésy már nem lehet versenyben ezekkel a ragyogó eredményekkel, amelyeknek nemcsak elindítója volt, hanem sokáig vezető egyénisége is.

A dolgozatok korszerűsége abban is megmutatkozik, hogy alig van idézet Békésy 1960-ban kiadott gyűjteményes munkája előtti korból, és hogy az 1967 és 1974 között hivatkozott cikkek száma az összeshez (460) képest 73%. Ennek a valóban korszerű és sok érdekes eredményt tartalmazó könyvnek nagy olvasósikert jósolhatunk.

Tarnóczy Tamás



# MAGASABB RENDŰ ÉS ATOMI EFFEKTUSOK ATOMMAGOK BOMLÁSÁBAN ÉS INTERDISZCIPLINÁRIS VONATKOZÁSAIK\*

BERÉNYI DÉNES  
MTA Atomki, Debrecen

## 1. A határterületi kutatások előtérbenyomulása

Ma már közhelynek számít, hogy korunkban a különböző tudományágak közötti merev határok elmosódnak. Nemcsak pl. a kémia és fizika „klasszikus” definíciói vesztik értelmüket, de még kevésbé lehet sok esetben egy adott jelenséget a magfizika, atomfizika, vagy molekulafizika, vagy akár a szilárdtest fizika kialakult kategóriáiba beszorítani. A természet jelenségeinek modern kutatása során egyre világosabbá válik, hogy a kémia, fizika, biológia számos ponton érintkeznek, és a valódi jelenségről torz képet kapunk akkor, ha ezt figyelmen kívül hagyjuk.

Saját és a körülöttem kialakult tudományos kollektíva azon eredményeit — tehát távolról se minden eredményét — szeretném itt bemutatni — ezek közé tartoznak különben legjelentősebb eredményeink is —, amelyek valamilyen formában interdiszciplináris jelleget hordoznak. Konkrétan két jelenséggörőről lesz szó. Az egyik a radioaktív bomlásokban fellépő belső fékezési sugárzás (BFS) folyamata, a másik a mag-atomi effektusokkal kapcsolatos kutatási irány egészen a kifejezetten atomfizikai eredményekig és kémiai jelentőségű mérésekig.

## 2. Eredmények a belső fékezési sugárzás kutatásában

2.1. *A belső fékezési sugárzás jelensége.* A radioaktív béta-bomlást a gyenge kölcsönhatások hozzák létre. A béta-bomlási folyamatban folytonos energiaeloszlású elektronok (pozitronok) és antineutrínók (neutrínók) lépnek ki, illetve az elektronbefogási folyamatban monoenergetikus neutrínók. Ha a bomlás a maradék mag gerjesztett állapotaira vezet, akkor monoenergetikus gamma-sugarak is fellépnek, az elektronbefogást pedig ettől függetlenül, mint szekunder folyamat, karakterisztikus röntgen-sugárzás kibocsátása kíséri.

Tekintve azonban, hogy az atommagban elektromos töltések vannak, a béta-bomlási folyamat létrejötte alatt mindenkor elektromágneses kölcsönhatás is van jelen. A két alapvető kölcsönhatás: a béta-bomlást létrehozó gyenge és a most említett elektromágneses kölcsönhatás egymásrahatása egy folytonos energiaeloszlású elektromágneses sugárzás, mint a béta-bomlást kísérő jelenség, létrejöttéhez vezet,

\* Székfoglaló előadás a Magyar Tudományos Akadémián 1974. február 14-én.  
Érkezett 1974. febr. 16.



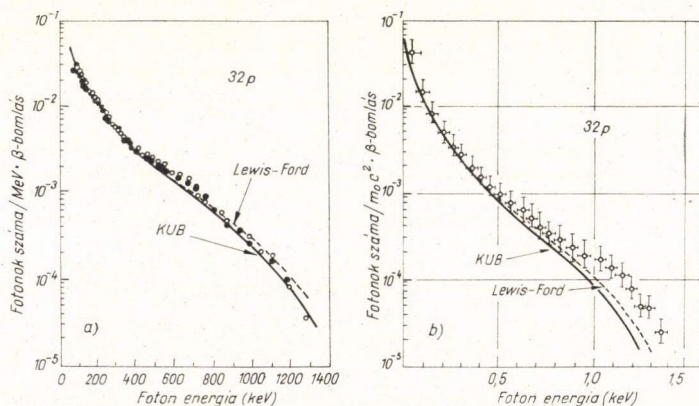
ez a belső fékezési sugárzás. A folyamat mátrix eleme szummázástól eltekintve a következő:

$$H = \frac{\langle 2|H_\gamma|m\rangle \langle m|H|\beta 1\rangle}{E_1 - E_m},$$

ahol 1 a kiinduló, 2 a végső, az  $m$  pedig a közbenső állapotot jelöli,  $H_\gamma$  viszont az elektromágneses és  $H_\beta$  a gyenge kölcsönhatás operátora. A jelenség tanulmányozásának éppen az ad különös érdekességet és jelentőséget, hogy — mint már említettük — két alapvető kölcsönhatás egymáshatását tanulmányozhatjuk egy alacsony energiájú magbomlási folyamatban.

Egyébként legújabbban — a magadatok gyakorlati alkalmazásával foglalkozó párizsi konferencián 1973-ban — orvosi és biológiai szempontból is felmerült a belső fékezési sugárzás fontossága. A BFS tiszta béta-bomlásokban is mindig jelenlevő folytonos elektromágneses sugárzás, ehhez járul az elektronok abszorpciójánál keletkező külső fékezési sugárzás. Relatív intenzitásának, spektrális eloszlásának ismerete szükséges mind a biológiai védelem megtervezése, mind a leadott dózis számítása szempontjából. A kérdésnek környezetvédelmi vonatkozásai is vannak, tekintve a nukleáris reaktorok működése során a légkörbe kerülő tiszta béta-bomlások radioaktív hulladékokat. Így pl. a légkörben levő Kr-85 esetében a genetikus dózis 20%-a fékezési sugárzástól származik (L. T. Dillman, W. S. Snyder és M. R. Ford, Symp. on Nucl. Data in Sci. and Techn., Paris, 1973. SM-170 43).

2.2. A BFS-ra vonatkozó eredményeink. A hatvanas évek elején és közepén a BFS jelensége több szempontból is tisztázatlannak volt tekinthető. Ami a béta-bomlást kísérő belső fékezési sugárzást illeti, számos elméleti számítás igyekezett pl. a kísérleti spektrális eloszlás leírására, azonban maguk a kísérleti spektrumok egymáshoz képest is jelentős eltérést, sőt ellentmondást mutattak, még a legtöbbet vizsgált és viszonylag legkönnyebben vizsgálható  $^{32}\text{P}$  esetében is. Az 1. ábra mutatja



1. ábra. A  $^{32}\text{P}$  BFS-ára vonatkozólag a mi vizsgálatainkat közvetlenül megelőzően közzétett két kísérleti spektrális eloszlás, a) K. Narasima Murty, and S. Inanomanda, Nuovo Ci., 46 B 1966. p. 217 b., W. Kreische, W. Lampert und G. Loos, Nucl. Phys. A107 (1968) 601.



# 1. TÁBLÁZAT

Az ATOMKI-ben vizsgált belső fékezési sugárzási folyamatok

Bomló mag	Bomlási típus	$\Delta I, \Delta \pi$	log ft	$E_0$ KeV	Az elvégzett vizsgálat típusa
$^{11}\text{C}$	$\beta^+$	0, nem	3,6	968	Differenciális spektrális eloszlás, absz. mérés
$^{32}\text{P}$	$\beta^-$	1, nem	7,9	1707	Integrális spektrális eloszlás, rel. mérés
$^{35}\text{S}^*$	$\beta^-$	0, nem	5,0	168	Integrális spektrális eloszlás, absz. mérés
$^{36}\text{Cl}$	$\varepsilon$	2, nem	13,5	1150	Rel. spektrum alak vizsgálat
$^{54}\text{Mn}$	$\varepsilon$	1, nem	6,2	528	Absz. intenzitás meghatározás
$^{55}\text{Fe}$	$\varepsilon$	1, nem	6,0	231	Rel. spektrum alak vizsgálat
$^{59}\text{Ni}^{**}$	$\varepsilon$	2, nem	11,9	1062	Rel. spektrum alak vizsgálat
$^{143}\text{Pr}$	$\beta^-$	1, igen	7,6	933	Differenciális spektrális eloszlás absz. mérés
$^{204}\text{Tl}$	$\beta^-$	2, igen	9,7	760	Differenciális spektrális eloszlás, absz. mérés

\* Mérések folyamatban

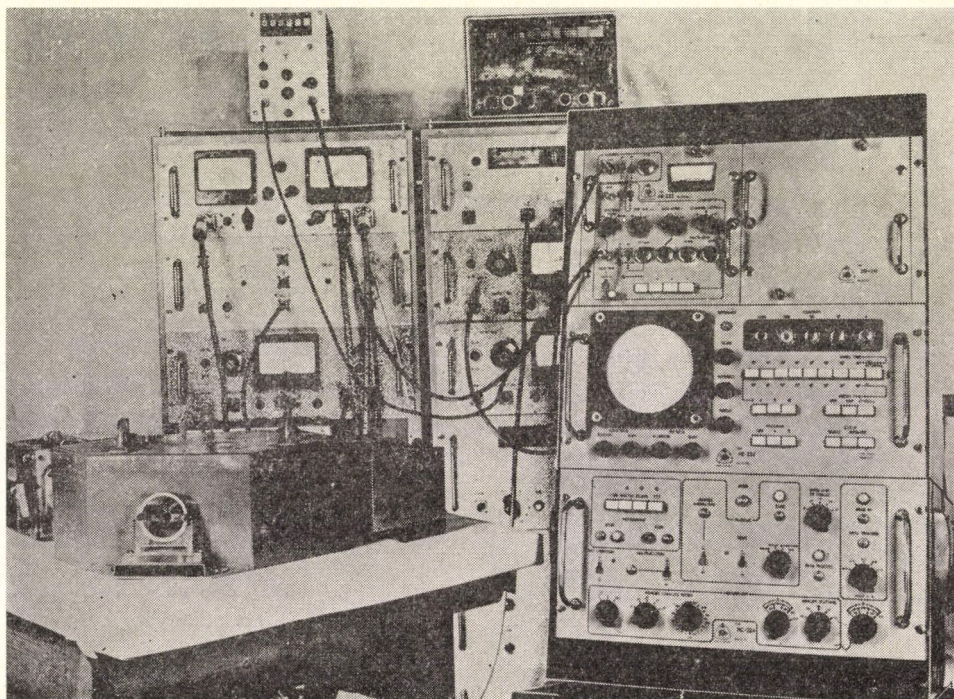
\*\* Kiértékelése folyamatban



a méréseinket közvetlenül megelőzően publikált két kísérleti spektrális eloszlást. Amint látjuk, a két kísérleti spektrum más-más tartományban mutat eltérést az elméleti görbékhez képest, egymással ellentmondásban. A P-32 belső fékezési sugárzásával kapcsolatos eredményeinkre a későbbiekben még visszatérünk.

Ebben a pontban egy táblázatban (1. táblázat) szeretnénk áttekinteni és bemutatni mindazokat a meglehetősen kiterjedt vizsgálatokat, amelyeket a belső fékezési sugárzásra vonatkozólag végeztünk, és amelyek lényegesen hozzájárultak a jelenségkörre vonatkozó ismeretek gyarapításához és a problematikus kérdések tisztázásához ezen a területen.

Anélkül, hogy itt részletekbe mehetnénk, a táblázat egészében — gondolom — jól demonstrálja annak a munkának a volumenét, az elvégzett vizsgálatok jellegét, amelyet ezen a területen végeztünk. A kutatásokban egyébként számos munkatárs részt vett, köztük diplomamunkás hallgatók, vendégkutatók is. A vizsgálatok egy részének sikeres elvégzéséhez más intézetek kutatóit is bevontuk, így pl. a Mn-54 mérésekben közreműködött *B. Myslek* a Varsó—Swierk-i Atommag Kutató Intézet munkatársa is. Az e témakörben megjelent közleményeink száma közel 30, nagyrészt idegennyelvűek. A számos hivatkozás közül nem egy határozottan rámutat kutatásaink úttörő szerepére a jelenségkör problémáinak megoldása szempontjából (pl. *P. Lipnik et al.*, Nucl. Phys. 59. 1964. p. 504; *B. A. Zon és L. P. Rapoport*, Jádernájá fiz. 7 1968. p. 528; *J. Zylicz*, Proc. Conf. Electron Cap., 1968. p. 123;



2. ábra. Koincidencia elrendezés a pozitív béta-bomlást követő belső fékezési sugárzás vizsgálatára.

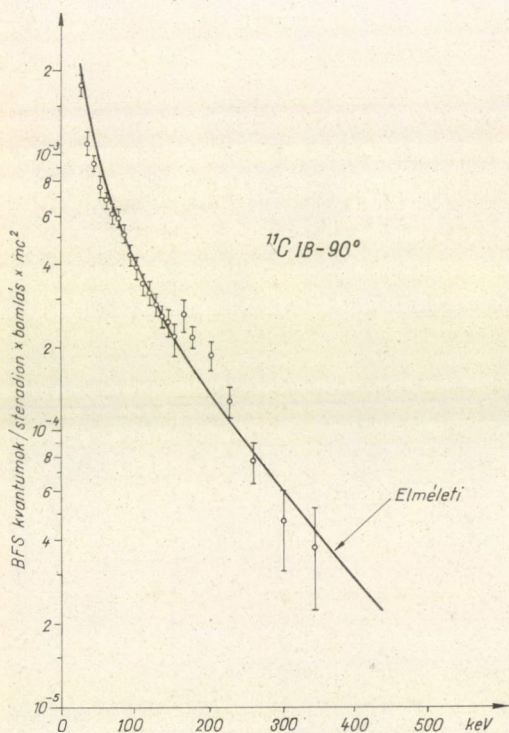


H. Schopper, Proc. Conf. Electron Capture, 1968. p. 488; M. S. Powar and M. Singh, J. Phys. A 5 1972. p. 460.).

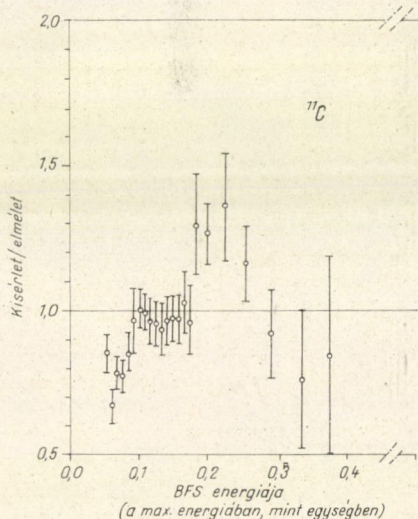
2.3. *Néhány kiemelkedő eredmény.* Az 1. táblázatban felsorolt eredmények közül a következőkben néhány kiemelkedőt egy kissé részletesebben szeretnénk bemutatni, jelentőségüket kidomborítani, bár magától értetődően a kutatás részleteibe itt nem bocsátkozhatunk.

2.3.1. BFS a  $^{11}\text{C}$  bomlásában. A belső fékezésű sugárzási folyamatra vonatkozó ismereteinkben sokáig fehér foltot jelentett, hogy a pozitív béta-bomlásban a pozitron szétsugárzás zavaró jelenléte miatt nem sikerült a belső fékezési sugárzást kimutatni és megvizsgálni. Ez különben azért is érdekesnek látszott, hogy a jelenséget leíró alapvető elmélet szempontjából mit jelent a negatív elektronok pozitívakra történő kicserélése.

A rövid életű (21 perc)  $^{11}\text{C}$  izotópot az ATOMKI kaszkád generátorán állítottuk elő az ott dolgozó kollégák segítségével és speciális koincidencia elrendezést alkalmaztunk (fényképét lásd a 2. ábrán). A spektrális eloszlásra vonatkozóan kapott kísérleti értékek összehasonlítását az elméleti görbékkel 3. és 4. ábránk mutatja. Az egyezés elég jó, bár jelentkezett egy kisebb határozottan hibahatáron kívüli eltérés is, amit eddig se kísérletileg, se elméletileg nem sikerült értelmezni.

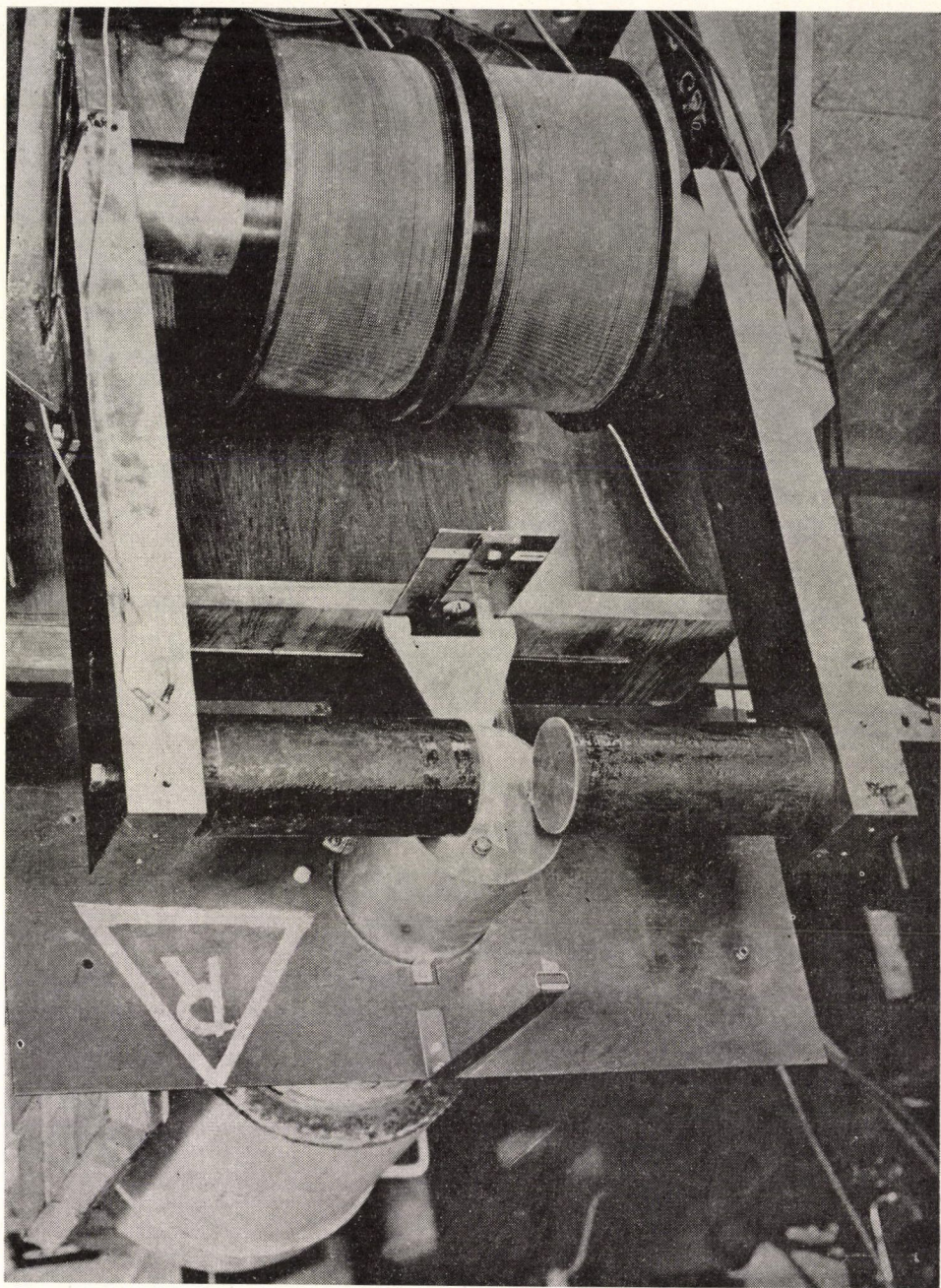


3. ábra. A  $^{11}\text{C}$  pozitív béta-bomlását kísérő belső fékezési sugárzás kísérleti spektrális eloszlása és az elméleti görbe.



4. ábra. Diagram a kísérleti és elméleti belső fékezési sugárzási spektrum összehasonlítására a  $^{11}\text{C}$  tiszta pozitív béta-bomlásában.





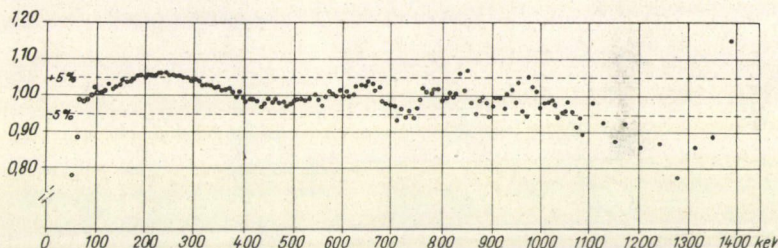
5. ábra. Mágneses elrendezés a külső fékezési sugárzást keltő elektronok kiküszöbölésére a  $^{32}\text{P}$  belső fékezési sugárzásának vizsgálatában.



Meg kell itt jegyezni, hogy e munkával először sikerült az irodalomban a pozitív béta-bomlást kísérő BFS-t kimutatni és megvizsgálni, megelőzve egy svéd—amerikai kutató-csoportot, akik utánunk és már a mi munkánkra hivatkozva egy másik izotópnál mutatták ki a BFS-nak ezt a fajtáját (*R. Akselsson és B. Persson, Nucl. Phys. A138 1969. p. 621*). Meg kell még említeni továbbá, hogy a  $^{11}\text{C}$  esete azért is különösen érdekes, mert az összes BFS vizsgálatok közül az egyetlen, ahol kedvezően megengedett béta-bomlásban normálás nélküli spektrum alak vizsgálatot sikerült végezni. Mint ismeretes, a kedvezően megengedett béta-átmenetekben magszerkezeti hatások egyáltalán nem jelentkezhetnek, maguk az alapvető kölcsönhatások a legközvetlenebbül tükröződnek a jelenségben (a  $^{11}\text{C}$  esetén kívül a  $^6\text{He}$  az egyetlen kedvezően megengedett bomlás, amelyben a BFS-ra vizsgálatok történtek, ez utóbbiak azonban csak normált, relatív mérések).

2.3.2. Vizsgálatok a  $^{32}\text{P}$  BFS-ára. Az előbbieken már láttuk, hogy a  $^{32}\text{P}$  BFS-i spektrumára vonatkozólag a kísérleti vizsgálatokban milyen ellentmondások jelentkeztek. Külön ki kell emelnünk, hogy ez volt az a BFS-i spektrum, amelyikre a legtöbb (kb. tíz) kísérleti vizsgálat történt és amelynek mintegy standard spektrumnak kellett volna lennie.

Vizsgálatainkban kimutattuk, hogy ha megfelelő mágneses elrendezésben (fényképét lásd az 5. ábrán) megszabadulunk a béta-bomlási elektronoktól és így az általuk keltett külső fékezési sugárzástól, akkor széles tartományban igen jó egyezést kapunk az elméleti spektrummal. A 6. ábrán bemutatott diagramon láthatjuk, hogy 50 és 1050 KeV között az eltérés  $\pm 5\%$ -on belül van. Az ennél magasabb energiáknál mutatkozó eltérés értelmezhető.

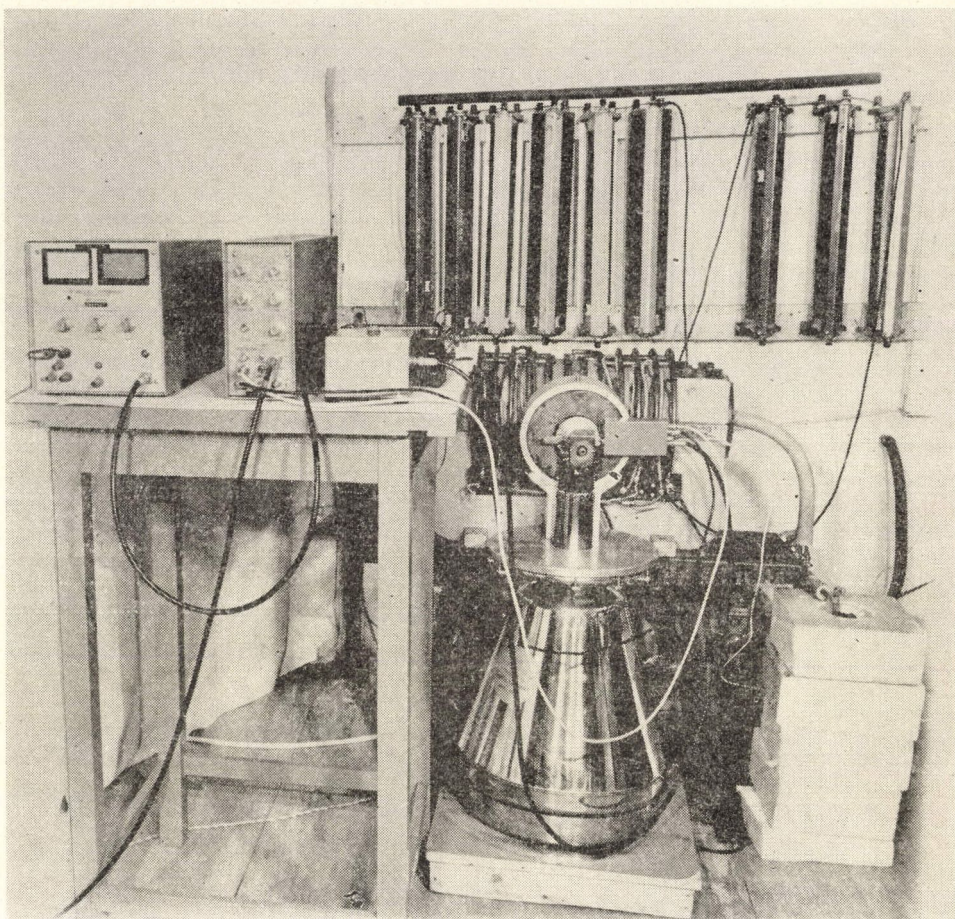


6. ábra. Diagram a  $^{32}\text{P}$  kísérleti és elméleti belső fékezési sugárzási spektrumának összehasonlítására.

Ugyanakkor számításokkal és kontroll mérésekkel sikerült kimutatnunk, hogy mások méréseiben miért jelentkeztek a nagymértékű eltérések és hogy a korábbi mérésekben csak azok és annyiban kaptak az elmélettel egyezést, amennyiben ösztönösen helyes elrendezést alkalmaztak a külső fékezési sugárzás kiküszöbölésére. Így ezt a kérdést sikerült nyugvópontra juttatni.

Megemlítem itt, hogy egy újabb, nagy körültekintéssel tervezett (fényképét lásd a 7. ábrán) mágneses tér felhasználásával Varga Dezső és Mészáros Sándor munkatársaimmal közösen vizsgálatok vannak folyamatban a  $^{35}\text{S}$  BFS-ára vonatkozóan. Ezeknek a vizsgálatoknak a jelentőségét az adja meg, hogy a S-35 log ft-je lényegesen kisebb, mint a  $^{32}\text{P}$ -jé, és így a magszerkezet esetleges torzító hatása sokkal kevésbé jelentkezhet.





7. ábra. A béta-elektronok és így a külső fékezési sugárzás kiküszöbölésére és egyéb célokra is használható speciális mágnes fényképe.

2.3.3. A  $^{36}\text{Cl}$  elektronbefogását kísérő BFS. A  $^{36}\text{Cl}$  másodrendben tiltott elektronbefogásos bomlásában a BFS-i spektrum alakját mi vizsgáltuk elsőnek az irodalomban. Már akkor azt találtuk, amit a mi és mások későbbi pontosabb mérései megerősítettek, hogy a spektrum ún. Jauch-diagramja (8. ábra) a vizsgált tartományban az elméleti előrejelzésekkel ellentétben egyenest ad. Egyébként második vizsgálatunkban kapott spektrum alakfaktora közel egy nagyságrenddel pontosabb, mint a mi első méréseinket ellenőrző svájci csoport által publikált megfelelő érték. Az észlelt anomális viselkedést a legújabb elméleti számításokkal sem sikerült megmagyarázni.

Jelenleg folyik a kiértékelése azoknak a vizsgálatoknak, amelyeket a *Ménes András, Hock Gábor, Újhelyi Csaba és Székely Géza* közreműködésével végzünk. Itt  $\text{Ge}(\text{Li})$  detektort alkalmazva egy mérésben vizsgáltuk meg a  $^{36}\text{Cl}$  és a hasonló,



de anomáliát nem mutató  $^{59}\text{Ni}$  esetét. Úgy látszik, hogy ez a kutatás a korábbiaknál nyilvánvalóbb bizonyítékot fog szolgáltatni az elméletileg előrejelzett ún. virtuális elektronbefogás jelenségére.

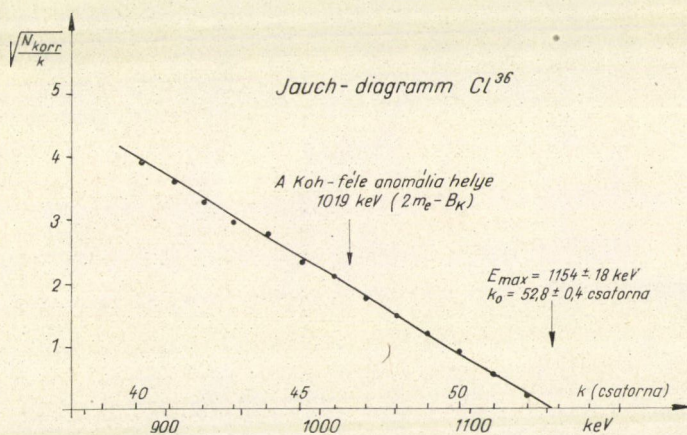
### 3. Mag-atomi jelenségek kutatása

Az atommag körül legalábbis földi körülmények között — mindig jelen van az elektron burok, tehát az atommag folyamatokban többé vagy kevésbé részt vesznek az atomi elektronok is. Bizonyos jelenségeknél, mint pl. az elektron befogással történő radioaktív átalakulásnál vagy a belső konverziónál, amelyben a mag úgy szabadul meg gerjesztési energiájától, hogy azt egy burok elektronnak adja át, az atomi héj elektronoknak közel olyan fontos a szerepe, mint a magé. Az ilyen folyamatok tanulmányozásából nemcsak a magról, de az atomról, az atomi elektronok hullámfüggvényéről is lényeges információkat kaphatunk.

Az ilyen irányú kutatások kutató tevékenységünk egyik legfontosabb területét képezik jelenleg is. Az ezekre a jelenségekre vonatkozóan megjelent közleményeink száma közel 40, és elvezettek bennünket a kifejezetten atomfizikai jelenségek vizsgálatáig (felhasználva a magspektroszkópia technikáját), sőt a kémiai effektusok és alkalmazások területére.

3.1. *Eredményeink az elektron befogás és a belső konverzió jelenségére vonatkozólag.* Ezekben a vizsgálatokban számos munkatárs, köztük külföldiek is közreműködtek, mások pedig jelenleg már a tudomány, sőt a gyakorlat egészen más területein tevékenykednek. A sok tehetséges kutató közül is — akik közül többnek a nevét a következőkben még említeni fogom — kiemelkedik ezen a területen Vatai Endre munkássága, aki a kollektívában adott lehetőségek talajáról indulva nemcsak velem együttműködésben, de attól függetlenül is kiemelkedő eredményeket ért el.

3.1.1. *Az eredmények és az instrumentális technika áttekintése* A következőkben elsősorban — mint azt a belső fékezési sugárzás jelenségkörre esetében is tettem — az ezen a területen végzett kutatásaink volumenéről és a végzett vizsgálatok különböző típusairól szeretnék képet adni egy táblázat formájában



8. ábra. A  $^{36}\text{Cl}$  belső fékezési sugárzásának ún. Jauch diagramja



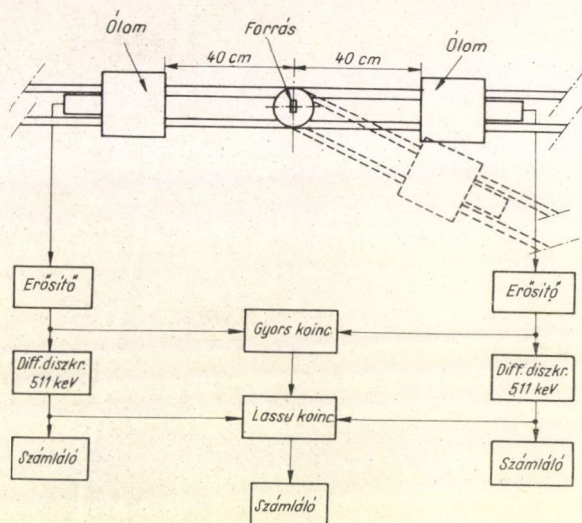
## 2. TÁBLÁZAT

Az elektronbefogás és a belső konverzió jelensége szempontjából az ATOMKI-ben vizsgált magok

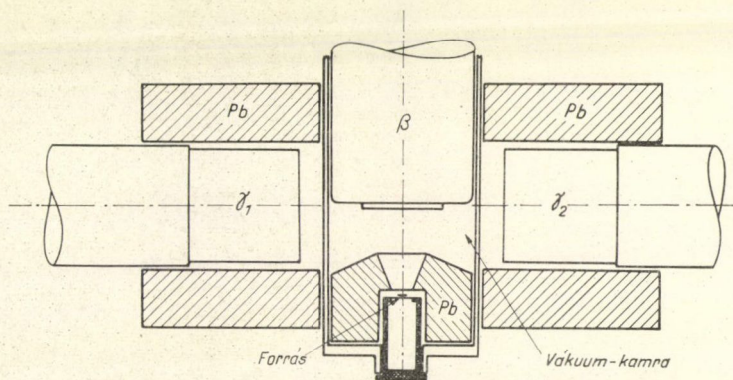
Bomló mag	Felezési idő	Bomlás típusa	A végzett vizsgálat, a mért mennyiség
$^{22}\text{Na}$	2,58 év	$\varepsilon, \beta^+$	Elektronbefogás és a pozitron emittálás viszonya
$^{36}\text{Cl}$	$3,1 \cdot 10^5$ év	$\beta^-, \varepsilon, \beta^+$	Elektronbefogás és a pozitron emittálás viszonya
$^{54}\text{Mn}$	313,5 nap	$\ast \varepsilon$	Vizsgálat pozitív béta-bomlás fellépésére az eb. mellett
$^{55}\text{Fe}$	2,6 év	$\varepsilon$	Az eb-t kísérő folytonos spektrumú elektron sugárzás vizsgál.
$^{56}\text{Co}$	77 nap	$\varepsilon, \beta^+$	Elektronbefogás és a pozitron emittálás viszonya
$^{59}\text{Ni}$	$7,5 \cdot 10^4$ év	$\varepsilon$	Befogási viszonyok a különböző pályákról
$^{74}\text{As}$	17,7 nap	$\beta^-, \varepsilon, \beta^+$	Elektronbefogás és a pozitron emittálás viszonya
$^{110}\text{Ag}$	270 nap	$\beta^-, \varepsilon, \beta^+$	Vizsgálat pozitív béta-bomlás fellépésére
$^{113}\text{Sn}$	118 nap	$\varepsilon$	Konverziós koeff. viszonyának megh. a felső héjakon
$^{131}\text{I}$	8,1 nap	$\beta^-$	Kiterjedt, különféle technikával végzett vizsgál. a belső konverzióra
$^{139}\text{Ce}$	140 nap	$\varepsilon$	K-befogási valószínűség meghatározása
$^{143}\text{Pm}$	265 nap	$\varepsilon$	Belső konv. vizsgál.; kutatás pozitív béta-boml. fellépésére az eb. mellett
$^{144}\text{Pm}$	377 nap	$\varepsilon$	Kutatás pozitív béta-bomlás fellépésére az eb. mellett
$^{146}\text{Pm}$	1600 nap	$\beta^-, \varepsilon$	Kutatás pozitív béta-bomlás fellépésére az eb. mellett



(lásd 2. táblázat). Ehhez a területhez tartozónak tekintjük és így a táblázatba is befoglaltuk azokat az elektron befogásos bomlásokhoz szorosan kapcsolódó vizsgálatokat, amelyekben kis intenzitású pozitív béta bomlás előfordulása után kuttunk az egyes izotópoknál. Mindjárt előjáróban meg kell itt jegyeznem, hogy több esetben a táblázat egy-egy sora igen sokrétű vizsgálat-sorozatot takar. Például a  $^{131}\text{I}$  esetében különböző technikával végzett különböző, meglehetősen különálló kutatásokról van szó, a bomlásban fellépő belső konverziós vonalakra vonatkozólag, amelyeket több cikkben publikáltunk több éven keresztül. Vagy a  $^{56}\text{Co}$  esetében a pozitron emittálási koefficiensét három különböző technikával mértük meg, és több cikkben közöltük.



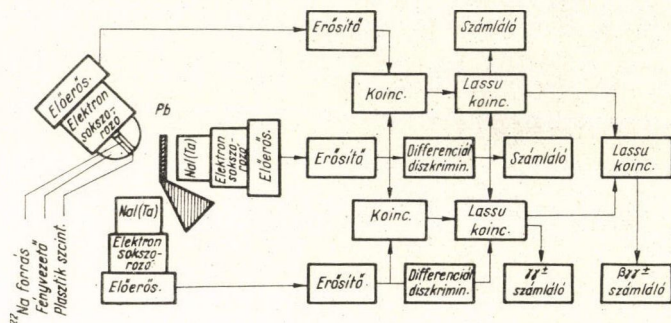
9. ábra. Kettős koincidenca elrendezés kis relatív intenzitású pozitív béta-bomlás kimutatására



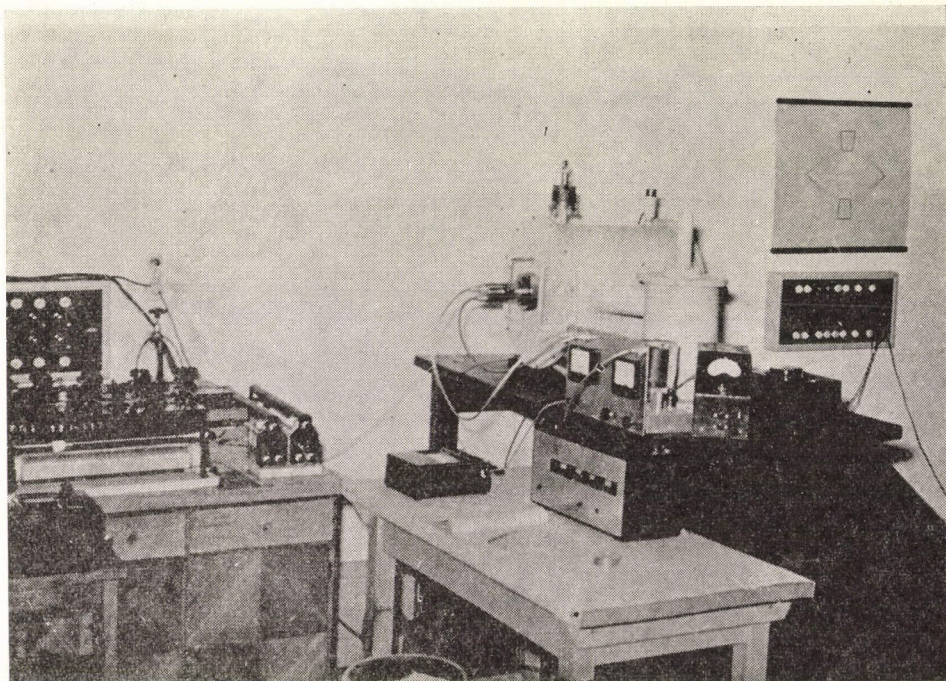
10. ábra. Hármás koincidenca elrendezés kis relatív intenzitású pozitív béta-bomlás kimutatására.



Az alkalmazott instrumentális technika, a módszerek és berendezések igen változatosak voltak ezekben a kutatásokban. Így az elektronbefogási-pozitron-emittálási kísérletekben felhasználtuk a szcintillációs és félvezető detektor technikát különböző, sokszor egészen speciális kettes vagy hármas koincidenca elrendezést alkalmazva. A 9., 10. és 11. ábra mutat be ezek közül néhányat. Ugyancsak használtuk itt, de a belső konverziós mérésekben is, intézetünk toroid-szektor béta-



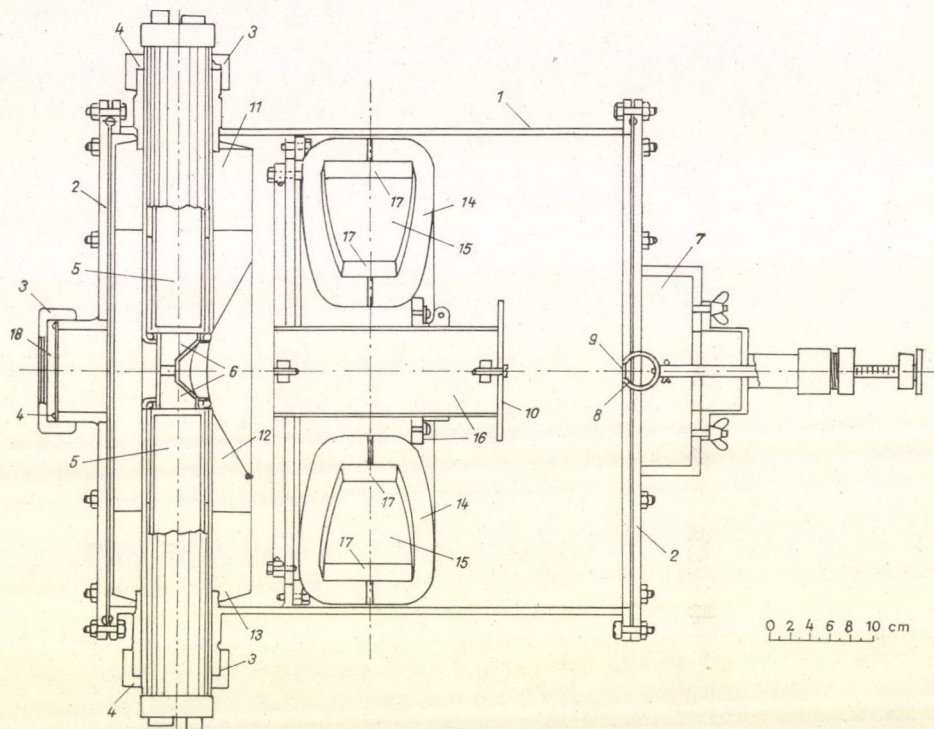
11. ábra. Speciális kettős koincidenca elrendezés elektronbefogási valószínűség mérésére.



12. ábra. Az ATOMKI toroid-szektor típusú béta-spektrométerének fényképe.



spektrométerét, amely a legrégibb magspektroszkópiai berendezés intézetünkben és Szalay akadémikus elgondolásai alapján épült (fényképét lásd a 12. ábrán, keresztmetszetét pedig egy speciális elrendezésben a 13. ábrán). A belső konverziós vizsgálatokban ez utóbbi berendezésben és a Si(Li) félvezető technikán túlmenően a legfontosabb szerepet az Illés Ferenc és Schadek János közreműködésével intézetünkben tervezett és részben az ipar segítségével kivitelezett ún. sáv-bétaspektrográf

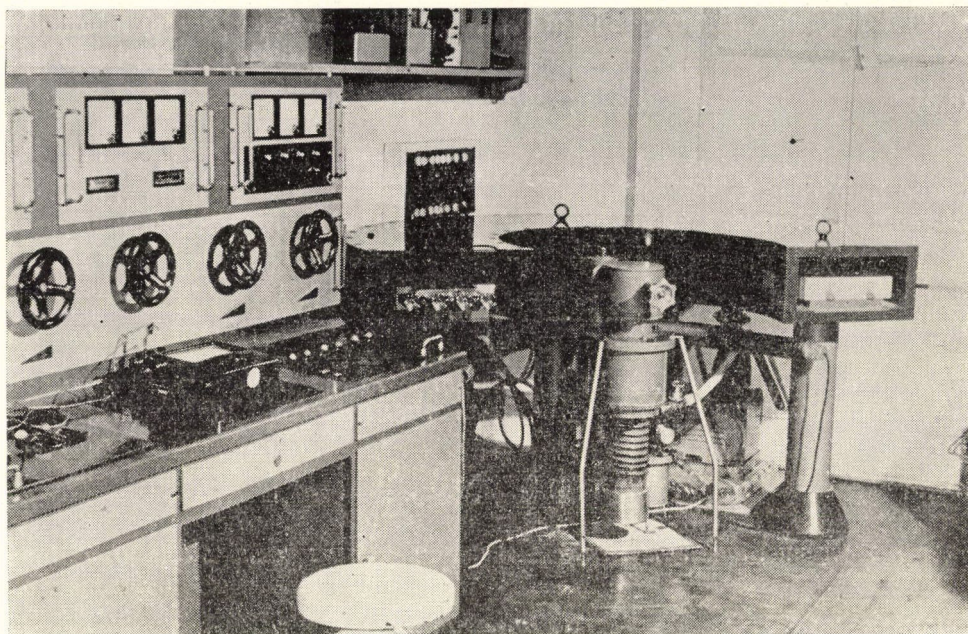


13. ábra. A toroid-szektor típusú béta-spektrométer metszete egy speciális elrendezés esetén kis relatív intenzitású pozitív béta-bomlás vizsgálatára.

játszotta, amely világviszonylatban is a legjobb feloldóképességű béta-spektrométerek között van (fényképét lásd a 14. ábrán). Az évek folyamán a sáv-spektrográfot több vonatkozásban is tökéletesítettük, jelenleg Varga Dezső munkatársam vezetésével folyik egy proporcionális számláló elven működő helyzetérzékeny detektor kidolgozása, amely az eddig használt fotoemulziós detektálást fogja helyettesíteni és ezáltal nagymértékben kiterjeszti, tökéletesíti a sáv-spektrográf alkalmazási lehetőségeit.

3.1.2. Néhány kiemelkedő eredmény. A  $^{36}\text{Cl}$ -tal már találkoztunk az előzőekben belső fékezési sugárzásra vonatkozólag elért eredményekkel kapcsolatban. Ami elektronbefogásos bomlást illeti, a varsói megfelelő tárgyú konferencián („Role of Atomic Electrons in Nuclear Transformations”) is kiemelték, hogy a





14. ábra. Sáv-bétaspektrográfunk fényképe.

$^{36}\text{Cl}$  bomlásában az elektronbefogás és a pozitív béta-bomlás relatív valószínűségére meghatározott értékünk az egyetlen kísérleti adat az  $\varepsilon_k/\beta^+$  viszonyra magasabban tiltott esetben.

A  $^{22}\text{Na}$  esetében az elektronbefogás és a pozitron emittálási viszony nagy pontossággal történt megmérése és az elméleti és a kísérleti értékek közötti eltérés értelmezésére való törekvés vezette el Vatai Endrét egy másik fontos eredményhez.

### 3. TÁBLÁZAT

Legújabb nagy pontosságú adatok az  $\varepsilon/\beta^+$  viszonyra a  $^{22}\text{Na}$  esetében

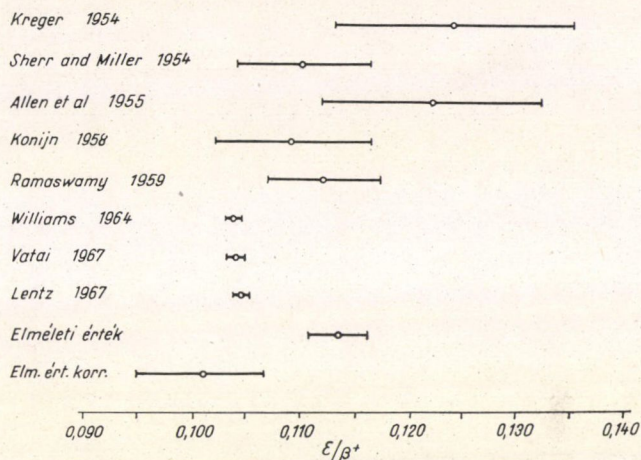
Szerző, év	Kísérleti érték
Williams 1964	$0,1041 \pm 0,00098$
Vatai 1967	$0,1042 \pm 0,00100$
Leutz 1967	$0,1048 \pm 0,00070$
McCann és Smith 1969	$0,111 \pm 0,009$

A szóban forgó mérések pontosságát jól mutatja a 15. ábra és a 3. táblázat. Az előbbi említett fontos és sokat idézett eredmény a különböző héj elektronok kicserélődési és átfedési korrekciójának a korábbinál pontosabb figyelembevétele az elektronbefogásnál, ami pl. a kis Z-jű magok elektronbefogás-pozitron emittálási viszonyánál igen jó egyezésre vezet a kísérletekkel (16. ábra), de javítja a helyzetet más, az elektronbefogásra vonatkozó mérhető paraméterek esetében is (a befogás valószínűségének viszonya a különböző atomi elektronhéjak esetében). Az  $\varepsilon/\beta^+$  viszony pontos mérése különben igen nagy jelentőségű a béta-bomlás és gyenge kölcsönhatás elmélet alapjai szempontjából is, amennyiben lehetővé teszi a Fierz-féle interferencia-tag meghatározását, és ezzel a két komponensű

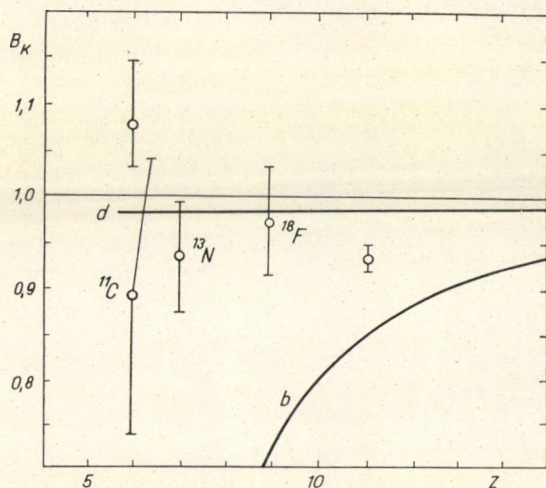


neutrínó-elmélet, illetve a kölcsönhatás hozzákeveredések ellenőrzését. A kérdés még ma sem tekinthető lezártnak.

Az elektronbefogás problémakörében kutató kollektívánkban született egyik legkiemelkedőbb eredmény az ún. másodosztályú gyenge áramokkal kapcsolatos. *Wilkinson* oxfordi professzor 1970-ben a tükörmagok béta-bomlásának analiziséből



15. ábra. Az  $\varepsilon/\beta^+$  viszonyra a  $^{22}\text{Na}$  esetében rendelkezésre álló adatok összehasonlítása a hiba feltüntetésével.



16. ábra. A kicserélődési és átfedési korrekció hatása az  $\varepsilon_k/\beta^+$  viszony értékére kis  $Z$ -knél. a) Vatai-féle számítások, b) Bahcall-számítások szerint.  $B_K$  a korrekciós érték. A kísérleti pontok a mérési érték és a korrekció nélküli elmélet hányadosaként vannak feltüntetve.

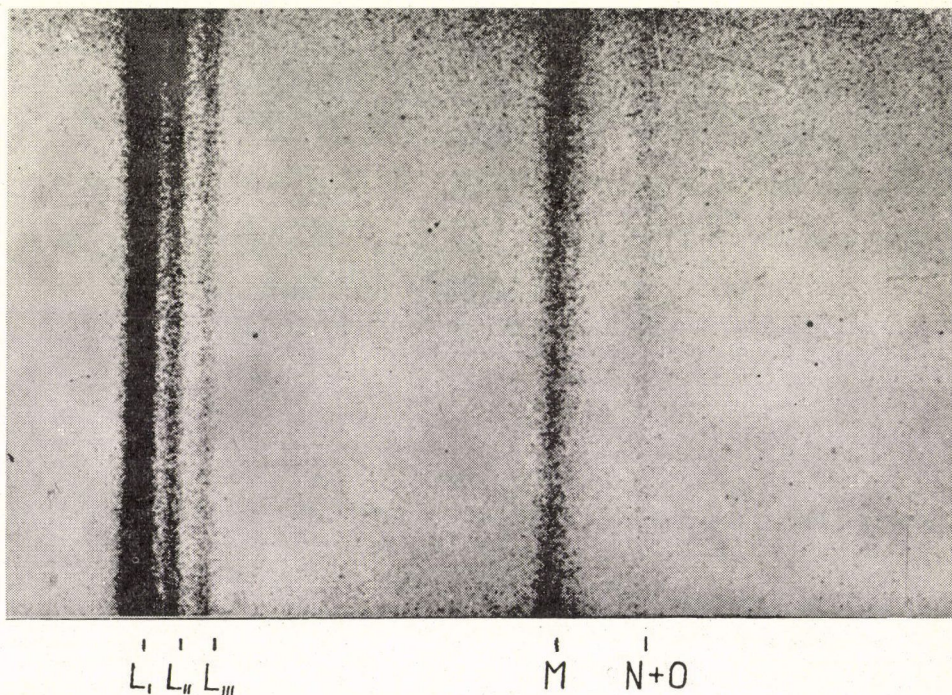


## 4. TÁBLÁZAT

Elméleti és kísérleti értékek az M/L belső konverziós viszonyra a  $^{131}\text{Xe}$  364 KeV-os átmenetében

	Elméleti értékek						A mi kísérleti értékünk 1968
	Rose 1958		Chu és Perlman 1964		Hager és Seltzer 1967		
	E2	M1	E2	M1	E2	M1	
M/L	0,385	0,405	0,239	0,195	0,220	0,211	0,195 ± 0,027

arra a következtetésre jutott, hogy a béta-kölcsönhatásban valószínűleg szerepet játszanak a B-paritássértő másodosztályú áramok. A Wilkinson-cikk egész áradatát indította el ilyen irányú számításoknak. A problémát végeredményben *Vatai* tudta megoldani (ezt a Nature ismert természettudományi folyóirat külön szerkesztőségi cikkben ismertette, Vol. 230 1971. ápr. 19), aki részben kimutatta, hogy az elektron-befogás-pozitronemittálási értékekben is jelentkeznie kellene a feltételezett áramok jelenlétének (de ilyen hatás nem mutatható ki az adatok analiziséből), részben bebizonyította, hogy *Wilkinson* következtetése lényegében tévedésen alapult a tükörmagok béta-bomlásának analizisének is.



17. ábra. A  $^{131}\text{Xe}$  364 keV-os átmenetének L, M, valamint N+O belső konverziós elektronjai a detektorként használt magfizikai emulziós lemezen a sávspektrográfban felvéve.



Ami a belső konverzió jelenségével kapcsolatos eredményeinket illeti, bizonyítékot szolgáltatunk arra, hogy az  $M$  atomi héjra az árnyékolás és a véges magméret figyelembevétele nélküli számítások közel egy kettes faktorial térnek el a helyes értékektől.

Az  $N+O$  héjra vonatkozólag pedig méréseink az elméleti számítások előtt jártak, amelyekre pontosabb számított adatok csak legújabban állnak rendelkezésre. Jelenleg  $M$  alhéjak és  $N$  meg  $O$  héjak belső konverziós vonalain dolgozunk. Miközben bemutatunk a sávspektrográffal felvett két spektrumot, ahogy az a magfotoemulziós lemezen megjelent (17. és 18. ábra), szeretnénk hangsúlyozni, hogy az ilyen irányú vizsgálatoknak milyen nagy a jelentősége az atomfizika szempontjából. Az 5. táblázat egy Heidelberg-i csoport legújabb analízisét mutatja belső konverziós mérésekben meghatározott kötési energiákra, összehasonlítva a leg-

### 5. TÁBLÁZAT

A konverziós elektronok vizsgálatából Heidelbergben meghatározott kötési energiák az  $Ir$  esetére a különböző atomi héjakon és összehasonlításuk a megfelelő elméleti értékekkel

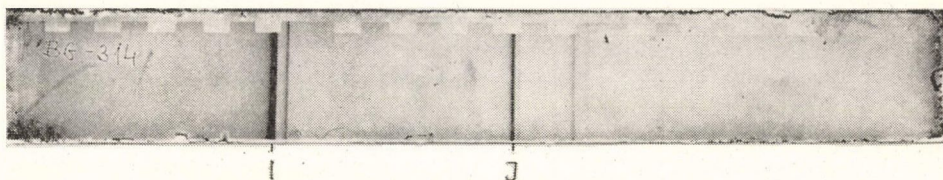
Atomi héj (alhéj)	Kísérleti kötési energia (KeV)	(E <sub>számított</sub> /E <sub>kísérleti</sub> -1) %		
		TFD*	RHFS**	HFS***
K	76,111	-0,4	0,3	1,3
L <sub>1</sub>	13,419	-1,9	-0,1	1,9
L <sub>2</sub>	12,824	-1,5	0,3	2,8
L <sub>3</sub>	11,215	-1,9	0,0	2,5
M <sub>1</sub>	3,174	-4,7	-0,7	2,1
M <sub>2</sub>	2,909	-4,5	-0,1	3,3
M <sub>3</sub>	2,551	-4,8	-0,2	3,2
M <sub>4</sub>	2,116	-5,5	0,6	4,9
M <sub>5</sub>	2,041	-5,7	0,5	4,7
N <sub>1</sub>	0,690	-7,5	-1,2	2,9
N <sub>2</sub>	0,577	-7,6	-0,3	5,1
N <sub>2</sub> N <sub>3</sub>	0,495	-8,8	-0,8	4,4
N <sub>4</sub>	0,312	-	2,1	9,2
N <sub>5</sub>	0,295	-11	3,3	9,9
N <sub>6</sub>	0,064	-32	38	47
N <sub>7</sub>	0,061	-33	32	48

\* Thomas—Fermi—Dirac atommodell.

\*\* Relativisztikus Hartree—Fok—Slater atommodell.

\*\*\* Nem-relativisztikus Hartree—Fok—Slater atommodell.





18. ábra. A Th ( $B+C+C'$ ) konverziós elektron spektrumának egy részlete a sáv-spektrográfban.

pontosabb elméleti értékekkel. Látható, hogy a legkülső héjak esetében milyen viszonylag komoly eltérések adódnak. Más hasonló konverziós vizsgálatokkal viszont pl. az  $s$ -elektronok elektron, sőt spin-sűrűségeloszlására kaphatunk információkat.

A sáv-spektrográffal végzett konverziós kutatásokon kívül tervezzük az  $^{35}\text{S}$  belső fékezési sugárzásánál már bemutatott mágnes felhasználásával a belső konverziós folyamat vizsgálatát egészen kis  $Z$ -knél ( $^7\text{Be}$ ). Ugyanezzel a berendezéssel az elektronbefogást kísérő folytonos spektrumú elektron emittálást is készülünk tüzetesebben vizsgálni (erre a jelenségre vonatkozó előzetes vizsgálatainkat — amelyeket Nagy József végzett — már idézték az irodalomban, sőt elméleti eloszlást illesztettek hozzá). Míg a belső konverziós vizsgálatokban Kövér Ákos munkatársamon nyugszik a munka fő súlya, a legutóbb említett jelenség elsősorban Kádár Imre témaköre.

3.2. Kutatásaink az atomfizika és a kémiai alkalmazások területén. Az utóbbi bemutatott vizsgálatok és eredmények mintegy természetes úton vezetnek át az atomfizika, sőt a kémia területére. Hiszen a kémia jelenségei a legkülső atomi héjakon játszódnak le, ha tehát a legkülső héjakon vizsgáljuk a belső konverziós jelenségeket, a kémiai hatásoknak feltétlenül jelentkezniök kell.

3.2.1. Kémiai effektusok belső konverzióánál. Aszerint, hogy a radioaktív atom milyen kémiai kötésben, ill. milyen vegyület formájában van, jelentősen befolyásolja (25—30%) a belső konverzió valószínűségét a legkülső héjon.

Ebben az igen érdekes eredményekkel kecsegtető irányban világszerte nem régiben indultak meg a kutatások. Az eddig mások által publikált eredményeket

mutatja be a 6. táblázat. A táblázatban feltüntetett változások általában a fém és az oxid állapotban mért legkülső héj konverziós valószínűsége közötti különbségnek felelnek meg. Megjegyezzük még, hogy legújabban fémfizikai problémákban is kihasználják a belső konverziós jelenség és módszer nyújtotta lehetőséget (*T. Shinohara és M. Fujioka, Phys. Rev. B7 1973. p. 37.*).

Folyamatban levő saját vizsgálataink a jóid különböző fémfelületeken történő megkötődé-

## 6. TÁBLÁZAT

A belső konverzió valószínűségének változása a kémiai környezet megváltozásának hatására.  
Kísérleti adatok

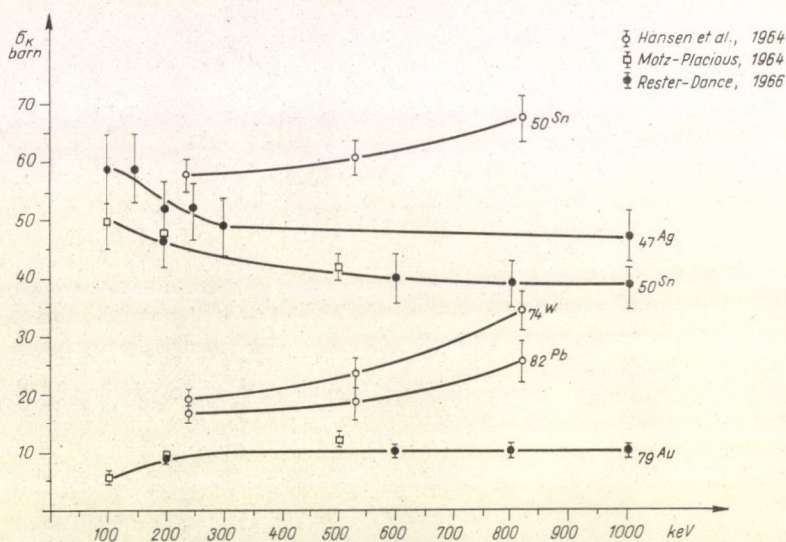
Izotóp	Az átmenet energiája keV	Atomi héj	Relatív változás %
$^{57}\text{Co}$	14,4	$4s_{\frac{1}{2}}$	30
$^{119\text{m}}\text{Sn}$	23,9	$5s_{\frac{1}{2}}$	30
$^{125\text{m}}\text{Te}$	35,5	$5s_{\frac{1}{2}}$	30
$^{169}\text{Er}$	8,4	$6s_{\frac{1}{2}}$	38 46



sére irányulnak a I-125 és I-131 radioaktív izotópok felhasználásával. A munkában *Kövér Ákos* munkatársamon kívül részt vesz *Újhelyi Csaba* vegyész is, aki sok más korábbi kutatásunkban is a radiokémiai és forráspreparálási munkát végezte.

3.2.2. Elektron bombázás hatására létrejövő belső héj ionizáció. Ez a kutatási terület már teljesen az atomfizika területére esik, még akkor is, ha az általunk alkalmazott mérési módszerek mind magfizikaiak.

Arról van szó, hogy néhány száz keV-os elektronokkal bombázunk különböző elemeket (a monoenergetikus elektronok forrásául a más vonatkozásban már említett toroid bétaspektrométer szolgált). Az elektronok vakanciákat hoznak létre az atomok legbelsőbb héjain és mérve a beérkező elektronok és a vakanciák betöltődésekor keletkező röntgen sugárzás közötti koincidenciát, meghatározható a vakancia-keltés, azaz az ionizáció hatáskeresztmetszete a belső héjakon.

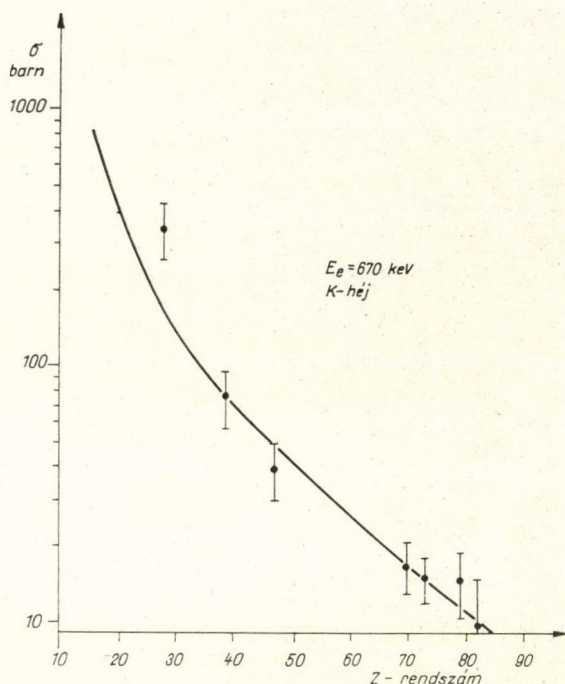


19. ábra. Legújabb kísérleti adatok az elektron bombázás hatására bekövetkező K-héj ionizációs hatáskeresztmetszetre a 100 és 1000 KeV közötti elektron energia tartományban.

Bár ezen a területen a kutatások már a harmincas években megkezdődtek, viszonylag kevés kísérleti adat áll rendelkezésre, és ezek között is különféle ellentmondások állnak fenn (jól mutatja ezt pl. a 19. ábránk). Így természetesen ugyan-csak problémák vannak a kísérlet és az elmélet egyezésével kapcsolatban, sőt az elméleti számítások egymásközt is mutatnak eltéréseket. A szóban forgó jelenség főleg a napjainkban fellendülő nehéz ionokkal történő belső ionizációs vizsgálatok miatt került előtérbe. Azonban a bécsi Nemzetközi Atomenergia Ügynökség 1972-ben megfelelő tanácsadók részvételével tartott speciális megbeszélésen a kérdést különösen fontosnak ítélte a sugárzási dozimetria, a sugárbiológia és a sugár-terápia szempontjából is.

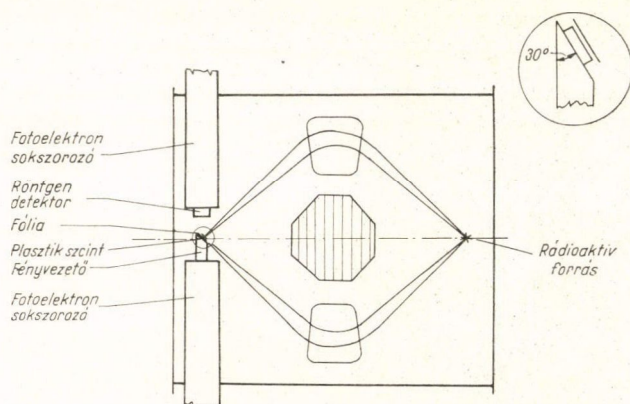
Már eddigi eredményeink is — amelyek rövidesen megjelennek a Zeitschrift für Physik-ben — több problematikus kérdést tisztáznak. Így pl. a Pb és Au K-héj





20. ábra. A K-héj ionizációs hatáskeresztmetszet kísérleti értékeinek összehasonlítása a Kolbenstvedtféle közelítő elméleti görbével 670 keV bombázó elektron energiánál.

hatáskeresztmetszetére vonatkozólag feloldják a korábbi ellentmondást, ugyanakkor meglehetősen széles rendszám tartományban teszik lehetővé a kísérlet és elmélet összehasonlítását (20. ábra). Mérőberendezésünk keresztmetszetét mutatja vázlatosan a 21. ábra.



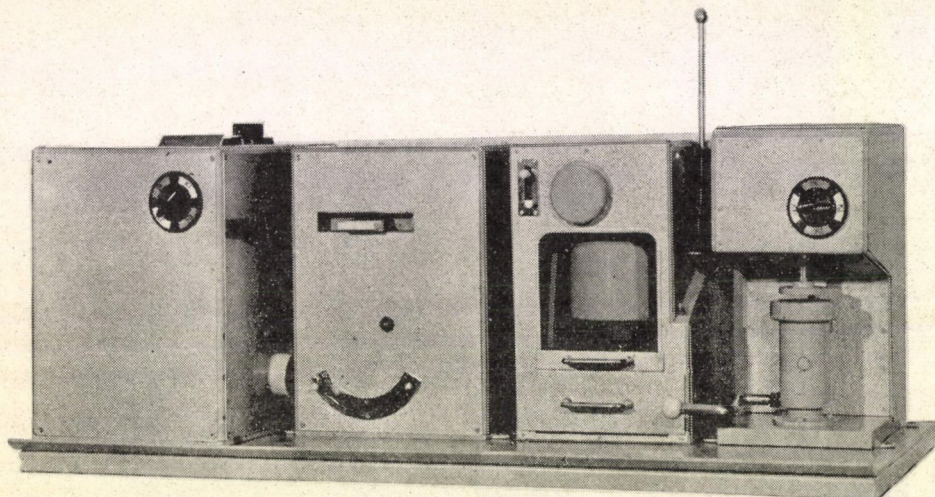
21. ábra. A belső héj ionizációs hatáskeresztmetszet mérésekben alkalmazott mérőberendezés keresztmetszetének vázlatos rajza.



A továbbiakban tervezzük ezeknek a méréseknek a folytatását és kiterjesztését kaskád generátoron gyorsított elektronok felhasználásával, mivel így a különböző korrekciókból eredő hibákat lényegesen le lehet szorítani. A mérésekben eddig *Samir Seif el Nasr* aspiráns és *Bibók György* vett részt.

3.2.3. Gyors Ca-meghatározó készülék. A röntgensugárzás detektálásával és spektroszkópiájával, valamint a radioaktív izotópokkal kapcsolatos tapasztalataink tették lehetővé, hogy a Magyar Alumíniumipari Tröszt részére megoldjunk egy a timföldgyártásban fontos problémát.

Anélkül, hogy itt a részletekbe mehettünk, csak azt említem meg, hogy a szóban forgó gyártási folyamatban zavar, ha magas a bauxit Ca tartalma. Radioizotópos röntgen-fluoreszcencia módszerrel sikerült olyan módszert kidolgozni, amellyel



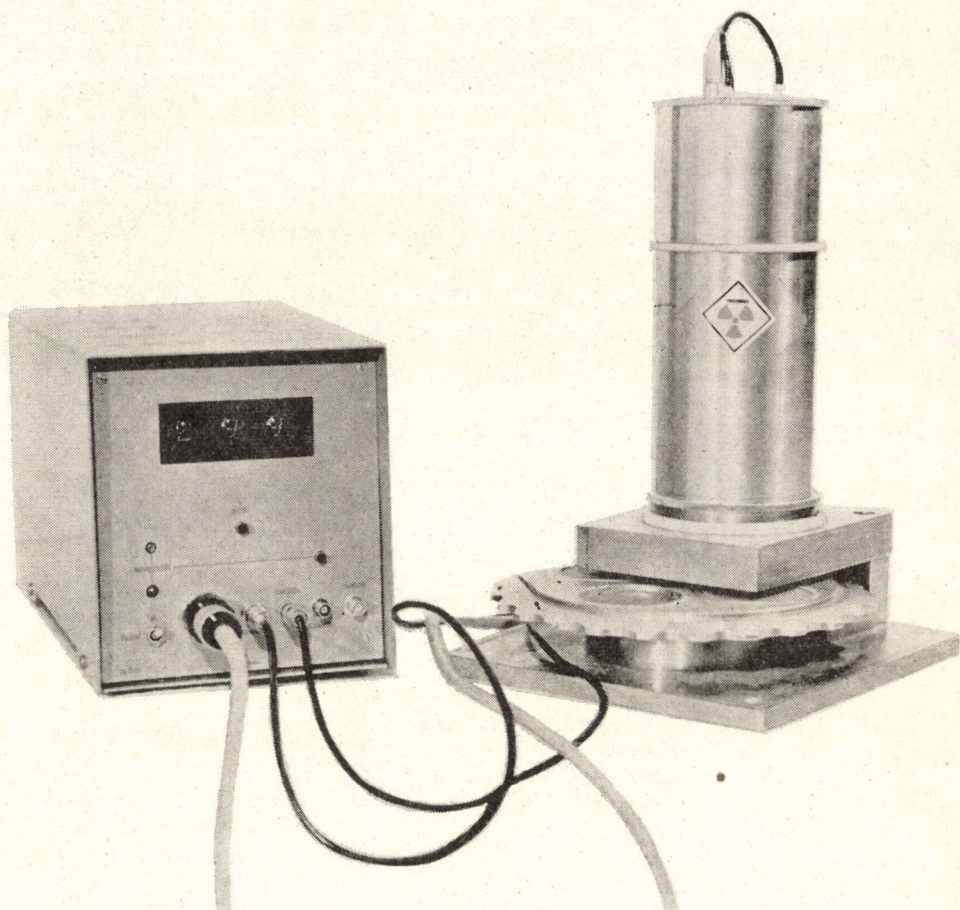
22. ábra. A gyors Ca-meghatározó készülék minta-készítő egységei.

8 percen belül (a mintavételtől számítva) a 0,3-tól 15–20 vagy még magasabb %-os tartományban lehetséges a bauxit CaO tartalmát meghatározni beleértve az összes minta előkészítési és készítési folyamatokat. 22. ábránk a mintaelőkészítési, 23. a mérő berendezéseket mutatja. A 24. ábrán a berendezés hitelesítési görbéje látható.

Az egész készülék kivitelezésén vezetésemmel egy relatíve nagy kollektíva dolgozott (lényegében a kutató csoportunk) igen szoros együttműködésben intézeti műszaki gárdánkkal, amelyből név szerint is ki kell emelnem *Mórik Gyula* főmérnök-helyettest. Csoportunk egyébként más gyakorlati problémák megoldásában, iparnak nyújtott segítségben is részt vett és több ezirányú tárgyalás jelenleg is folyamatban van.

3.2.4. Elektrosztatikus elektron spektrométer, ESCA. Több éves előkészítő munka után a múlt évben hálótér szerint megindult egy elektrosztatikus elektron-spektrométer építése intézetünkben, amely átfogja a néhány keV-től 15–20 keV-ig terjedő tartományt. Az új spektrométer, amely sugármenete, luminózitása stb. miatt instrumentális tekintetben világviszonylatban is előreviszi az adott területet, szervesen egészíti ki eddigi műszerparkunkat az alacsony energiájú tarto-





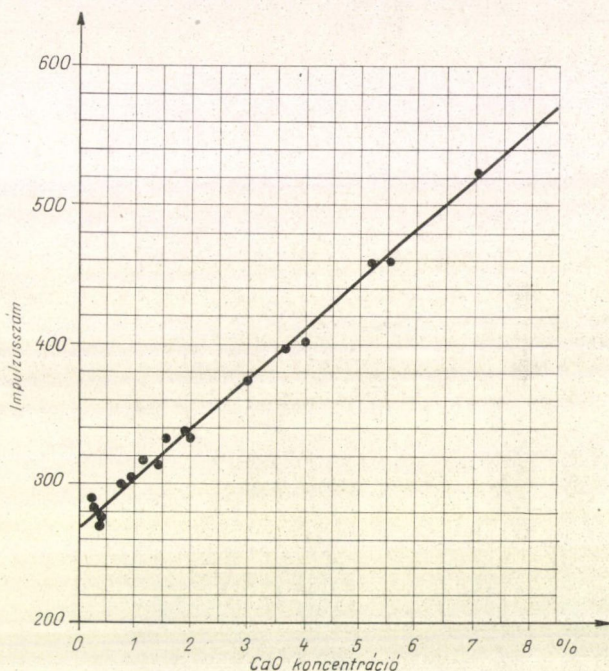
23. ábra. A gyors Ca-meghatározó készülék  $^3\text{H-Ti}$  izotópos gerjesztéssel működő röntgen-fluoreszcenciós mérő egysége.

mány felé. Nagy jelentőségű számunkra azonban az, hogy nemcsak a kis energiájú konverziós folyamatok és hasonló jelenségek (elektronbefogást kísérő folytonos spektrumú elektron emittálás) vizsgálatát teszi lehetővé, hanem az ún. ESCA méréseket is.

Meg sem kísérelhetem itt az ESCA (Electron Spectroscopy for Chemical Application or Concerned with Applications) módszer jelentőségének és lehetőségeinek bemutatását. Ami a mi kutatómunkánk szempontjából lényeges az az, hogy az új berendezés lehetőségeinket messze kiterjeszti az inter- és multidiszciplináris kutatások irányába a szilárdtest fizikától (sáv-szerkezet vizsgálata) a felületanalízisig, a szerkezeti kémiától a biokémiáig, biofizikáig, és a gyógyszerkutatástól a kvantum-kémiáig (molekula-pályák vizsgálata). Az ilyen irányú kapcsolatfelvétel és együttműködés kiépítés már megkezdődött és folyamatban van.



A múlt év végén a tervnek megfelelően lezárult az építés első üteme. A 25. és 26. ábrán bemutatom a berendezés fényképét két különböző beállításban. A 27. ábra az egyik első spektrumot (I-125) mutatja összehasonlítva a megfelelő irodalmi spektrummal. Jelenleg a feladóképesség további javítása és a besugárzó, valamint mágneses árnyékoló rendszerrel kapcsolatos problémák megoldása folyik. A berendezéssel kapcsolatos új elgondolások elsősorban *Varga Dezső* munkatársamtól erednek és ő vezeti a kivitelezés munkáját is *Kövér Ákos* és *Kövér László* segítségével és a megfelelő műszaki háttérrel. Itt említem meg végül laboránsaink segítségét is, elsősorban *dr. Halász Tiborné* szakszerű és odaadó munkáját.



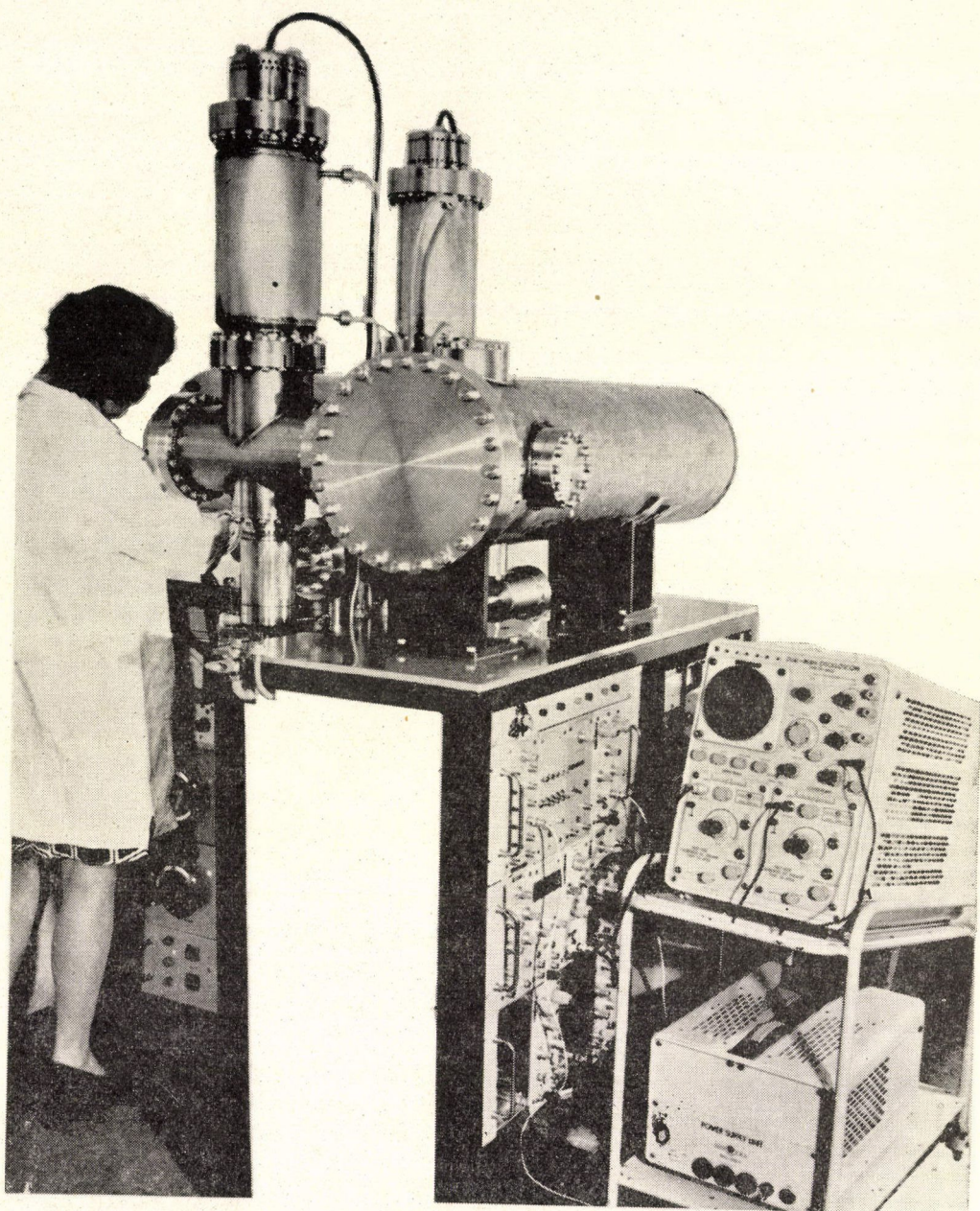
24. ábra. Összefüggés az impulzusszám és a bauxit CaO koncentrációja között az általunk készített gyors Ca-meghatározó készülékhez.

#### 4. Kitekintés

Befejezésül azt szeretném elmondani, hogy fel-felmerülnek hazai kutatókban, kollégákban olyan gondolatok, hogy nálunk nem lehet, vagy alig lehet élvonalbeli kutatásokat csinálni, különösen a magfizikában nem lehet. Számunkra elérhetetlen berendezések, és nagyon-nagyon sok pénz kellene ehhez.

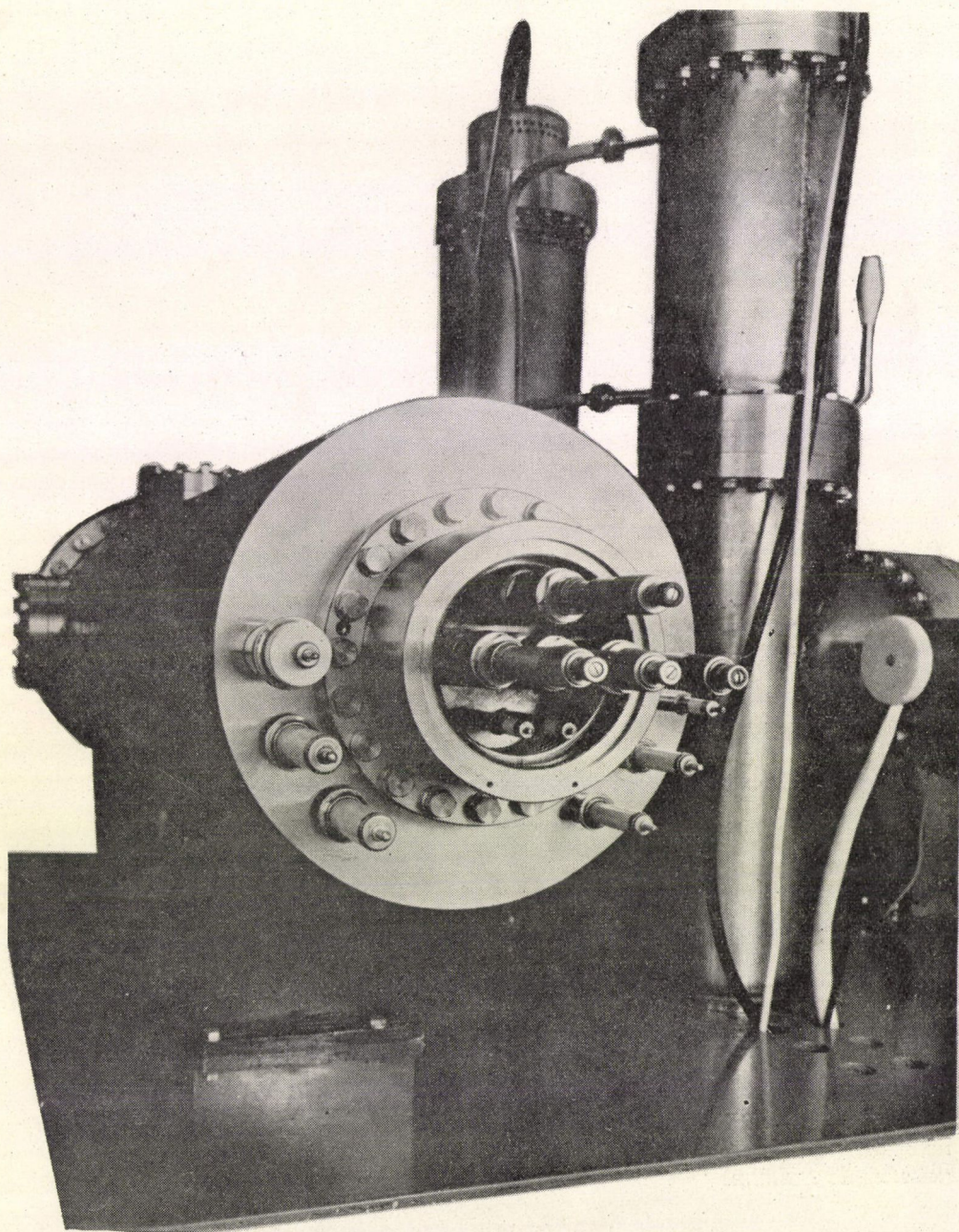
Nekünk — akik a *Szalay* akadémikus körül kialakult kísérleti magfizikai tudományos iskolából kerültünk ki — az a nézetünk, hogy a magfizikai ismeretek és módszerek behatolnak úgyszólván az összes természettudományokba, sőt nemcsak





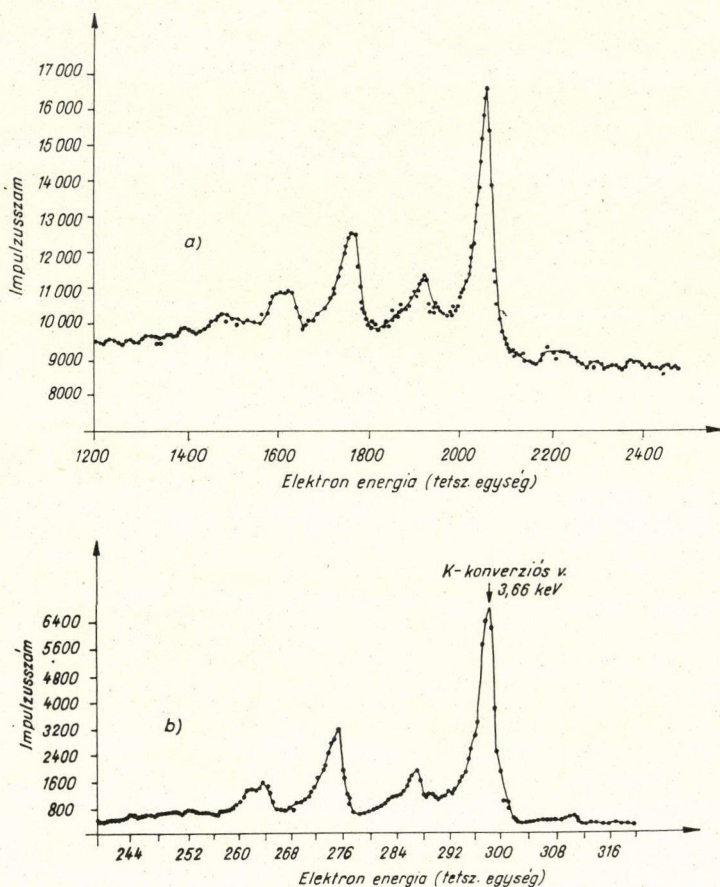
25. ábra. Az ATOMKI elektrosztatikus elektron-spektrométere.





26. ábra. Az elektrosztatikus elektron spektrométer detektor oldala a diafragma szabályozó mikrométerekkel.





27. ábra. L-Auger vonalak és a K-konverziós vonal a I-125 bomlásból a) az ATOMKI most épült elektrosztatikus elektron-spektrométerével felvéve és b) W. R. Casey és R. G. Albridge mérése szerint (Zeits. Phys. 219. 1969 p. 216).

a természettudományokba. Ha széles látókörrrel, a természet jelenségei iránti elfogulatlan érdeklődéssel nézzük a problémákat és lehetőségeket, akkor — úgy érezzük — nagyon sok a tennivalónk. Ha pesszimisták vagyunk, kétségbeesünk, hogy mennyi mindent nem tudunk csinálni, mennyi divatos téma távol esik lehetőségeinktől, de ne felejtjük el, hogy a divatokat, „divatos témákat” is kutatók indították el, mégpedig olyan önálló eredeti kutatók, akik nem elsősorban mások után mentek, hanem maguk tudtak és tudnak új utakat nyitni, ha tetszik új „divatot”, új irányokat beindítani a tudományban.

Végül, ha elég széles a látókerünk, nem hagyjuk figyelmen kívül a nemzetközi, különösen a szocialista országok közötti együttműködés által kínált lehetőségeket sem, amelyek nagyban kitágítják az általunk elérhető kutatási területet.



# KÖNYVISMERTETÉS

**Jens Blauert: Raumlisches Hören Hirzel, Stuttgart 1974, VII+256 oldal, ára 48 DM**

A könyv egy hírközléstechnikai monográfia-sorozat tagjaként jelent meg. Ezúttal a hírközlés-technika tágabb értelmezéséről van szó, hiszen a térbeli hallás alapjában emberi — pszichoakusztikai, bifizikai — jelenség. Csakhogy, mint az utóbbi két évtized kutatásai megmutatták, a térbeli hallás (azaz a kétfülű hallás) mechanizmusának mélyebb megismerése nagy mértékben befolyásolhatja a hírközlés technikai megoldásait is. Elegendő a különféle térhatás (sztereofon, ambiofon, kvadrufon) hangközvetítő rendszerekre utalnunk.

Blauert könyve, bár a legalapvetőbb pszichometrikai és biofizikai módszereket és eredményeket foglalja össze, nem mulasztja el a technikai megoldások lehetőségeit, sőt megoldásmódját is ismerteti. Ezért teljes a téma és a kiadvány sorozat összekapcsolása.

Még a tárgykörben járatos szakembert is csodálkozásra készíti milyen gazdag anyag halmozódott föl ezen a kutatási területen. A könyv első 28 oldala mérés technikai bevezetés. Ezen túl két részre oszlik: az egyetlen hangforrás terében (132 oldal) és a több hangforrás terében (70 oldal) létrejövő hallásjelenségek taglalása. Természetes, hogy elméletileg is és kísérletileg is az előbbi a részletesebben kidolgozott, hiszen a több hangforrás akusztikai tere nehezen kezelhető matematikai-fizikai probléma. A szerző mégis nagy súlyt helyez ez utóbbi terület részletes tárgyalására, annál is inkább, mert — miként a Meyer-féle göttingai iskola más tagjai is — sok értékes eredményt mondhat sajátjának. Ezek a vizsgálatok, mint arra Békésy rámutatott, idegfiziológiai problémák megoldásához is segítséget nyújtottak, sőt más érzékszervek érzékelési mechanizmusának megismerésében is előre vitték a tudományt.

A könyv tárgyalása a hallás iránymeghatározó képességével kezdődik. Egyforrású hangterekben végzett kísérletek szerint iránymeghatározó képesség tekintetében a fül két nagyságrenddel rosszabb a szemnél. Viszont érzékelési szöge — a teljes kúpszög — és távolságbecslése — színképváltozások elemzése útján — jobb, mint a szemé. Az egyidejű és időben eltoltt hangjelek értékelési mechanizmusa alkalmas a hallás egyes idegi jelenségeinek jobb megismerésére, sőt az idegimpulzusok vezetési sebességének becslésére is. A többforrású terek kutatása pedig információelméleti szempontból jelentős eredményekhez (pl. az ún. cocktail party hatás) vezetett.

Blauert monográfiája ezekre a melléktermékekre csak néha utal, viszont igen pontosan és alaposan végigtárgyalja mindazt, amit az irodalomban a térbeli hallásról 1972-ig közöltek. Ezt igazolja többek közt a tárgyszerűen feldolgozott 612 irodalmi hivatkozás.

A könyv a maga nemében páratlan, ezen a téren az első összefoglaló munka. Minden akusztikus, hírközléstechnikus, érzékszervi kutatásokkal foglalkozó biofizikus és pszichológus megtalálja benne az őt érdeklő fejezetet vagy adatot.

*Tarnóczy Tamás*

**F. Topsøe: Informationstheorie, B. G. Teubner, Stuttgart, 1974. Teubner Studienbücher. Mathematik**

Helyesen tette a Teubner kiadó, hogy F. Topsøe koppenhágai egyetemi docens eredetileg dán nyelven megjelent munkáját — kibővítve — németül megjelentette.

Ez a 86 oldalas kis könyvecske logikus, rendszeres felépítésű, egyéni pedagógiai tapasztalatok alapján készült bevezetés a matematikus, híradástechnikus és biológus egyetemi hallgatók számára. Ez utóbbiak érdekében matematikai nyelvezete egyszerű. Ez egyúttal lehetővé teszi, hogy a magyar



matematika tagozatos gimnáziumok felső éves tanulói anyagát szakkörökben feldolgozhatják, — némi halmazelméleti, valószínűségszámítási, határértékszámítási tudás szükséges hozzá.

A könyvecskeben szereplő feladatok a vegyes olvasóközönségnek megfelelően szerepelnek. Egyesek „köntöse” biológiai, másoké statisztikus mechanikai, vagy a valószínűségszámítás szokásos alapfeladatai alapján álló, vagy híradástechnikai. Kár, hogy a megoldások semmiféle formában nem szerepelnek a könyvecskeben.

A szerző az entrópia fogalmával operál, amelyhez szerinte háromféleképpen lehet eljutni: 1) direkt úton, azt egyszerűen definiálva; 2) axiomatikusan, tulajdonságai alapján létezésének szükségességét kimondva; 3) leírólág, az entrópia függvény értelmezéséből kiindulva. — A szerző, az első két — szokással — szemben, a harmadik utat követi.

Igy azután az entrópia, mint vezérfonál segítségével, a kód és kódfa, az optimális kodolás, tetszőleges kód abc, Shannon és Fano kódolási metodikája, a nyelvészet és információelmélet kapcsolata, egy adó-csatorna-vevő rendszer információs elméleti leírása után a csatorna-kapacitás meghatározását dolgozza fel a szerző. Ez utóbbival foglalkozó fejezetben támaszkodik 1972-ben a Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Deb.-ben megjelent munkájára. (T. Gy.)

**Walter Schottky: Thermodynamik  
Springer Verlag: Berlin—Hiedelberg—New York. 1973. Reprint**

Az 1929-ben megjelent és a fenti címben megjelölt szerzőn kívül H. Ulich és C. Wagner társ-szerzőkkel együtt kidolgozott munka a termodinamika mai fejlődő és forrongó állapotában már klasszikusnak tekinthető. Attól függetlenül, hogy ma általánosan szokás visszanyúlni a tudomány fejlődésének nagy mérföldköveihez, az elmúlt évtizedeket sikeresen „átvészelt” alapvető tudományos munkák, így Schottky Termodinamikájának újranomása és közzéttele lehetővé teszi a kutatók és a természettudományok iránt érdeklődők számára, hogy áttanulmányozzák eredetiben azt a munkát, amelyből az azóta megjelent termodinamikák annyit merítettek. Hiba volna azonban csak ebben az utóbbi vonatkozásban értékelni Schottky munkáját. A könyv eredeti célkitűzése a gyakorlati alkalmazás, az ipar, a technológia számára feldolgozni a termodinamikai problémákat. Milyen korszerű célkitűzés 1929-ből! Él ma is az a kíváncsi, hogy a tervezők, a kutatók, a mérnökök, kémikusok, orvosok, biológusok, geológusok stb. a saját problémáik megoldása érdekében értsék át és használják fel a termodinamika megállapításait.

Schottky gyakorlati egyetemi előadó is volt, mégis hálásan emlékezik meg könyvének előszavában társszerzőjéről, Ulich-ről, akik mint a kémikus hallgatók több éven át előadója nemcsak kémiai ismeretek birtokába jutott, hanem a kémikusok számára világosabb megfogalmazás kidolgozásában is hathatósan emelte a könyv értékét. Amúgy is Schottky a magasabb rendű egyensúlyi feltételek, a tartós egyensúlyi állapotokban bekövetkező változások témáját érzi a kémiai termodinamika legnehezebb fejezetének.

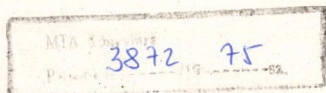
Schottky Termodinamikájának alapelvül azt a gondolatot választotta, hogy helytelen egy változatos, de nehezen áttekinthető terepen bekötött szemmel elvezetni a tájék legszebb pontjaira az érdeklődő idegent, elrejtteni előtte a járhatatlan utakat. Elve, hogy a szabadságot és a biztonságot az az eljárás adja meg, amely megismerteti a „vándort” azzal az alappal és talajjal, amelyen áll, amelyen halad és a céllal, vagy célokkal, amely elérhető, vagy amelyet el kell érnie. Az alap és a talaj esetünkben a tapasztalat.

Ebből kiindulva Schottky szakavatott vezetésével a 619 oldalas segítségével megszerezhetjük, kiegészíthetjük vagy csak felfrissíthetjük termodinamikai ismereteinket. (T. Gy.)

**H. H. Müller és K. Magnus: Übungen zur Technischen Mechanik.  
Teubner Studienbücher. 1974.**

A 292 oldalas „zsebkönyv” a Magnus—Müller: Rundlagen der Technischen Mechanik című könyvhöz gyakorló könyv 136 feladattal és azok részletes megoldásával. Ezek közül mutatónk bemutatunk néhányat:

1) Egy egyenes négyzeteshasáb hat élében fekvő ( $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ ) egymással összekötött vektorokra fennáll, hogy  $A_1 = \dots = A_4 = A$  és  $B_1 = B_2 = B$ . Mutassuk meg, hogy az adott vektorrendszer egy  $C$  egységvektorra redukálható és számítsuk ki az ezzel a vektornak az  $xy$  síkkal alkotott fűdéspontját. 2) Egy vékony falú egyenes körkúp formájú víztartó kerülete mentén fel van függesztve. Mekkora maximális normál feszültség lép fel és hat a tartó falára? A tartó saját súlyát hanyagoljuk el. 3) Nagyon rugalmas műanyagból készült labda milyen pályát ír le, ha ferden





egy asztal alá dobjuk. A pályának a labda súlya miatt bekövetkező görbülését hanyagoljuk el. — Egyébként a szerzők a feladatok megoldására a következő lépéseket ajánlják: 1) A feladatot megfogalmazni és megérteni; 2) leegyszerűsíteni a problémát, minden lényegtelen elhagyni, azaz megalkotni mechanikai helyettesítő modellt, tisztázni azokat a feltételeket, amelyek mellett ez a modell érvényes; 3) a problémát a matematika nyelvére átfordítani, azaz megkeresni a mechanikai helyettesítő modellhez tartozó matematikai modellt, tekintetbe véve a fizikai alaptörvényeket; 4) a problémát matematikán belül megoldani; 5) a matematikai megoldást visszavinni a mechanikai tartományba; 6) az eredményt diszkutálni és értelmezni. — A diszkusszióhoz hozzátartozik annak vizsgálata is, hogy vajon a nyert megoldásnak van-e fizikai értelme. Ha eziránt kétség merül fel, akkor az egész eljárást a 2) ponttól meg kell ismételni.

Az előbbiek is mutatják, hogy a szerzők gyakorlott pedagógusok, akik a saját tapasztalataikat foglalják össze ebben az értékes kis könyvecskében. (T. Gy.)

**W. C. Schieve and I. S. Turner: Lectures in Statistical Physics Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York. 1974.**

A könyv előadások gyűjteménye, melyeket 1971-ben a III. Advanced School for Statistical Mechanics and Thermodynamics elnevezésű, I. Prigogine, az austinai Statisztikus Mechanika és Termodinamika Centrum igazgatója szervezett. A közölt előadások megmutatják a statisztikus fizika sokoldalúságát, szerepét a fizikában, az asztrofizikában és a biofizikában. Az első, a bevezető előadás szerzője W. C. Schieve a nem egyensúlyi statisztikus mechanika kvantumelméletét tárgyalja a Neumann János egyenlet nézőpontjából. A kvantummechanikai transzformáció elmélet általános keretein belül maradva C. George, a második szerző, folytatja a nem egyensúlyi statisztikus mechanika ismertetését. J. Ehlers ezután áttekinti a kinetikus gázelméletet az általános relativitáselmélet alapján, diszkutálja a Boltzmann-féle elgondolások igazolását a görbült téridőben, bemutatja a hidrodinamika egyenleteit és a Chapman—Enskog módszer alkalmazását. Az asztrofizikai témát folytatva, R. Müller, aki a gravitációs  $n$ -tér számításánál az ún. második módszert használja, amely lehetővé teszi, hogy pl. sok, akár 10 „részcskét” vegyünk tekintetbe a közöttük fellépő erők meghatározásakor. Elliot Montroll, a következő szerző, a statisztikus mechanika klasszikus rendszerét, a kristályrácsot diszkutálja. Az ergodicitás fontos problémáit, a permanens hullámok analizését is elvégzi az egydimenziós rács esetére. Ugyanezt vizsgálja Joseph Ford a nemlineáris oszcillátor rendszerek nem sztochasztikus viselkedésére kapcsolatban. S végül Jack S. Turner a nem egyensúlyi termodinamika, a diszzipatív struktúrák és a biológiai rendezettség egyes kérdéseivel foglalkozik.

A könyv érdekes, helyenként „izgalmas”. (T. Gy.)

**N. F. Mott: Metal-Insulator Transitions. Taylor & Francis. London. 1974.**

A könyv első fejezetet azokkal a jelenségekkel foglalkozik, amelyek a nem kölcsönható elektronok modelljével leírhatók — beleértve a sávfedéseknek tulajdonítható fém-szigetelő átmeneteket. E jelenségek közé tartozik egyes kétegyértékű fémek viselkedése nyomás alatt, az elektronok viselkedése nemkristályos közegben és az Anderson-átmenet, folyadékokban is.

A második fejezet az elektronok fononokkal való kölcsönhatását tárgyalja, különösen a tömegnövekedést polaronképződéskor és a sávfedési átmenetet  $\text{Ti}_2\text{O}_3$ -ban. Azután elektron-elektron kölcsönhatásnak tulajdonítható különböző jelenségek szerepelnek, beleértve az exciton-képződést, az excitonoknak fémek esetén mutatott sajátosságait, és egy abszorpciós él Nozières csúcsát, az elektron-elektron ütközéseket, a Baber-szórást, majd egy bevezetést a Hubbard-féle atomon belüli energiával kapcsolatban. A harmadik fejezet a mágneses momentumokkal foglalkozik; a ferro- és antiferromágneses kötésekkel a nemfémes oxidokban, majd a momentumok kialakulásának Andersonn—Wolff feltételeivel fémek esetén. A Kondo-effektust a fém-szigetelő átmeneti anyagokhoz közeli anyagok egyes sajátosságaihoz kapcsolódva mutatja be, és vázolja ezen jelenség fizikájának körvonalait. Ezután üvegek és amorf antiferromágnesek momentumainak kölcsönhatása kerül ismertetésre, majd egy rövid fejezet a fémes ferromágnesekről, főleg azért, hogy a közel ferromágneses anyagról is legyen szó, amelynél a Pauli paramágnesesség meghatározatlanul hangsúlyozódik ki anélkül, hogy az elektron fajlagos hőjére vagy a sűrűségi állapotokra nagyobb hatással volna. Ebben a vonatkozásban nagy a kontraszt az antiferromágneses anyagokhoz erősen közelállókhöz képest, amelyeknél mindkettő hangsúlyozottan jelentkezik.

A negyedik fejezet a korrelációnak tulajdonítható fém-szigetelő átmeneteket tartalmazza, a Hubbard-moddellel indul, amelyben csupán az atomon belüli korreláció szerepel. Az antiferro-



mágneses szigetelő — antiferromágneses fém — normális fém szekvenciát írja le Mott a továbbiakban, majd újból összehasonlítást tesz az antiferromágnesekhez nagyon közel álló és a közel ferromágneses fémek között. Összeveti az egyes elfoglalt centrumokon végbemenő spin flipet a Kondóviselkedéssel. Ez a fejezet írja le a Wigner és Verwey átmeneteket  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , vandánium bronz és néhány ritka földfém vegyület esetén. Az ötödik fejezet a negyedik fejezet gondolatait olyan anyagokban, mint  $\text{V}_2\text{O}_3$ ,  $\text{VO}_2$ , és NiS végbemenő jól ismert átmenetekre alkalmazza. Végül a hatodik fejezet a szennyezett félvezetőkkel és más — mint például  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{VO}_3$ ,  $\text{VO}_x$  és fém—ammónia oldatok — rendezetlen rendszerekkel foglalkozik, melyekben mind a korreláció, mind az Anderson lokalizáció szerepet játszik.

Mott könyvében véges-végig ugyanazon modellre építi mondanivalóját. Ez az eljárás — a szerző teljes tudatában van ennek — ahhoz vezethet, hogy nem ismertet olyan más elképzeléseket, melyek a jövőben az igazsághoz esetleg közelebb álló eredményekhez vezethet. Viszont Mott következetessége önmagában is érdekes és értékes vállalkozás, nem szólva arról, hogy könnyebbé is teszi a tárgyalt problémák megértését. (T. Gy.)

Technikai szerkesztő: Turchányi György

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sós Attila

A kézirat beérkezett: 1974. május 27. — Terjedelem: 8,75 (A/5) ív

74-2502 — Szegedi Nyomda



A MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK

# KÖZLEMÉNYEI

Matematikai, fizikai, csillagászati dolgozatokat, referátumokat, könyvismertetéseket, a Tudományos Minősítő Bizottságnak a III. Osztályra vonatkozó híreit s a III. Osztály híreit közli. Évenként egy kötet (kb. 40 ív) jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

A Közlemények előfizetési ára kötetenként, azaz évenként 60 Ft. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11 488, külföldi megrendelések a „Kultúra”

Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat,

1011 Budapest I., Fő utca 32.

Pénzforgalmi jelzőszám: 218-10 990 útján eszközölhetők.



## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Palla László: Pi mezonok elektromágneses tömegkülönbsége I.</i>	499
<i>Montvay István: Bevezetés a sokrészecskekeltés fenomenológiájába</i>	511
<i>Gnädig Péter: A proton elektromágneses szerkezete és a hidrogénspektrum hiperfinom felhasadása</i>	529
<i>Berényi Dénes: Magasabb rendű és atomi effektusok atommagok bomlásában és interdiszciplináris vonatkozásaik</i>	569

## KÖNYVISMERTETÉS

<i>Fodor Judit: A determinizmus koncepció fejlődése és kapcsolatai a kvantummechanikával (B. G.)</i>	528
<i>Antal Müller: Quantum Mechanics: A Physical World Picture (B. G.)</i>	528
<i>E. Zwicker — E. Terhardt: Fact and Models in Hearing</i>	568
<i>Jens Blauert: Räumliches Hören</i>	595
<i>F. Topsøe: Informationstheorie</i>	595
<i>Walter Schottky: Thermodynamik</i>	596
<i>H. H. Müller és K. Magnus: Übungen zur Technischen Mechanik</i>	596
<i>W. C. Schieve and I. S. Turner: Lectures in Statistical Physics</i>	597
<i>N. F. Mott: Metal-Insulator Transitions</i>	597